Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(3), 422–429

УДК 517.55

Граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами

Барлыкбай Б. Пренов*
Каракалпакский государственный университет,
академика Ч.Абдирова, 1, Нукус, 742000,
Узбекистан

Получена 31.02.2012, окончательный вариант 31.03.2012, принята к печати 16.04.2012

Целью работы является изучение интеграла Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с коническими ребрами.

Ключевые слова: интеграл Бохнера-Мартинелли, области с коническими ребрами.

Данная работа посвящена изучению интеграла Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях пространства $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, граница которых содержит конические ребра и тем самым не является кусочно-гладкой. Для областей с кусочно-гладкой границей граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли хорошо изучено (см., например, [1]). В случае, когда граница области содержит одну коническую особую точку, интеграл Бохнера-Мартинелли был рассмотрен в работе [2]. В случае конических ребер этот интеграл изучался в [3], но при этом требовалась однородность самого ребра, что значительно сужало класс множеств. В нашем рассмотрении это требование отсутствует. Сначала введем класс поверхностей, которые мы будем изучать.

Будем отождествлять пространство $\mathbb{C}^n$ с пространством $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — комплексный n-мерный вектор из $\mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ — действительный $2n$-мерный вектор из $\mathbb{R}^{2n}$ и $z_j = x_j + ix_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$. Разделим переменные x_j на группы: $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_{2n-1})$, $q \geqslant 0$. Обозначим $d = 2n - 2 - q$, т.е. $d + q = 2n - 2$.

Пусть X — компактное замкнутое гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ размерности d, определяемое вещественнозначной функцией $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})$ со свойствами:

$$X = \{x'' \in \mathbb{R}^{d+1} : \rho(x'') = 0\}, \quad d\rho \neq 0 \quad \text{на} \quad X.$$

В отличие от работы [3] мы не требуем однородности функции ρ.

Фиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим множество

$$C_0 = \{(rx'', r) \in \mathbb{R}^{d+2} : x'' \in X,\ x_{2n} = r \in [0, \varepsilon_0]\}.$$

Тогда C_0 есть коническая гладкая поверхность размерности $d + 1$ в $\mathbb{R}^{d+2}$ с единственной особой точкой в нуле.

Мы также будем рассматривать пространство $\mathbb{C}^n$ в переменных $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и пространство $\mathbb{R}^{2n}$ в переменных $y = (y_1, \ldots, y_{2n})$, причем $w_j = y_j + iy_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда в переменных w

$$C_0 = \{(y'', y_{2n}) : y'' = rx'',\ y_{2n} = r,\ x'' \in X,\ r \in [0, \varepsilon_0]\}.$$

Определяющая функция поверхности C_0 имеет вид $\chi(y'', y_{2n}) = \rho\left(\dfrac{y''}{y_{2n}}\right)$, тогда

$$C_0 = \{(y'', y_{2n}) : \chi(y'', y_{2n}) = 0\}. \tag{1}$$

*prenov@mail.ru

Пусть W — ограниченная область в $\mathbb{R}^q$ и $y' \in W$. Обозначим $S = W \times C_0$ — гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$S = \{y = (y', y'', y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : \chi(y) = \chi(y'', y_{2n}) = 0,\ y' \in W\}. \tag{2}$$

Множество S является гладким многообразием с особым коническим ребром $\Pi = \{y = (y', 0, 0) \in W\}$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде

$$\partial D = \Sigma \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

где Σ является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S (с разными p и d), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса (см., например, [4]).

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N = 1$, т. е. $\partial D = \Sigma \cup S$, где S имеет вид (2).

Меру Лебега размерности q будем обозначать $d\Lambda_q$ и интегрировать по ней будем только на гладких частях многообразий. Функция $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ и $f \in \mathcal{L}^1(S \setminus \Pi)$.

Предложение 1. *Для меры Лебега гиперповерхности S справедливы оценки*

$$c_1 r^d dr\, d\Lambda_q(y')\, d\Lambda_d(y'') \leqslant d\Lambda_{2n-1}(y) \leqslant c_2 r^d dr\, d\Lambda_q(y')\, d\Lambda_d(y''), \tag{3}$$

где $c_1,\ c_2$ — некоторые константы, $0 < c_1 < c_2 < +\infty$.

