УДК 532.61.096

О потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела

Евгений П. Магденко*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041;
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 25.04.2012, окончательный вариант 25.06.2012, принята к печати 01.08.2012

Рассмотрена задача о возникновении конвекции в двухслойной цилиндричесой системе. Для ее решения был применен метод разделения переменных. В результате получено однородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами со сложными граничными условиями. Для случая, когда система находится в состоянии невесомости, а возмущения монотонные, получено аналитическое выражение для критических чисел Марангони. Доказано, что с увеличением радиуса цилиндра они стремятся к известным числам Марангони для системы двух плоских слоев.

Ключевые слова: поверхность раздела, невесомость, критические числа Марангони.

1. Постановка задачи

Пусть цилиндрический контейнер заполнен двумя несмешиваемыми покоящимися жидкостями с общей поверхностью раздела. Обозначим через $\Omega_1 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h_1, 0)$ и $\Omega_2 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (0, h_2)$ области, занятые жидкостями (рис. 1).

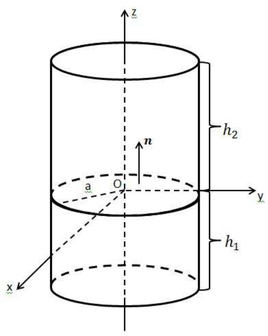

Рис. 1. Схема области конвекции

Равновесное состояние системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в цилиндрической системе координат $r,\ \varphi,\ z$ при отсутствии силы тяжести описывается уравнениями

$$\nabla p_j = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

*mag_djin@mail.ru

где p_j — давление, а Θ_j — температура j-го слоя жидкости, $j = 1, 2$. На основаниях и боковых стенках цилиндров задается температура

$$\Theta_1\left(r, \varphi, -h_1\right) = \Theta_{01}\left(r, \varphi\right), \quad \Theta_2\left(r, \varphi, h_2\right) = \Theta_{02}\left(r, \varphi\right), \tag{3}$$

$$\Theta_j\left(a, \varphi, z\right) = \tilde{\Theta}_j\left(\varphi, z\right). \tag{4}$$

На границе раздела Γ ($z = 0$) имеем условия

$$V_n = 0, \tag{5}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2, \qquad k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\left(-p_2 + p_1\right) \mathbf{n} = \nabla_\Gamma \sigma, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Γ, направленный из Ω_1 в Ω_2; V_n — скорость перемещения поверхности раздела Γ в направлении $\mathbf{n}$; ∇_Γ — поверхностный градиент; k_j — коэффициент теплопроводности; (5) — кинематическое условие; уравнения (6) представляют собой равенство температур и потоков тепла, а (7) — баланс всех сил и кинематическое условие; предполагаем, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры $\sigma = \sigma\left(\Theta\right) = \sigma^o - æ\Theta$, где в силу равенства (6) $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$, а значит,

$$\sigma_r = -æ\Theta_r, \quad \sigma_\varphi = -æ\Theta_\varphi. \tag{8}$$

Имеем $\mathbf{n} = \left(0, 0, 1\right)$, $\mathbf{e}_r = \left(1, 0, 0\right)$, $\mathbf{e}_\varphi = \left(0, 1, 0\right)$, поэтому уравнение (7) примет вид $\left(p_1 - p_2\right)\left(0, 0, 1\right) = \alpha_1 \mathbf{e}_r + \alpha_2 \mathbf{e}_\varphi = \left(\alpha_1, \alpha_2, 0\right)$, а это выполняется тогда и только тогда, когда

$$p_1 = p_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_1 = \nabla\sigma \cdot \mathbf{e}_r = \sigma_r, \quad \alpha_2 = \nabla\sigma \cdot \mathbf{e}_\varphi = \sigma_\varphi. \tag{10}$$

Таким образом, с учетом (8)–(10) следует, что при $z = 0$ $\Theta_\varphi = \Theta_r = 0$. Далее предполагаем, что и внутри цилиндров это равенство верно, а в (3), (4) функции Θ_{01}, Θ_{02}, $\tilde{\Theta}_j$ не зависят от r, φ. Тогда из уравнений (2) получим представления для температур

$$\Theta_j = \Theta_j\left(z\right) = a_j z + b_j.$$

Коэффициенты a_j, b_j находятся из граничных условий (3) – (5):

$$a_1 = \frac{k\left(\Theta_{02} - \Theta_{01}\right)}{h_2 + kh_1}, \quad a_2 = \frac{\Theta_{02} - \Theta_{01}}{h_2 + kh_1},$$

$$b_1 = b_2 = \frac{kh_1\Theta_{02} + h_2\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \qquad k = k_2/k_1. \tag{11}$$

