Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(4), 485–496

УДК 512.54

Оценки решений сопряженной тепловой задачи в шаровой области

Виктор К. Андреев*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Илона А. Резникова†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 05.04.2012, окончательный вариант 05.05.2012, принята к печати 10.06.2012

Исследована сферически симметричная сопряженная начально-краевая задача распространения тепла в замкнутых ограниченных шаровых областях. Получены априорные оценки температуры в зависимости от внутренних источников тепла. Дано обобщение неравенства Фридрихса на такие области.

Ключевые слова: начально-краевая задача, априорные оценки, функция Грина, поверхность раздела.

1. Постановка задачи

Предположим, что функции $u_1(r,t)$, $u_2(r,t)$ определены в областях $\overline{\Omega}_1 = \{r|0 \leqslant r \leqslant R_1\}$, $\overline{\Omega}_2 = \{r|R_1 \leqslant r \leqslant R_2\}$ соответственно и удовлетворяют уравнениям

$$u_{1t} = \chi_1 \left(u_{1rr} + \frac{2}{r} u_{1r} \right) + f_1(r,t), \ \ t > 0, \ \ r \in \Omega_1, \tag{1.1}$$

$$u_{2t} = \chi_2 \left(u_{2rr} + \frac{2}{r} u_{2r} \right) + f_2(r,t), \ \ t > 0, \ \ r \in \Omega_2. \tag{1.2}$$

Функции u_j представляют собой поля температур, χ_j — известные положительные постоянные — коэффициенты температуропроводностей; f_j — заданные внутренние источники тепла, $j = 1, 2$.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = 0; \tag{1.3}$$

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \tag{1.4}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \tag{1.5}$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0, \tag{1.6}$$

*andr@icm.krasn.ru
†ilona_reznikova@mail.ru

где k_j — коэффициенты теплопроводностей. Условие (1.4) представляет собой равенство температур, а (1.5) — равенство потоков тепла на границе раздела $r = R_1$. Известно [1], что $\chi_j = k_j/c_j\rho_j$, где c_j — удельные теплоемкости, ρ_j — плотности сред.

Требуется найти функции $u_1 \in C^2(\Omega_1)\cap C^1(\Gamma_1)$, $u_2 \in C^2(\Omega_2)\cap C^1(\Gamma_1)\cap C(\Gamma_2)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3)—(1.6), $\Gamma_1 = \{r|r = R_1\}$, $\Gamma_2 = \{r|r = R_2\}$.

2. Априорные оценки решения

Умножая уравнение (1.1) на $r^2 c_1\rho_1 u_1$, а уравнение (1.2) на $r^2 c_2\rho_2 u_2$ и интегрируя, получим

$$\frac{c_1\rho_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{R_1} r^2 u_1^2\,dr = k_1 R_1^2 u_1(R_1,t)u_{1r}(R_1,t) - k_1\int_0^{R_1} r^2 u_{1r}^2\,dr + c_1\rho_1\int_0^{R_1} r^2 f_1 u_1\,dr, \tag{2.1}$$

$$\frac{c_2\rho_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} r^2 u_2^2\,dr = k_2 R_1^2 u_2(R_1,t)u_{2r}(R_1,t) - k_2\int_{R_1}^{R_2} r^2 u_{2r}^2\,dr + c_2\rho_2\int_{R_1}^{R_2} r^2 f_2 u_2\,dr. \tag{2.2}$$

Введем функцию времени

$$E(t) = \frac{c_1\rho_1}{2}\int_0^{R_1} r^2 u_1^2\,dr + \frac{c_2\rho_2}{2}\int_{R_1}^{R_2} r^2 u_2^2\,dr \tag{2.3}$$

и, складывая (2.1) и (2.2) с учетом граничных условий (1.4)–(1.6), выводим тождество

$$\frac{dE}{dt} + k_1\int_0^{R_1} r^2 u_{1r}^2\,dr + k_2\int_{R_1}^{R_2} r^2 u_{2r}^2\,dr = c_1\rho_1\int_0^{R_1} r^2 f_1 u_1\,dr + c_2\rho_2\int_{R_1}^{R_2} r^2 f_2 u_2\,dr. \tag{2.4}$$

Предположим, что с некоторой постоянной $\delta > 0$

$$k_1\int_0^{R_1} r^2 u_{1r}^2\,dr + k_2\int_{R_1}^{R_2} r^2 u_{2r}^2\,dr \geqslant 2\delta E. \tag{2.5}$$

Доказательство этого неравенства приведено в п. 3.