Доказательство. Поскольку на ∂D мера $d\Lambda_{2n-1}(y)$ является прямым произведением мер $d\Lambda_q(y)$ и $d\Lambda_{d+1}(y)$, то для доказательства неравенств (3) достаточно доказать неравенства

$$c_1 r^d dr\, d\Lambda_d(y'') \leqslant d\Lambda_{d+1}(y'', y_{2n}) \leqslant c_2 r^d dr\, d\Lambda_d(y''), \tag{4}$$

где $d\Lambda_{d+1}(y'', y_{2n})$ — мера Лебега на гладкой части поверхности C_0 вида (1).

Зададим X локально параметризацией

$$\begin{cases} y_{q+1} = F_1(\theta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2n-1} = F_{d+1}(\theta), \end{cases} \tag{5}$$

где $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_d)$ изменяются на ограниченном открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^d$, а $F = (F_1, \ldots, F_{d+1})$ есть гладкое (класса $\mathcal{C}^1$) отображение из U в $\mathbb{R}^{d+1}$ максимального ранга d в U.

Пусть G_{C_0} — матрица Грама C_0, т.е.

$$G_{C_0} = \begin{pmatrix} 1 + (F, F) & r(F, F'_{\theta_1}) & \ldots & r(F, F'_{\theta_d}) \\ r(F'_{\theta_1}, F) & r^2(F'_{\theta_1}, F'_{\theta_1}) & \ldots & r^2(F'_{\theta_1}, F'_{\theta_d}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r(F'_{\theta_d}, F) & r^2(F'_{\theta_d}, F'_{\theta_1}) & \ldots & r^2(F'_{\theta_d}, F'_{\theta_d}) \end{pmatrix},$$

где

$$F'_{\theta_j} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_j}, \ldots, \frac{\partial F_{d+1}}{\partial \theta_j} \right),$$

а (F, F), $(F'_{\theta_j}, F'_{\theta_k})$ — скалярные произведения в $\mathbb{R}^{d+1}$ векторов F, F'_{θ_j}, F'_{θ_k}, $j, k = 1, \ldots, d$.

Тогда

$$d\Lambda_{d+1} = \sqrt{\det G_{C_0}}\, dr d\theta_1 \cdots d\theta_d.$$

С другой стороны, матрица Грама на X равна

$$G_X = \left(\left(F'_{\theta_j}, F'_{\theta_k}\right)\right)_{j,k=1}^{d}.$$

Поэтому

$$d\Lambda_{d+1} = \frac{\sqrt{\det G_{C_0}}}{\sqrt{\det G_G}} dr d\Lambda_d = \Phi(r,\theta) r^d dr d\Lambda_d,$$

а функция $\Phi(r,\theta)$ отлична от нуля на $[0,\varepsilon_0] \times U$. □

Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, точку $y_0 \in S$ назовем точкой Лебега для функции f, если

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-2n} \int\limits_{S \cap B(y_0,\varepsilon)} |f(y) - f(y_0)|\, d\Lambda_{2n-1} = 0,$$

где $B(y_0,\varepsilon)$ — шар с центром в точке y_0 радиусом ε.

Введем интегральный оператор Бохнера-Мартинелли

$$M[f](z) = \int\limits_{\partial D} f(w) U(w,z), \qquad z \neq \partial D, \qquad f \in \mathcal{L}^1(\partial D),$$

где ядро $U(w,z)$ имеет вид

$$U(w,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\bar{w}_j - \bar{z}_j}{|w-z|^{2n}}\, d\bar{w}[j] \wedge dw,$$

здесь $dw = dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_n$, а $d\bar{w}[j]$ получается из $d\bar{w}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{w}_j$.

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли

$$M_s[f](z) = \text{v.p.} \int\limits_{\partial D} f(w) U(w,z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(w) U(w,z), \qquad z \in \partial D.$$

Теорема 1. *Если $y_0 = (y'_0, 0, 0) \in \Pi$ — точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ и точка $z = x = (y'_0, 0, x_{2n})$ лежит на оси конуса, то*

$$\lim_{z \to y^0} \left[\int\limits_S (f(w) - f(y_0)) U(w,z) - \int\limits_{S \setminus B(y_0, |x_{2n}|)} (f(w) - f(y_0)) U(w,y_0) \right] = 0.$$

Данное утверждение является обобщением леммы Привалова на случай областей с коническими ребрами (см. теорема 2.6 из [1]). Для областей с однородными коническими ребрами оно содержится в [3].