2. Возмущенное решение

Рассмотрим осесимметрическую задачу (1) – (7). Выберем в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления и температуры соответственно h_2, h_2/ν_2, $\rho_{o2}\nu_2^2/h_2^2$, $a_2 h_2$. Тогда уравнения для монотонных возмущений в безразмерных переменных в областях

$\Omega_1 = (0, 1/\alpha) \times (-h, 0)$ и $\Omega_2 = (0, 1/\alpha) \times (0, 1)$, где $\alpha = h_2/a$, $h = h_1/h_2$, примут вид

$$P_{jr} = \frac{\rho_{oj}\nu_j}{\rho_{o2}\nu_2}\left(U_{jrr} + \frac{1}{r}U_{jr} + U_{jzz} - \frac{U_j}{r^2}\right), \tag{12}$$

$$P_{jz} = \frac{\rho_{oj}\nu_j}{\rho_{o2}\nu_2}\left(W_{jrr} + \frac{1}{r}W_{jr} + W_{jzz}\right), \tag{13}$$

$$U_{jr} + \frac{U_j}{r} + W_{jz} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{k_2}{k_j}W_j = \frac{\chi_j}{\chi_2 Pr}\left(T_{jrr} + \frac{1}{r}T_{jr} + T_{jzz}\right), \tag{15}$$

где P_j, T_j, $\mathbf{U}_j$ — возмущение основного решения p_j, Θ_j, $\mathbf{u}_j = 0$; ρ_{oj}, ν_j, χ_j соответственно плотность, кинематическая вязкость и коэффициент температуропроводности j-й жидкости; $Pr = \nu_2/\chi_2$ — число Прандтля.

Граничные условия на поверхности раздела таковы:

$$T_1 + kN = T_2 + N, \tag{16}$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \tag{17}$$

$$P_1 - P_2 + 2\left(\frac{\partial W_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o\nu}\frac{\partial W_1}{\partial z}\right) = We\left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o\nu}\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\right) = -\frac{M}{Pr}\left(kN_r + T_{1r}\right), \tag{19}$$

$$M\left(\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o\nu}\frac{\partial T_1}{\partial z}\right) = M_1 Pr\left(U_{2r} + \frac{U_2}{r}\right), \tag{20}$$

$$W_1 = 0, \tag{21}$$

где $\rho_o = \rho_{o2}/\rho_{o1}$; $\nu = \nu_2/\nu_1$; N — отклонение поверхности раздела от плоскости; $We = \sigma h_2/\rho_{o2}\nu_2^2$ — число Вебера; $M = æ a_2 h_2^2/\rho_{o2}\nu_2\chi_2$ — число Марангони; $M_1 = æ^2 b_2/k_2\rho_{o2}\nu_2$. Параметр M_1 характеризует энергию, затрачиваемую на деформацию поверхности раздела.

На основаниях цилиндра выполняются условия прилипания и возмущения температур равны нулю. На боковых стенках контейнера справедливо условие просачивания жидкости по нормали к ним.

Замечание 1. Общий поток жидкости через всю боковую поверхность цилиндра равен нулю.

Задача (12) – (21) допускает разделение переменных, именно

$$U_j = \frac{1}{r}R(r)\,F_{jz}(z), \tag{22}$$

$$W_j = -\frac{1}{r}R_r(r)\,F_j(z), \tag{23}$$

$$T_j = \frac{1}{r}R_r(r)\,G_j(z), \tag{24}$$

где

$$R = R_n(r) = rJ_1(mr), \tag{25}$$

здесь $m = \alpha\delta_n$, а δ_n, $n = 1, 2...$ есть решение уравнения

$$J_0(\delta) = 0. \tag{26}$$

Его первые корни равны [1] $\delta_1 = 2,4048255577$, $\delta_2 = 5,5200781103$, $\delta_3 = 8,6537279129$, $\delta_4 = 11,7915344391$, $\delta_5 = 14,9309177086$. Из $(25), (26)$ выводим равенство $R_{nr}(a) = 0$. Таким образом, условия на боковой поверхности для касательной скорости и температуры заведомо выполнены ($W_j\left(1/\alpha, z\right) = 0\,,\ T_j\left(1/\alpha, z\right) = 0$), а нормальная скорость равна

$$U_j\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) = J_1\left(\delta_n\right)F_{jz}\left(z\right).$$