Применяя неравенство Гельдера к правой части (2.4) и используя неравенство (2.5), получим

$$\frac{dE}{dt} + 2\delta E \leqslant \left(R_1\sqrt{2c_1\rho_1}\,\|f_1\| + R_2\sqrt{2c_2\rho_2}\,\|f_2\|\right)\sqrt{E}, \quad \|f_j\| = \left(\int_{\Omega_j} |f_j|^2\,d\Omega_j\right)^{1/2}.$$

Обозначая $\sqrt{E} = Y$, перепишем последнее неравенство так:

$$Y_t + \delta Y \leqslant g(t), \qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(R_1\sqrt{c_1\rho_1}\,\|f_1\| + R_2\sqrt{c_2\rho_2}\,\|f_2\|\right), \tag{2.6}$$

откуда, с учетом начальных условий (1.3), приходим к оценке $\forall t \geqslant 0$

$$E(t) \leqslant e^{-2\delta t}\left(\int_0^t g(\tau)e^{\delta\tau}\,d\tau\right)^2. \tag{2.7}$$

Замечание 1. Из неравенства (2.7) следует единственность решения задачи (1.1)–(1.6). Из определения E(t) (2.3) следуют оценки ru_j, $j = 1, 2$, в норме $L_2(\Omega_j)$

$$\|ru_j\| \leqslant e^{-\delta t}\sqrt{\frac{2}{c_j\rho_j}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{\delta\tau}\,d\tau. \tag{2.8}$$

Оказывается, что можно получить априорные оценки самих функций u_j в равномерных нормах. Для этого заметим, что имеет место другое, отличное от (2.4), тождество для задачи (1.1)–(1.6). Возведем в квадрат и проинтегрируем уравнения (1.1) и (1.2):

$$c_1\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2u_{1t}^2\,dr\,dt - 2k_1\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} u_{1t}\left(r^2u_{1r}\right)_r\,dr\,dt + \frac{k_1^2}{c_1\rho_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\frac{1}{r^2}\left(r^2u_{1r}\right)_r^2\,dr\,dt =$$
$$= c_1\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2f_1^2\,dr\,dt,$$

$$c_2\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2u_{2t}^2\,dr\,dt - 2k_2\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} u_{2t}\left(r^2u_{2r}\right)_r\,dr\,dt + \frac{k_2^2}{c_2\rho_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\left(r^2u_{2r}\right)_r^2\,dr\,dt =$$
$$= c_2\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2f_2^2\,dr\,dt.$$

Складывая последние два уравнения, пользуясь формулой интегрирования по частям и условиями (1.3)–(1.6), выводим тождество

$$c_1\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2u_{1t}^2\,dr\,dt + c_2\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2u_{2t}^2\,dr\,dt + k_1\int\limits_0^{R_1} r^2u_{1r}^2\,dr + k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2u_{2r}^2\,dr+$$
$$+\frac{k_1^2}{c_1\rho_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\frac{1}{r^2}\left(r^2u_{1r}\right)_r^2\,dr\,dt + \frac{k_2^2}{c_2\rho_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\left(r^2u_{2r}\right)_r^2\,dr\,dt =$$
$$= c_1\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2f_1^2\,dr\,dt + c_2\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2f_2^2\,dr\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_j} r^2u_{jr}^2\,dr \leqslant \frac{c_1\rho_1}{k_j}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2f_1^2\,dr\,dt + \frac{c_2\rho_2}{k_j}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2f_2^2\,dr\,dt. \tag{2.9}$$

Пользуясь неравенствами Гельдера, (2.9) и (2.8), получим оценку для u_2^2 :

$$u_2^2 = \int\limits_{R_2}^r\left(u_2^2\right)_r\,dr = 2\int\limits_{R_2}^r u_2u_{2r}\,dr = 2\int\limits_{R_2}^r\left(ru_{2r}\right)\left(ru_2\right)\frac{1}{r^2}\,dr \leqslant \frac{2}{R_1^2}\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2u_{2r}^2\,dr\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2u_2^2\,dr\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{R_1^2}\,\|ru_2\|\left(\frac{c_1\rho_1}{k_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2f_1^2\,dr\,dt+\frac{c_2\rho_2}{k_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2f_2^2\,dr\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{R_1^2\sqrt{k_2}}e^{-\delta t}\left(\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r^2f_1^2\,dr\,dt+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2f_2^2\,dr\,dt\right)^{1/2}\int\limits_0^t g(\tau)e^{\delta\tau}\,d\tau\equiv D^2(t)e^{-\delta t}.$$

Значит,

$$|u_2|\leqslant D(t)e^{-\frac{\delta t}{2}},\ \ \forall r\in[R_1,R_2]\,,\ \ t\in[0,T]\,. \tag{2.10}$$

Для получения оценки функции $u_1(r,t)$ можно воспользоваться представлением решения 1-й краевой задачи в шаре Ω_1 [2]:

$$u_1(r,t)=-\chi_1\int\limits_0^t u_2(R_1,\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{2.11}$$