Доказательство. Пусть y_0 лежит на коническом ребре Π. Можно считать, что $y_0 = 0$, а $\partial D = S$. Рассмотрим гиперплоскость $H = \{z \in \mathbb{C}^n : \ x_{2n} = 0\}$, проходящую через начало координат и ортогональную оси конуса. В окрестности 0 коническая поверхность S (в силу (5)) задается уравнениями

$$\begin{cases} y' = u', \\ y'' = u_{2n-1} F(\theta), \\ y_{2n} = u_{2n-1}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} z = (0', 0'', x_{2n}) \\ \zeta = (y', y'', y_{2n}) \\ w = (u', u'', 0), \\ \zeta = \zeta(w). \end{cases}$$

Более точно из (5) и из того, что $u'' = F(\theta)$ имеет максимальный ранг, получаем, что на X последняя координата $u_{2n-1} = \varphi(u_{q+1}, \ldots, u_{2n-2})$. Поэтому в представлении (6) получаем, что $y_{q+1} = u_{2n-1}u_{q+1}, \ldots, y_{2n-1} = u_{2n-1}\varphi(u_{q+1}, \ldots, u_{2n-2}), y_{2n} = u_{2n-1}$. Здесь переобозначена координата u_{2n} через u_{2n-1}.

Далее, по сути дела, доказательство идет так же, как доказательство теоремы 1 из [3].

Фиксируем $(2n-1)$-мерный шар B' с центром в нуле и радиусом $\varepsilon_0 > 0$ в H такой, что выполняется неравенство

$$|w - z| \leqslant c\,|\zeta(w) - z| \tag{7}$$

для всех $w \in B'$.

Для того чтобы увидеть, что константа $c > 0$ с данным свойством существует, заметим, что и коническая поверхность, и данная оценка инвариантны относительно растяжения (гомотетии), поэтому можно зафиксировать z. Для фиксированного z получим очевидное неравенство $|w-z| \leqslant c\,|z_\Pi - z| \leqslant c\,|\zeta(w)-z|$, где z_Π — проекция z на коническую поверхность в сечении конуса плоскостью, проходящей через три точки 0, z и w.

Положим $|z| = \varepsilon$. Запишем

$$\int_S (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z) - \int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, 0) =$$

$$= \int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)) + \int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z)$$

и оценим второй интеграл с правой стороны. Как и выше, имеем

$$c\,|\zeta(w) - z| \geqslant |w - z| \geqslant |z| = \varepsilon,$$

поэтому

$$\frac{1}{|\zeta(w) - z|^{2n-1}} \leqslant \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{2n-1}.$$

Отсюда

$$\left| \int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z) \right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{2n-1}} \int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(0)|\, d\Lambda_{2n-1}(\zeta) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, поскольку 0 — точка Лебега для функции f.

Вернемся к первому интегралу и рассмотрим коэффициенты дифференциальной формы $U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)$, для которых

$$\frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_j}{|\zeta|^{2n}} = \bar\zeta_j\left(\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta|^{2n}}\right) - \frac{\bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Последнее слагаемое в правой стороне легко оценивается, а именно:

$$\frac{|\bar z_j|}{|\zeta - z|^{2n}} \leqslant c^{2n}\,\frac{|z|}{|w - z|^{2n}} = c^{2n}\,\frac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}.$$

Первая разность оценивается так:

$$|\bar{\zeta_j}|\Big|\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}-\frac{1}{|\zeta|^{2n}}\Big| = |\bar{\zeta_j}|\,\frac{||\zeta|-|\zeta-z||}{|\zeta||\zeta-z|}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{|\zeta|^k|\zeta-z|^{2n-1-k}} =$$
$$= |z|\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{|\zeta|^k|\zeta-z|^{2n-k}}.$$

Так как $\zeta\notin B(0,\varepsilon)$ в первом интеграле, то получаем $|\zeta|\geqslant|w|$. Более того, дробь $\dfrac{|w|}{|w-z|}$ ограничена снизу положительной константой, поскольку это частное равно косинусу угла между векторами w и $w-z$, а этот угол не может быть близок к $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$|U(\zeta,z)-U(\zeta,0)|\leqslant C\,\frac{|z|}{(|w|^2+|z|^2)^n}\,d\Lambda_{2n-1}(\zeta)$$

для всех $\zeta\in S\setminus B(0,\varepsilon)$. По предложению 1 заключаем, что $d\Lambda_{2n-1}(\zeta)\leqslant c\Lambda_{2n-1}(w)$, где $\Lambda_{2n-1}(w)$ — форма объема для гиперплоскости H.