Используя формулы (22) – (24), получим обыкновенное дифференциальное однородное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами $L^3 G_j = 0$, где $L = d^2/dz^2 - m^2$. Оно интегрируется, и решение таково:

$$G_j = \left(\frac{H_{j1}}{8m^2}z^2 + \frac{1}{2m}\left(H_{j4} - \frac{H_{j2}}{4m^2}\right)z + H_{j5}\right)\operatorname{ch} mz + \\ + \left(\frac{H_{j2}}{8m^2}z^2 + \frac{1}{2m}\left(H_{j3} - \frac{H_{j1}}{4m^2}\right)z + H_{j6}\right)\operatorname{sh} mz, \quad (27)$$

где $H_{ji}, i = 1, 2, ..6,\ j = 1, 2$ — некоторые неизвестные постоянные. Функции F_j примут вид

$$F_j = -\frac{k_j\chi_j}{k_2\chi_2 Pr}\left[\left(\frac{H_{j2}}{2m}z + H_{j3}\right)\operatorname{ch} mz + \left(\frac{H_{j1}}{2m}z + H_{j4}\right)\operatorname{sh} mz\right] \quad (28)$$

Условия на поверхности раздела, с учетом (27) – (28), упрощаются:
— равенство температур $G_1\left(0\right) = G_2\left(0\right) + \left(1 - k\right)N_0$ дает

$$H_{15} - H_{25} + \left(k - 1\right)N_0; \quad (29)$$

— равенства скоростей $F_1\left(0\right) = F_2\left(0\right),\ \ F_{1z}\left(0\right) = F_{2z}\left(0\right)$ приводят к соотношениям

$$H_{13} - k\chi H_{23} = 0, \quad \chi = \chi_2/\chi_1; \quad (30)$$

$$\frac{1}{2m}H_{12} + mH_{14} - k\chi\left(\frac{1}{2m}H_{22} + mH_{24}\right) = 0; \quad (31)$$

— динамическое условие $\frac{1}{\rho_0\nu}\left(F_{1zzz} - 3m^2F_{1z}\right) - \left(F_{2zzz} - 3m^2F_{2z}\right) = m^4WeN_0$ примет вид

$$-H_{14} + k\rho_o\nu\chi H_{24} + \frac{1}{2}k\rho_o\nu\chi mPrWeN_0 = 0; \quad (32)$$

— условие касательных напряжений $m^2F_2 + F_{2zz} - \frac{1}{\rho_0\nu}\left(m^2F_1 + F_{1zz}\right) = \frac{Mm^2}{Pr}\left(kN_0 + G_1\right)$

$$H_{11} + 2m^2H_{13} - k\rho_o\nu\chi m^2MH_{15} - k\rho_o\nu\chi H_{21} - 2k\rho_o\nu\chi m^2H_{25} - k^2\rho_o\nu\chi m^2MN_0 = 0; \quad (33)$$

— условие теплового контакта $M\left(G_{2z} - \frac{1}{k}G_{1z}\right) = M_1PrF_{2z}$

$$\frac{M}{8km^3}H_{12} - \frac{M}{2km}H_{14} - \frac{Mm}{k}H_{16} + \frac{1}{2m}\left(M_1 - \frac{M}{4m^2}\right)H_{22} + \left(\frac{M}{2m} + M_1m\right)H_{24} + \\ + MmH_{26} = 0; \quad (34)$$

— кинематическое условие $F_2 = 0$

$$H_{23} = 0. \quad (35)$$

Граничные условия на нижнем основании цилиндра для скоростей и температуры $F_1\left(-h\right) = F_{1z}\left(-h\right) = 0,\ \ G_1\left(-h\right) = 0$ примут вид

$$\frac{ht_1}{2m}H_{11} - \frac{h}{2m}H_{12} + H_{13} - t_1H_{14} = 0, \quad t_1 = \operatorname{th} mh, \quad (36)$$

$$-\frac{1}{2}\left(h + \frac{t_1}{m}\right)H_{11} + \frac{1}{2}\left(ht_1 + \frac{1}{m}\right)H_{12} - mt_1H_{13} + mH_{14} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{h}{8m^2}\left(h - \frac{t_1}{m}\right)H_{11} + \frac{h}{8m^2}\left(\frac{1}{m} - ht_1\right)H_{12} + \frac{ht_1}{2m}H_{13} - \frac{h}{2m}H_{14} + H_{15} - t_1H_{16} = 0. \quad (38)$$