где G есть функция Грина, причем

$$G(r,\xi,t)=\frac{2\xi}{R_1 r}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{R_1}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2 t}{R_1^2}\right), \tag{2.12}$$

$$\Lambda(r,t)=\frac{\partial G(r,\xi,t)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=R_1}=\frac{2\pi}{R_1 r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2 t}{R_1^2}\right). \tag{2.13}$$

Легко заметить, что

$$G(r,R_1,t)=0. \tag{2.14}$$

Ряды (2.12), (2.13) быстро сходятся при больших t [1]. При малых t быстро сходятся ряды для эквивалентных представлений G и Λ [1]:

$$G(r,\xi,t)=\frac{\xi}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[G_0(r,2nR_1+\xi,t)-G_0(r,2nR_1-\xi,t)\right], \tag{2.15}$$

а G_0 есть функция источника

$$G_0(r,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\chi_1 t}}\exp\left(-\frac{(r-\xi)^2}{4\chi_1 t}\right).$$

При такой записи

$$\Lambda(r,t)=\frac{\partial G(r,\xi,t)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=R_1}=\frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3t^3}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left((r-(2n+1)R_1)\,e^{-\frac{(r-(2n+1)R_1)^2}{4\chi_1 t}}+(r-(2n-1)R_1)\,e^{-\frac{(r-(2n-1)R_1)^2}{4\chi_1 t}}\right). \tag{2.16}$$

Вернемся к формуле (2.11) и представим $\int\limits_0^t=\int\limits_0^{t-\epsilon}+\int\limits_{t-\epsilon}^t$ при произвольном $0<\epsilon<t$. При $0\leqslant\tau\leqslant t-\epsilon$ имеем $t-\tau\geqslant\epsilon>0$. Значит, на $[0,t-\epsilon]$ надо пользоваться формулами (2.12), (2.13), а при $0<t-\epsilon\leqslant\tau\leqslant t$ — использовать представление (2.15), (2.16).

В первом случае имеем последовательно (так как $\sin x \leqslant x \ \forall x$)

$$G(r,\xi,t-\tau) \leqslant \frac{2\pi\xi}{R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2(t-\tau)}{R_1^2}\right) \leqslant \frac{2\pi}{R_1}\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2(t-\tau)}{R_1^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{\chi_1(n^2-1)\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right) = \frac{2\pi a_1}{R_1}\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2(t-\tau)}{R_1^2}\right)\exp\left(\frac{\chi_1\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right), \quad (2.17)$$

где $a_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\dfrac{\chi_1 n^2\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right) < \infty$. Ряд для a_1 сходится, поскольку при достаточно большом n, $q \geqslant 0$, $\alpha > 0$ справедливо неравенство $n^q e^{-\alpha n^2} < 1/n^2$ [3].

Далее,

$$|\Lambda(r,t-\tau)| \leqslant \frac{2\pi^2}{R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2(t-\tau)}{R_1^2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\pi^2 a_2}{R_1^2}\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2(t-\tau)}{R_1^2}\right)\exp\left(\frac{\chi_1\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right), \quad (2.18)$$

где $a_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\exp\left(-\dfrac{\chi_1 n^2\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right) < \infty$.

Предположим, что сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{\Omega_j} f_j^2(\xi,\tau)\,d\xi\right)^{1/2} e^{\delta\tau}\,d\tau = const < \infty, \quad j=1,2, \quad (2.19)$$

тогда с помощью неравенств (2.17), (2.19) получим оценку (всюду далее $A_1,\ldots,A_{14}$ — положительные постоянные)

$$\left|\int_0^{t-\epsilon}\int_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\right| \leqslant \int_0^{t-\epsilon}\left(\int_0^{R_1} f_1^2(\xi,\tau)\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_0^{R_1} G^2(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\right)^{1/2} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\pi a_1}{R_1}\exp\left(\frac{\chi_1\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\int_0^{t-\epsilon}\left(\int_0^{R_1} f_1^2(\xi,\tau)\,d\xi\right)^{1/2} e^{\delta\tau}e^{-\delta\tau}\exp\left(\frac{\chi_1\pi^2\tau}{R_1^2}\right)d\tau \leqslant$$
$$\leqslant A_1\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\int_0^{t-\epsilon}\exp\left(\left(\frac{\chi_1\pi^2}{R_1^2}-\delta\right)\tau\right)d\tau =$$
$$=\begin{cases} A_1(t-\epsilon)\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right), & \delta = \frac{\chi_1\pi^2}{R_1^2} \\ A_2\left(A_3 e^{-\delta t} - \exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\right), & \delta \neq \frac{\chi_1\pi^2}{R_1^2} \end{cases} \equiv h_1(t). \quad (2.20)$$