Поэтому

$$\Bigg|\int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)}(f(\zeta)-f(0))(U(\zeta,z)-U(\zeta,0))\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{H\setminus B(0,\varepsilon)}|f(\zeta(w))-f(0)|\,\frac{|z|}{(|w|^2+|z|^2)^n}\,\Lambda_{2n-1}(w)\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{H}|f(\zeta(w))-f(0)|\,\frac{|z|}{(|w|^2+|z|^2)^n}\,\Lambda_{2n-1}(w)$$

для некоторой константы C, не зависящей от ε.

Выражение $\dfrac{|z|}{(|w|^2+|z|^2)^n}$ есть ядро Пуассона для полупространства в $\mathbb{C}^n$ с точностью до постоянного множителя.

Так как 0 — точка Лебега для функции f, то лемма 2 из [2] показывает, что точка 0 является точкой Лебега для функции $f(\zeta(w))$ на H. Поэтому, применяя теорему 1.25 из [5], получаем, что последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to0$. □

Пусть $z\in\partial D$, обозначим $\tau(z)$ выражение

$$\tau(z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\mathrm{vol}\{\partial B(z,\varepsilon)\cap D\}}{\mathrm{vol}\{\partial B(z,\varepsilon)\}}.$$

Другими словами, $\tau(z)$ есть телесный угол касательного конуса к поверхности ∂D в точке z.

Особый интеграл Бохнера-Мартинелли тесно связан с телесным углом.

Лемма 1. *Для $z\in\partial D$ справедлива формула $M_s[1](z)=\tau(z)$.*

Доказательство данного утверждения полностью повторяет доказательство леммы 2.1 из [1] для областей с кусочно-гладкой границей.

Обозначим $m_z(f)(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на ∂D в точке $z\in\partial D$, т. е.

$$m_z(f)(\delta)=\sup_{\zeta\in\partial D\cap B(z,\delta)}|f(\zeta)-f(z)|.$$

Функция f на поверхности ∂D удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, если

$$\int_0^1 m_z(f)(\delta)\,\frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Отметим, что если функция f удовлетворяет условию Дини в точке z, то эта точка является точкой Лебега для f.

Приведем аналог формулы Сохоцкого-Племеля для особого интеграла Бохнера-Мартинелли.

Следствие 1. *Если $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, то особый интеграл Бохнера-Мартинелли $M_s[f](z)$ существует и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля*

$$\begin{aligned} M[f]^+(z) &= (1-\tau(z))f(z) + M_s[v](z), \\ M[f]^-(z) &= -\tau(z)f(z) + M_s[f](z), \end{aligned} \tag{8}$$

где $M^+[f](z)$ — граничное значение интеграла Бохнера-Мартинелли $M[f]$ изнутри области D, а $M^-[f](z)$ — граничное значение данного интеграла извне области.

Доказательство полностью повторяет доказательство формул Сохоцкого-Племеля из [1, § 2], используя теорему 1 и лемму 1. □

Сформулируем теорему о скачке для интегрируемых функций.

Теорема 2. *Пусть $z_0 \in \Pi$ — точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, тогда*

$$\lim_{z^\pm \to z_0} \big(M^+[f](z^+) - M^-[f](z^-)\big) = f(z_0), \tag{9}$$

где точки $z^\pm$ лежат на оси конуса в точке z_0 и $z^+ \in D$, $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, $|z^+| = |z^-|$.

Для функций, удовлетворяющих условию Дини, данное утверждение есть прямое следствие формул Сохоцкого-Племеля (8).

Для областей с гладкой границей теорема 2 приведена в [1, § 3], для областей с однородными коническими ребрами она доказана в [3].

Доказательство. Использование неравенства (7) позволяет применить схему доказательства теоремы о скачке из [1, теорема 3.1].

Пусть $\partial D = \Sigma \cup S$.

Рассмотрим точки из S, в которых нарушается гладкость. Пусть точка $z^0 \in S$ лежит на коническом ребре П. Можно считать, что $z^0 = 0$. Рассмотрим гиперплоскость $H = \{z \in \mathbb{C}^n : x_{2n} = 0\}$, проходящую через начало координат и ортогональную оси конуса. В окрестности 0 коническая поверхность S задается уравнениями (6), причем

$$\begin{cases} z^\pm = (0', 0'', \pm x_{2n}), \\ \zeta = (y', y'', y_{2n}), \\ w = (u', u'', 0), \\ \zeta = \zeta(w). \end{cases}$$

Фиксируем $(2n-1)$-мерный шар B' с центром в нуле и радиусом $\varepsilon_0 > 0$ в H такой, что выполняется неравенство

$$|w - z^\pm| \leqslant c\,|\zeta(w) - z^\pm| \tag{10}$$

для всех $w \in B'$, справедливость которого доказывается так же, как справедливость неравенства (7).