На верхнем основании выполняются следующие условия $F_2(1) = F_{2z}(1) = 0,\ \ G_2(1) = 0$:

$$\frac{t_2}{2m}H_{21} + \frac{1}{2m}H_{22} + H_{13} + t_2 H_{24} = 0, \quad t_2 = \operatorname{th} m, \tag{39}$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_2}{m}\right) H_{21} + \frac{1}{2}\left(t_2 + \frac{1}{m}\right) H_{22} + m t_2 H_{23} + m H_{24} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{1}{8m^2}\left(1 - \frac{t_2}{m}\right) H_{21} + \frac{1}{8m^2}\left(t_2 - \frac{1}{m}\right) H_{22} + \frac{t_2}{2m}H_{23} + \frac{1}{2m}H_{24} + H_{25} + t_2 H_{26} = 0. \tag{41}$$

Полученная система из условий (29) – (41) будет являться алгебраической относительно постоянных $H_{ji},\ i = 1, 2, ..6,\ j = 1, 2$. Нетривиальное решение системы уравнений существует тогда и только тогда, когда ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это дает возможность найти критические числа Марангони. Аналитические вычисления в системе Maple показывают, что

$$M = \frac{4m^2 Pr\left(A - k\mu S_1 S_2 M_1 \left(m^2 - S_2^2\right)\left(m^2h^2 - S_1^2\right)\right)}{PrZ - DWe^{-1}}, \tag{42}$$

где

$$A = 2\left(kS_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^3h^2\mu + m^3h - m^2S_1C_1 - m^2h^2\mu S_2C_2 - mhS_2^2 - m\mu S_1^2 + \right.$$
$$\left. + \mu S_2 S_1^2 C_2 + S_2^2 S_1 C_1\right); \tag{43}$$

$$Z = k\mu\left(m^5h^3\chi S_2C_1 - m^3h^3\chi S_2^3C_1 + m^3S_1^3C_2 + m^2h^2S_2^3S_1 - m^5h^2S_1C_2 - m^2\chi S_1^3S_2 + \right.$$
$$\left. + \chi S_1^3S_2^3 - S_1^3S_2^3\right); \tag{44}$$

$$D = 8km^3\left(S_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^2h^2\mu - m^2h^2 + h^2S_2^2 - \mu S_1^2\right); \tag{45}$$

$$\mu = \rho_{o2}\nu_2/\rho_{o1}\nu_1;\ S_1 = \operatorname{sh} mh;\ C_1 = \operatorname{ch} mh;\ S_2 = \operatorname{sh} m;\ C_2 = \operatorname{ch} m. \tag{46}$$

Замечание 2. Если $a \to \infty$, $n \to \infty$ таким образом, что $m = \delta_n h_1/a \to m_0 = const$, то выражение (42) в точности совпадает с числом Марангони для контактирующих жидкостей в бесконечных слоях.

Для (42) получены следующие асимптотические формулы:
при $m_0 \to \infty$ (использованы асимптотические выражения $S_1 \sim e^{m_0h}/2$, $C_1 \sim e^{m_0h}/2$, $S_2 \sim e^{m_0}/2$, $C_2 \sim e^{m_0}/2$)

$$M \sim \frac{4\left(2\left(k+1\right)\left(\mu+1\right) - k\mu M_1\right)}{k\mu\left(\chi - 1\right)} m_0^2; \tag{47}$$

— при $\chi = 1$ асимптотическая формула запишется в следующем виде:

$$M \sim \begin{cases} \dfrac{2\left(k+1\right)\left(\mu+1\right) - k\mu M_1}{k\mu\left(Pr\left(m_0 - 1\right) + 8km_0We^{-1}\right)} e^{2m_0}, & h > 1 \\ \dfrac{2\left(k+1\right)\left(\mu+1\right) - k\mu M_1}{16k^2m_0We^{-1}\left(\mu - 1\right)} e^{2m_0}, & h = 1 \\ \dfrac{2\left(k+1\right)\left(\mu+1\right) - k\mu M_1}{kh^2\left(\mu Pr\left(1 - m_0h\right) - 8km_0We^{-1}\right)} e^{2m_0h}, & h < 1 \end{cases} \tag{48}$$

Замечание 3. Если $\mu = 1$ и $\chi = 1$, то поверхность раздела отсутствует. При $m_0 \to 0$ (также $S_1 \sim m_0h + m_0^3h^3/6$, $C_1 \sim 1 + m_0^2h^2/2$, $S_2 \sim m_0 + m_0^3/6$, $C_2 \sim 1 + m_0^2/2$)

$$M \sim \frac{2Prh\left(h\mu + 1\right)\left(hk + 1\right)}{3k^2We^{-1}\left(h + 1\right)\left(h^2\mu - 1\right)} m_0^2; \tag{49}$$