Первое слагаемое в формуле (2.11) при $t \in [0, t-\epsilon]$ с учетом неравенств (2.10), (2.18) допускает оценку

$$\left|-\chi_1 \int\limits_0^{t-\epsilon} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant \frac{2\chi_1\pi^2 a_2}{R_1^2}\max_{t\in[0,T]}[D(t)]\exp\left(\frac{\chi_1\pi^2\epsilon}{R_1^2}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t-\epsilon}\exp\left(\left(\frac{\chi_1\pi^2}{R_1^2}-\frac{\delta}{2}\right)\tau\right)d\tau = \begin{cases} A_4(t-\epsilon)\exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right), & \delta=\dfrac{2\chi_1\pi^2}{R_1^2} \\ A_5\left(A_6\exp\left(-\dfrac{\delta t}{2}\right)-\exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\right), & \delta\neq\dfrac{2\chi_1\pi^2}{R_1^2}\end{cases} \equiv h_2(t). \tag{2.21}$$

В силу (2.19) $\max\limits_{t\in[0,T]} D(t)$ — конечная величина $\forall\, T>0$.

Вычислим поведение $u_1(0,t)$. Для этого преобразуем формулу (2.15):

$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2r\sqrt{\pi\chi_1 t}}\times$$

$$\times\left(e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4\chi_1 t}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4\chi_1 t}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\frac{(r-2nR_1-\xi)^2}{4\chi_1 t}} - e^{-\frac{(r-2nR_1+\xi)^2}{4\chi_1 t}} + e^{-\frac{(r+2nR_1-\xi)^2}{4\chi_1 t}} - e^{-\frac{(r+2nR_1+\xi)^2}{4\chi_1 t}}\right]\right)$$

По правилу Лопиталя

$$G(0,\xi,t) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}}\left(\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\chi_1 t}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\xi+2nR_1)\,e^{-\frac{(\xi+2nR_1)^2}{4\chi_1 t}} + (\xi-2nR_1)\,e^{-\frac{(\xi-2nR_1)^2}{4\chi_1 t}}\right]\right).$$

Введем замену переменных

$$z=\frac{1}{16\chi_1^2(t-\tau)^2}, \tag{2.22}$$

тогда

$$\int\limits_{t-\epsilon}^{t} G^2(0,\xi,t-\tau)\,d\tau = \frac{2\xi^2}{\chi_1\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{1}{16\epsilon^2\chi_1^2}}^{\infty}\left(\xi e^{-\xi^2\sqrt{z}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\xi+2nR_1)\,e^{-\sqrt{z}(\xi+2nR_1)^2} + (\xi-2nR_1)\,e^{-\sqrt{z}(\xi-2nR_1)^2}\right]\right)^2 dz<\infty. \tag{2.23}$$

Далее, из неравенств (2.19), (2.23) следует оценка

$$\left|\int\limits_{t-\epsilon}^{t}\int\limits_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(0,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\right| \leqslant \left(\int\limits_{t-\epsilon}^{t}\int\limits_0^{R_1} f_1^2(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{R_1}\int\limits_{t-\epsilon}^{t} G^2(0,\xi,t-\tau)\,d\tau\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant A_7\int\limits_{t-\epsilon}^{t} e^{-\delta\tau}\,d\tau = A_8 e^{-\delta t}. \tag{2.24}$$

По непрерывности G $\exists\epsilon_1 > 0$ такое, что $\forall r \in [0, \epsilon_1]$

$$\left| \int\limits_{t-\epsilon}^{t} \int\limits_{0}^{R_1} f_1(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau \right| \leqslant A_8 e^{-\delta t}. \tag{2.25}$$

Из (2.16) имеем

$$\Lambda(r,t) = \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \left((r-R_1)\, e^{-\frac{(r-R_1)^2}{4\chi_1 t}} + (r+R_1)\, e^{-\frac{(r+R_1)^2}{4\chi_1 t}} \right) +$$
$$+ \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r - R_1(2n+1))\, e^{-\frac{(r-R_1(2n+1))^2}{4\chi_1 t}} + (r - R_1(2n-1))\, e^{-\frac{(r-R_1(2n-1))^2}{4\chi_1 t}} \right] +$$
$$+ \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r + R_1(2n-1))\, e^{-\frac{(r+R_1(2n-1))^2}{4\chi_1 t}} + (r + R_1(2n+1))\, e^{-\frac{(r+R_1(2n+1))^2}{4\chi_1 t}} \right].$$