Рассмотрим разность

$$F^+(z^+) - F^-(z^-) = \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z^+) -$$
$$- \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z^-) + f(z^0) \int\limits_{\partial D} (U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)).$$

Так как

$$\int\limits_{\partial D} (U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 1,$$

нам достаточно доказать, что

$$\lim_{z^\pm \to z^0} \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0.$$

В интеграле

$$\int\limits_{\partial D \setminus B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-))$$

можно сделать предельный переход под знаком интеграла, поскольку $z^0 \notin \partial D \setminus B(0, \varepsilon_0)$

$$\lim_{z^\pm \to z^0} \int\limits_{\partial D \setminus B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0.$$

Осталось рассмотреть этот интеграл по множеству $S \cap B(0, \varepsilon_0)$.

$$\lim_{z^\pm \to z^0} \int\limits_{S \cap B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0. \tag{11}$$

Так как $B' = B(0, \varepsilon_0) \cap H$, то в силу неравенства (10), наложенного при выборе шара B', и очевидных неравенств $|\zeta(w)| \leqslant C|w| \leqslant C|w - z^\pm|$ получим

$$\begin{gathered}\left| \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| = \\ = \left| \frac{1}{|\zeta - z^+|} - \frac{1}{|\zeta - z^-|} \right| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{|\zeta_k|}{|\zeta - z^+|^i |\zeta - z^-|^{2n-i-1}} = \\ = ||\zeta - z^+| - |\zeta - z^-|| |\zeta_k| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{|\zeta - z^+|^{i+1} |\zeta - z^-|^{2n-i}} \leqslant \\ \leqslant cC^{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{|z^+| + |z^-|}{|w - z^+|^i |w - z^-|^{2n-i}}.\end{gathered} \tag{12}$$

Поэтому из (12) имеем

$$\left| \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| \leqslant \frac{d|z^\pm|}{|w - z^\pm|^{2n}},$$

где d зависит лишь от C, c. Точно так же

$$\left| \frac{\bar z_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar z_k}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\bar z_k|}{|\zeta - z^+|^{2n}} + \frac{|\bar z_k|}{|\zeta - z^-|^{2n}} \leqslant \frac{d_1|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}.$$

И, наконец, $d\,\Lambda_{2n-1}(\zeta) \leqslant d_2\, d\Lambda_{2n-1}(w)$ по предложению 1.

Рассмотрим интеграл

$$\left| \int\limits_{S\cap B(0,\epsilon_0)} (f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant d_3 \int\limits_{B'} \frac{|(f(\zeta(w)) - f(0))||z^+|}{(|w|^2 + |z^+|^2)^n}\, dS.$$

Выражение $\dfrac{|z^+|}{(|w|^2 + |z^+|^2)^n}$ есть (с точностью до константы) ядро Пуассона для полупространства. Так как 0 — точка Лебега функции f, то лемма 2 из [2] показывает, что точка 0 является точкой Лебега для функции $f(\zeta(w))$ на H. Поэтому, применяя теорему 1.25 из [5], получаем, что последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. □

Доказательство теоремы 2 показывает, что для непрерывных на ∂D функций f и точек, лежащих на ребре П, справедлива равномерная сходимость в формуле (9) по $z_0 \in$ П. Отсюда обычным образом получаем утверждение.

Следствие 2. *Если $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ и $M[f]$ непрерывно продолжается изнутри D на ∂D до функции $M^+[f]$, то функция $M[f]$ непрерывно продолжается извне D на ∂D до функции $M^-[f]$ и справедливо равенство*

$$M^+[f](z) - M^-[f](z) = f(z), \quad z \in \partial D.$$

Доказательство. Для точек гладкости $z \in \partial D$ это свойство хорошо известно (см. [1, гл. 1]). Для точек из П это следует из равномерной сходимости в формуле (9). □

Список литературы

[1] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.

[2] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, Сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками, *Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика*, **7**(2007), вып. 2, 17–32.

[3] Д.Х.Джумабаев, Формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами, *Журнал СФУ. Сер. математика и физика*, **4**(2011), вып. 1, 77–84.

[4] Л.Шварц, Анализ, М., Мир, 1972.

[5] И.Стейн, Г.Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.

The Boundary Behavior of the Bochner-Martinelli Integral in Domains with Conical Wedges

Barlykbay B. Prenov

The purpose of our paper is searching of the Bochner-Martinelli integral in bounded domains with conical wedges.

Keywords: Bochner-Martinelli integral, the domains with conical wedges.