— если $h^2\mu = 1$, то

$$M \sim \frac{8Pr\,(hk+1)}{k^2We^{-1}\,(h-1)\,(h+1)}; \tag{50}$$

— при $h = 1$ и $\mu = 1$ имеем

$$M \sim \frac{128\,(k+1)}{k\,(\chi-1)}. \tag{51}$$

В случае недеформируемой поверхности раздела ($We = \infty$) при $m_0 \to 0$ получим

$$M \sim \frac{64\,(h\mu+1)\,(hk+1)}{k\mu h^2\,(\chi h^2-1)}m_0^{-2}; \tag{52}$$

— если $h^2\chi = 1$, то

$$M \sim -\frac{2304\,(h\mu+1)\,(hk+1)}{k\mu h^2\,(h-1)\,(h+1)}m_0^{-4}. \tag{53}$$

Зависимость числа Марангони от геометрических параметров в случае однослойной жидкости

Предположим, что у нас имеется однослойная жидкость ($h_2 = 0$) с верхней свободной деформируемой границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Равновесное состояние системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в цилиндрической системе координат $r,\ \varphi,\ z$ при отсутствии силы тяжести описывается уравнениями (1), (2). На свободной границе Γ_1 ($z = 0$) справедливы следующие условия [2]:

$$k_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial z} + \gamma_1\,(\Theta_1 - \Theta_{ok}) = Q, \tag{54}$$

$$(p_{ok} - p_1)\,\mathbf{n} = \nabla_{\Gamma_1}\sigma, \qquad V_n = 0, \tag{55}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Γ_1, направленный из Ω_1; V_n — скорость перемещения свободной границы Γ_1 в направлении $\mathbf{n}$; γ_1 — коэффициент межфазного теплообмена; p_{ok}, Θ_{ok} — давление и температура окружающей среды; Q — заданный поток тепла. Равенство (54) представляют собой условие теплового контакта, а (55) — баланс всех сил и кинематическое условие. На нижнем основании $\Theta\,(r,\varphi,-h_1) = \Theta_{01}\,(\varphi, z)$.

Выберем в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления и температуры соответственно $h_1,\ h_1/\nu_1,\ \rho_{o1}\nu_1^2/h_1^2,\ a_1h_1$. Рассмотрим осесимметрическую задачу (1), (2), (54), (55). Тогда для монотонных возмущений в безразмерных переменных в области $\Omega_1 = (0, 1/\alpha) \times (-1, 0)$, где $\alpha = h_1/a$, получим уравнения

$$P_{1r} = \left(U_{1rr} + \frac{1}{r}U_{1r} + U_{1zz} - \frac{U_1}{r^2}\right), \tag{56}$$

$$P_{1z} = \left(W_{1rr} + \frac{1}{r}W_{1r} + W_{1zz}\right), \tag{57}$$

$$U_{1r} + \frac{U_1}{r} + W_{1z} = 0, \tag{58}$$

$$W_j = \frac{1}{Pr}\left(T_{1rr} + \frac{1}{r}T_{1r} + T_{1zz}\right). \tag{59}$$

На свободной границе выполняются следующие условия:

$$-P_1+2\frac{\partial W_1}{\partial z}=We\left(N_{rr}+\frac{1}{r}N_r\right), \tag{60}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial r}+\frac{\partial U_1}{\partial z}=-\frac{M}{Pr}\left(N_r+T_{1r}\right), \tag{61}$$

$$T_{1z}+Bi\left(T_1+N\right)=0, \tag{62}$$

$$W_1=0, \tag{63}$$

где $We=\sigma h_1/\rho_{o1}\nu_1^2$; $Pr=\nu_1/\chi_1$; $M=æa_1h_1^2/\rho_{o1}\nu_1\chi_1$; $M_1=æ^2b_1/k_1\rho_{o1}\nu_1$; $Bi=\gamma_1h_1/k_1$ — число Био. Условия на нижнем основании цилиндра для скоростей и температуры дают

$$F_1\left(-1\right)=F_{1z}\left(-1\right)=0,\quad G_1\left(-1\right)=0. \tag{64}$$

Для решения задачи (56) – (64) используем формулы (22) – (24) ($j=1$). В результате получаем обыкновенное дифференциальное однородное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами $\left(L^3G_1=0\right.$, где $L=d^2/dz^2-m^2$, $\left.m=\alpha\delta_n\right)$, решение которого имеет вид (27) ($j=1$). Функция F_1 такова:

$$F_1=-\frac{1}{Pr}\left[\left(\frac{H_{12}}{2m}z+H_{13}\right)\operatorname{ch}mz+\left(\frac{H_{11}}{2m}z+H_{14}\right)\operatorname{sh}mz\right], \tag{65}$$

где $H_{1i}, i=1,2,..6$ — некоторые неизвестные постоянные.