По правилу Лопиталя

$$\Lambda(0,t) = \frac{R_1}{4\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \left(2 - \frac{R_1^2}{\chi_1 t} \right) e^{-\frac{R_1^2}{4\chi_1 t}} +$$
$$+ \frac{R_1}{4\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(2 - \frac{R_1^2(2n+1)^2}{\chi_1 t} \right) e^{-\frac{R_1^2(2n+1)^2}{4\chi_1 t}} + \left(2 - \frac{R_1^2(2n-1)^2}{\chi_1 t} \right) e^{-\frac{R_1^2(2n-1)^2}{4\chi_1 t}} \right].$$

Пользуясь заменой переменных

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}, \tag{2.26}$$

получаем

$$\int\limits_{t-\epsilon}^{t} |\Lambda(0,t-\tau)|\, d\tau = \frac{2R_1}{\chi_1\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\epsilon\chi_1}}}^{\infty} \left|1 - 2R_1^2 z^2\right| e^{-R_1^2 z^2}\, dz +$$
$$+ \frac{2R_1}{\chi_1\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\epsilon\chi_1}}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - 2R_1^2(2n+1)^2 z^2\right| e^{-R_1^2(2n+1)^2 z^2}\, dz +$$
$$+ \frac{2R_1}{\chi_1\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\epsilon\chi_1}}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - 2R_1^2(2n-1)^2 z^2\right| e^{-R_1^2(2n-1)^2 z^2}\, dz < \infty. \tag{2.27}$$

Из неравенств (2.10), (2.27) следует оценка первого слагаемого формулы (2.11) на промежутке $[t-\epsilon, t]$:

$$\left| -\chi_1 \int\limits_{t-\epsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(0,t-\tau)\, d\tau \right| \leqslant \chi_1 e^{-\frac{\delta(t-\epsilon)}{2}} \max_{t\in[0,T]} [D(t)] \int\limits_{t-\epsilon}^{t} |\Lambda(0,t-\tau)|\, d\tau \leqslant A_{10} e^{-\frac{\delta t}{2}}. \tag{2.28}$$

По непрерывности Λ $\exists\epsilon_2 > 0$, что $\forall r \in [0, \epsilon_2]$

$$\left| -\chi_1 \int\limits_{t-\epsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\, d\tau \right| \leqslant A_{10} e^{-\frac{\delta t}{2}}. \tag{2.29}$$

Пусть теперь $\epsilon_3 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, тогда для $\epsilon_3 \leqslant r \leqslant R_1$ путем замены переменных (2.22) получим

$$\int\limits_{t-\epsilon}^{t} G^2(r,\xi,t-\tau)\,d\tau \leqslant \frac{\xi^2}{8\chi_1\epsilon_3^2\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{\frac{1}{16\chi_1^2\epsilon^2}}^{\infty}\left(e^{-b^2\sqrt{z}} - e^{-a^2\sqrt{z}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\sqrt{z}(b-c)^2} + e^{-\sqrt{z}(b+c)^2} - e^{-\sqrt{z}(a-c)^2} - e^{-\sqrt{z}(a+c)^2}\right]\right)^2\frac{dz}{z} < \infty, \tag{2.30}$$

где $a = r+\xi$, $b = r-\xi$, $c = 2nR_1$.

Из неравенств Гельдера, (2.19), (2.30) аналогично (2.24) имеем

$$\left|\int\limits_{t-\epsilon}^{t}\int\limits_{0}^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\right| \leqslant A_{11}e^{-\delta t}. \tag{2.31}$$

Пользуясь заменой переменных (2.26), получаем

$$\int\limits_{t-\epsilon}^{t}|\Lambda(r,t-\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{R_1}{\chi_1\epsilon_3\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\chi_1\epsilon}}}^{\infty}\left(|r-R_1|\,e^{-(r-R_1)^2z^2} + (r+R_1)\,e^{-(r+R_1)^2z^2}\right)dz+$$
$$+\frac{R_1}{\chi_1\epsilon_3\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\chi_1\epsilon}}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|r-R_1(2n+1)|\,e^{-(r-R_1(2n+1))^2z^2} + |r-R_1(2n-1)|\,e^{-(r-R_1(2n-1))^2z^2}\right]dz+$$
$$+\frac{R_1}{\chi_1\epsilon_3\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\chi_1\epsilon}}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(r+R_1(2n-1))\,e^{-(r+R_1(2n-1))^2z^2}\right]+$$
$$+\frac{R_1}{\chi_1\epsilon_3\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{\chi_1\epsilon}}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(r+R_1(2n+1))\,e^{-(r+R_1(2n+1))^2z^2}\right]dz < \infty. \tag{2.32}$$

Из (2.10), (2.32) аналогично (2.28) имеем

$$\left|-\chi_1\int\limits_{t-\epsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant A_{12}e^{-\frac{\delta t}{2}}. \tag{2.33}$$

Таким образом получили оценку

$$|u_1| \leqslant h_1(t) + h_2(t) + A_{13}e^{-\delta t} + A_{14}e^{-\frac{\delta t}{2}} \qquad \forall r\in[0,R_1],\ \ t\in[0,T], \tag{2.34}$$

где $h_j(t)$ определяются равенствами (2.20), (2.21) и $T>0$ — произвольное число.

3. Доказательство неравенства (2.5)

Докажем неравенство (2.5); для этого сначала установим неравенство (w_j не равны постоянным одновременно)

$$\int\limits_0^{R_1} r^2w_1^2(r,t)\,dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2w_2^2(r,t)\,dr \leqslant M_0\left(k_1\int\limits_0^{R_1} r^2w_{1r}^2(r,t)\,dr + k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2w_{2r}^2(r,t)\,dr\right)$$

с некоторой постоянной M_0, где w_j удовлетворяют граничным условиям (1.4)–(1.6). Рассмотрим функционал

$$F(w_1, w_2) = \frac{\int\limits_0^{R_1} r^2 w_1^2(r,t)\,dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 w_2^2(r,t)\,dr}{k_1 \int\limits_0^{R_1} r^2 w_{1r}^2(r,t)\,dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 w_{2r}^2(r,t)\,dr},$$

где $w_j \in W_2^1\left(\Omega_j; r^2\right)$. Функция $\phi(\tau) = F(w_1 + \tau h_1, w_2 + \tau h_2)$ имеет производную при $\tau = 0$ $\forall h_j \in W_2^1\left(\Omega_j; r^2\right)$, h_j удовлетворяют условиям (1.4)–(1.6), а F дифференцируем по Фреше. Тогда [4] существует первая вариация по Лагранжу функционала F в точке (w_1, w_2) и $\delta F(w_1, w_2)(h_1, h_2) = \phi'(0)$. Имеем

$$\delta F(w_1, w_2)(h_1, h_2) = \frac{\int\limits_0^{R_1} 2r^2 w_1 h_1\,dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} 2r^2 w_2 h_2\,dr}{k_1 \int\limits_0^{R_1} r^2 w_{1r}^2\,dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 w_{2r}^2\,dr} -$$

$$- F(w_1, w_2)\frac{k_1 \int\limits_0^{R_1} 2r^2 w_{1r} h_{1r}\,dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} 2r^2 w_{2r} h_{2r}\,dr}{k_1 \int\limits_0^{R_1} r^2 w_{1r}^2\,dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 w_{2r}^2\,dr}.$$

Пусть теперь $w_j \in W_2^1\left(\Omega_j; r^2\right)$ таковы, что

$$\sup_{w_j \in W_2^1(\Omega_j; r^2)} F(w_1, w_2) = M_0. \tag{3.1}$$

Имеем $\delta F(w_1, w_2)(h_1, h_2) = 0$ [4], поэтому

$$\int\limits_0^{R_1} r^2 \left(w_1 h_1 - M_0 k_1 w_{1r} h_{1r}\right) dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 \left(w_2 h_2 - M_0 k_2 w_{2r} h_{2r}\right) dr = 0.$$

Выбирая, в силу произвольности $h_1, h_2, h_2 \equiv 0$, тогда $h_1(R_1, t) = 0$, или $h_1 \equiv 0$, тогда $h_2(R_1, t) = h_2(R_2, t) = 0$, получим

$$\int\limits_0^{R_1} r^2 \left(w_1 h_1 - M_0 k_1 w_{1r} h_{1r}\right) dr = 0, \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 \left(w_2 h_2 - M_0 k_2 w_{2r} h_{2r}\right) dr = 0.$$

По лемме Дюбуа-Реймона [4] получим отсюда уравнения Эйлера вариационной задачи (3.1) (по этой лемме вторые производные существуют):

$$-k_j \frac{1}{r^2}\left(r^2 w_{jr}\right)_r = \frac{1}{M_0} w_j, \;\; r \in \Omega_j, \tag{3.2}$$

причем w_j удовлетворяют граничным условиям (1.4)—(1.6).