Используя условия на свободной границе (60) – (63), с учетом (27), (65) получим:
— динамическое условие $3m^2F_{1z}-F_{1zzz}=m^4WeN_0$ —

$$H_{14}+mWePrN_0=0; \tag{66}$$

— условие касательных напряжений $m^2F_1+F_{1zz}=m^2\frac{M}{Pr}\left(N_0+G_1\right)$ —

$$H_{11}+2m^2H_{13}-m^2MH_{15}-m^2MN_0=0; \tag{67}$$

— условие теплового контакта $G_{1z}+Bi\left(G_1+N_0\right)=0$ —

$$-\frac{1}{8m^3}H_{12}+\frac{1}{2m}H_{14}+BiH_{15}+mH_{16}+BiN_0=0; \tag{68}$$

— кинематическое условие $F_1=0$ —

$$H_{13}=0. \tag{69}$$

Граничные условия (64) примут вид

$$\frac{t_1}{2m}H_{11}-\frac{1}{2m}H_{12}+H_{13}-t_1H_{14}=0,\quad t_1=\operatorname{th}m, \tag{70}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t_1}{m}\right)H_{11}+\frac{1}{2}\left(t_1+\frac{1}{m}\right)H_{12}-mt_1H_{13}+mH_{14}=0, \tag{71}$$

$$\frac{1}{8m^2}\left(1-\frac{t_1}{m}\right)H_{11}+\frac{1}{8m^2}\left(\frac{1}{m}-t_1\right)H_{12}+\frac{t_1}{2m}H_{13}-\frac{1}{2m}H_{14}+H_{15}-t_1H_{16}=0. \tag{72}$$

Полученная система из условий (66) – (72) также будет являться алгебраической относительно постоянных. Нетривиальное решение системы уравнений существует тогда и только тогда, когда ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это дает возможность найти критические числа Марангони. Аналитические вычисления в системе Maple показывают, что

$$M = \frac{8m\left(BiS_1 + mC_1\right)\left(m - S_1C_1\right)}{C_1m^3 - S_1^3 - 8C_1m^3\left(PrWe\right)^{-1}}, \tag{73}$$

где $S_1 = \operatorname{sh} m$; $C_1 = \operatorname{ch} m$.

Замечание 4. Если $a \to \infty$, $n \to \infty$ таким образом, что $m = \delta_n h_1/a \to m_0 = const$, то выражение (73) в точности совпадает с числом Марангони для бесконечного слоя [2].

Для (73) найдены следующие асимптотические формулы:
при $m_0 \to \infty$, $S_1 \sim e^{m_0}/2$, $C_1 \sim e^{m_0}/2$

$$M \sim 8m_0^2 \tag{74}$$

при $m_0 \to 0$, $S_1 \sim m_0 + m_0^3/6$, $C_1 \sim 1 + m_0^2/2$,

$$M \sim 24\left(Bi + 3\right). \tag{75}$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. К. Андрееву за постановку задачи и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН №38 и проекта РФФИ №11-01-00283.

Список литературы

[1] М.Абрамовица, И.Стиган Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, М., Наука, 1979.

[2] В.К.Андреев, В.Е.Захватаев, Е.А.Рябицкий. Термокапиллярная устойчивоть, Новосибирск, Наука, 2000.

The Loss of Stability Equilibrium between Two Liquids in Cylinder the Presence of Interface

Eugeny P. Magdenko

The arising convection problem in a two-layers cylindrical system was considered. To seek for it solution the method of variables separation was used. As result obtained the homogeneous differential equation of sixth order with constant coefficients of the complicated boundary conditions. For the case of weightlessness and the monotonic disturbances the analytical expression for the critical Marangoni numbers were found. It is proved that with increasing radius of the cylinder, these numbers tend to well-known Marangoni number for a system of two flat layers.

Keywords: interface, weightlessenss, critical Marangoni number.