Легко показать, что M_0 является положительным числом. Действительно, положим $\lambda = 1/M_0$ и, умножая (3.2) на комплексно сопряженную $\overline{w}_j$, получим

$$-k_1 \int\limits_0^{R_1} \overline{w}_1 \left(r^2 w_{1r}\right)_r\,dr = \lambda \int\limits_0^{R_1} r^2 \overline{w}_1 w_1\,dr,$$

$$-k_2\int\limits_{R_1}^{R_2}\overline{w}_2\left(r^2w_{2r}\right)_r\,dr=\lambda\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2\overline{w}_2w_2\,dr.$$

Складывая последние два равенства, а затем применяя интегрирование по частям и граничные условия (1.4)–(1.6), выводим соотношение

$$\lambda\left(\int\limits_0^{R_1}r^2\left|w_1\right|^2\,dr+\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2\left|w_2\right|^2\,dr\right)=k_1\int\limits_0^{R_1}r^2\left|w_{1r}\right|^2\,dr+k_2\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2\left|w_{2r}\right|^2\,dr.$$

В силу положительности k_j получим $\lambda>0$; если $\lambda=0$, то $w_j\equiv 0$, $j=1,2$. Далее будем считать $\lambda>0$ $(M_0>0)$ и искать нетривиальные решения уравнения (3.2); они имеют вид [5]

$$w_j=r^{-\frac12}\left(C_1^jJ_{\frac12}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_j}}\right)+C_2^jY_{\frac12}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_j}}\right)\right),$$

причем $C_2^1=0$, так как $|w_1(0,t)|<\infty$; не ограничивая общности, можно считать $C_1^1=1$. Следовательно,

$$w_1=r^{-\frac12}J_{\frac12}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right),$$

$$w_2=r^{-\frac12}\left(C_1J_{\frac12}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)+C_2Y_{\frac12}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)\right).$$

Подставляя решение в граничные условия (1.4)—(1.6), найдем C_1,C_2 и уравнение на λ:

$$C_1=\frac{Y_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)}{J_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)Y_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-Y_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)},$$

$$C_2=\frac{J_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)}{Y_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-J_{\frac12}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)Y_{\frac12}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)},$$

$$-\frac{\sqrt{k_1\lambda}}{k_2}J_{\frac32}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)+\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\left(C_1J_{\frac32}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)+C_2Y_{\frac32}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)\right)=0.$$

Перейдем к безразмерным переменным $k=k_1/k_2$, $\omega^2=\lambda R_1^2/k_1$, $R=R_1/R_2$, тогда характеристическое уравнение на λ примет вид

$$F\left(\omega,k,R\right)\equiv\frac{\omega\sqrt{k}J_{\frac12}(\omega)\left[J_{\frac12}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)Y_{\frac32}\left(\omega\sqrt{k}\right)-J_{\frac32}\left(\omega\sqrt{k}\right)Y_{\frac12}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)\right]}{J_{\frac12}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)Y_{\frac12}\left(\omega\sqrt{k}\right)-J_{\frac12}\left(\omega\sqrt{k}\right)Y_{\frac12}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)}-k\omega J_{\frac32}(\omega)=0.$$

Поскольку [6]

$$J_{\frac12}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad Y_{\frac12}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$J_{\frac32}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right),\quad Y_{\frac32}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z+\frac{\cos z}{z}\right),$$

то выражение в правой части для F допускает упрощение

$$F = \left(\frac{1-k}{\omega\sqrt{k}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{R-1}{R}\omega\sqrt{k}\right)\right)\sin\omega + \sqrt{k}\cos\omega. \tag{3.3}$$

Нам необходимо найти минимальный положительный корень этого уравнения $\omega_{min} = R_1\sqrt{\lambda_{min}/k}$. При этом в неравенстве (2.5)

$$\delta = \frac{1}{M_{0min}}\min\left(\frac{\chi_1}{k_1}, \frac{\chi_2}{k_2}\right) = \frac{\omega_{min}^2}{R_1^2k^2}\min\left(\chi_1, k\chi_2\right). \tag{3.4}$$

Таким образом, величина δ зависит от геометрии области и физических параметров контактирующих сред.

Рассмотрим уравнение (3.3). Если ω — его корень, то и $-\omega$ является корнем. Поэтому достаточно считать $\omega \geqslant 0$. На рис. 1–3 показано поведение функции F при конкретных значениях R и k. С ростом R минимальное значение корня близко к π. Это и неудивительно, поскольку при $R \to 1$ (тонкий внешний слой) уравнение (3.3) эквивалентно $\sin\omega \approx 0$, что и дает $\omega_{min} \approx \pi$.

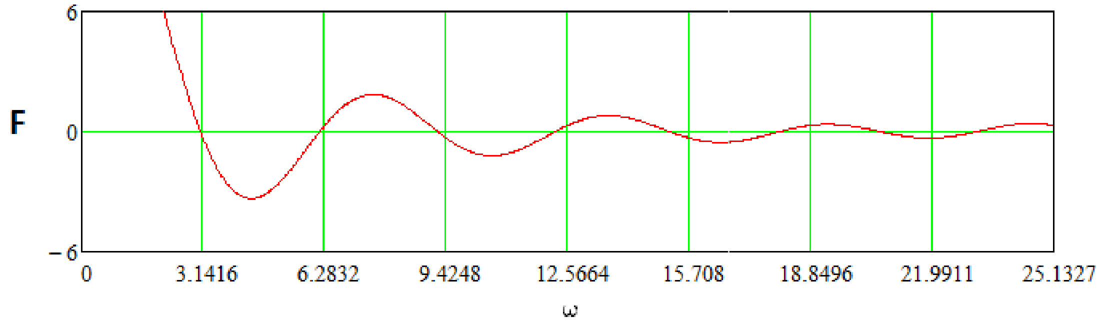

Рис. 1. Численное решение уравнения (3.3) при k=0.1, R=0.8

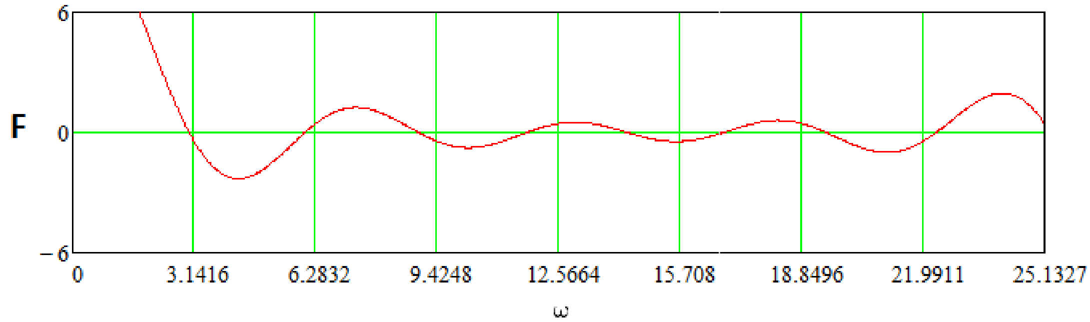

Рис. 2. Численное решение уравнения (3.3) при k=0.2, R=0.8

Для данных на рис. 1–3 получим $\omega_{min} \approx 3,078$, $\omega_{min} \approx 3,013$, $\omega_{min} \approx 3,141$ соответственно.

Замечание 2. Можно строго доказать, что первый положительный корень функции F лежит в интервале $(0,\pi)$ $\forall k \neq 0$ и $0 < R < 1$.

Обратимся теперь к оценкам температур (2.10) и (2.34). Они получены при условии сходимости интеграла (2.19) с постоянной δ из (3.4). Значит, при $t \to \infty$ температуры в

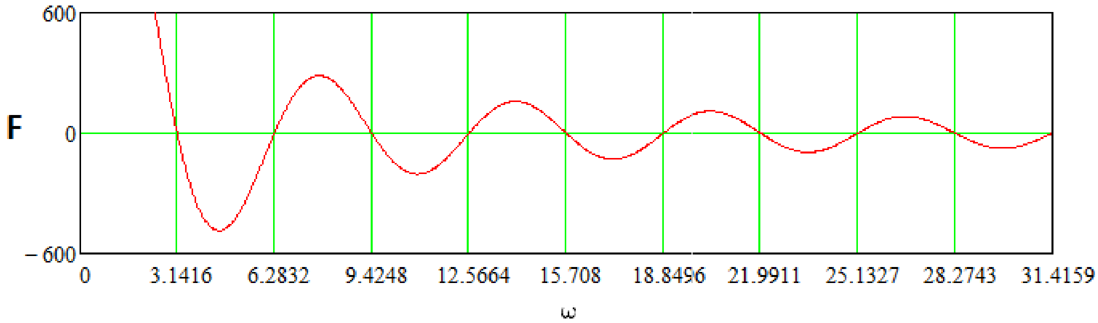

Рис. 3. Численное решение уравнения (3.3) при k=0.2, R=0.999

средах стремятся к нулю. Заметим, что условие (2.19) влечет экспоненциальное затухание интенсивности внутренних источников тепла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00283).

Список литературы

[1] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, М., Наука, 1972.

[2] А.Д.Полянин, Справочник по линейным уравнениям математической физики, М., Физматлит, 2001.

[3] Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., Физматлит, 2001.

[4] В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин, Оптимальное управление, М., Наука, 1979.

[5] Э.Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Лань, 2003.

[6] Справочник по специальным функциям: Справ., Под ред. М. Абрамовица и И.Стиган, М., Наука, 1979.

The Estimates of Solutions of Adjoint Heat Problem in Spherical Area

Viktor K .Andreev
Ilona A .Reznikova

Spherically symmetric adjoint initial-boundary value problem of heat propagation in closed bounded spherical regions has been researched. A priori estimates of temperature have been obtained subject to internal heat sources. Friedrichs inequality has been generalized for such areas.

Keywords: initial-boundary value problem, a priori estimates, Green function, interface.