УДК 512.54

О нижней критической нагрузке упругой цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Александр Н. Блинов*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 16.02.2012, окончательный вариант 16.03.2012, принята к печати 20.04.2012

В работе получена формула для вычисления приближенного значения нижней критической нагрузки при осевом сжатии круговой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. Проведено сравнение с результатами других авторов.

Ключевые слова: нижняя критическая нагрузка, цилиндрическая оболочка.

Введение

В исследованиях по устойчивости оболочек наибольшее внимание уделяется круговым цилиндрическим оболочкам. Оболочки такого очертания отвечают, как правило, требованиям наименьшего веса конструкции и простоты изготовления; поэтому они широко применяются в различных областях техники.

Выпучивание цилиндрических оболочек может произойти в тех случаях, когда они подвергаются внешнему силовому воздействию. В связи с этим остро встает вопрос о надежности конструкции на основе цилиндрических оболочек, что влечет за собой необходимость оценки разрушающих нагрузок и соответствующих коэффициентов запаса прочности конструкции, а также анализа поведения конструкций в аварийных ситуациях.

Задаче определения критических напряжений цилиндрических оболочек, сжатых осевыми силами, посвящено большое количество работ в нашей стране и за рубежом, авторами которых разрабатывались как общие, так и частные проблемы устойчивости[1–4]. Однако количество публикаций не соответствует степени разработки проблемы, которая еще значительно отстает от запросов практики.

Качественное поведение устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии описывает диаграмма равновесных состояний.

При возрастании нагрузки до верхнего критического значения оболочка совершает "хлопок". Оболочка теряет первоначальную форму, и в ней появляются вмятины. Обратный процесс состоит в падении нагрузки до нижнего критического значения и "выхлопа"оболочки с восстановлением формы.

Линейная постановка задачи позволяет найти приближенное значение верхней критической нагрузки. Для этого используется метод Эйлера, основанный на определении точек бифуркации (ветвления) из условия неединственности решения. Для нахождения приближенного решения используется метод Бубнова-Галеркина.

Эксперименты и наблюдения над реальными конструкциями показывают, что характер выпучивания сжатых оболочек на практике совсем не такой, каким он рисуется, если исходить из линейной теории. Критические напряжения в опытах получаются меньшими,

*ABlinov@sfu-kras.ru

чем в теории. Более полное решение этой задачи может быть осуществлено с помощью нелинейной теории оболочек.

В работе находится значение нижней критической нагрузки путем приближенного решения задачи в нелинейной постановке. Исследование показывает, что полученное значение нагрузки качественно описывает процесс потери устойчивости цилиндрической оболочки.

1. Постановка нелинейной задачи

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, подвергающаяся сжатию вдоль дуговых кромок равномерно распределенными усилиями P.

Предполагаем, что оболочка длиной L шарнирно оперта по торцам. Оболочка с радиусом кривизны поверхности R имеет толщину h. В качестве параметров, определяющих положение любой точки поверхности, возьмем цилиндрическую систему координат, где x и $y = R\varphi$ откладываются, соответственно, вдоль образующей и по дуге. Обозначим перемещения по координате z через $w(x, y)$. Прогибы w будем считать положительными, если они направлены к центру кривизны.

Система нелинейных уравнений, описывающих статическое поведение гибких упругих оболочек, имеет вид [1]

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}L\,(w, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\, x^2}, \tag{1}$$

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w = L\,(w, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $D = E\,h^3\,/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жёсткость, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона,

$$L\,(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},$$

$$L\,(w, w) = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]$$

Функция напряжения Φ связана с напряжениями в оболочке формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Краевые условия при шарнирном закреплении дуговых кромок при $x = \{0, L\}$ имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Краевые условия для функции напряжения Φ в напряжениях при $x = \{0, L\}$ имеют вид

$$\sigma_x = -p, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

2. Приближенное решение нелинейной задачи

Выберем в первом приближении выражение для w в виде

$$\bar{w} = f\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}.$$

Предположим, что в обоих направлениях образуется лишь по одной полуволне и $L = \pi R$, то есть оболочка короткая. Подставляя w в правую часть уравнения (1), получим уравнение 4-го порядка для функции напряжения Φ:

$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 f^2 \left[\cos^2\frac{\pi y}{L}\cos^2\frac{\pi x}{L} - \sin^2\frac{\pi y}{L}\sin^2\frac{\pi x}{L}\right] + \frac{1}{R} f \frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\,. \tag{3}$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{1}{E}\bar{\Phi} = \frac{1}{32} f^2 \left(\cos\frac{2\pi x}{L} + \cos\frac{2\pi y}{L}\right) + \frac{1}{4R} f \frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} - \frac{p\,y^2}{2E}\,. \tag{4}$$

Оно удовлетворяет уравнению, но граничные условия в напряжениях выполняются лишь в интегральном смысле, то есть при $x = \{0, L\}$:

$$\int\limits_0^{2\pi R} (\sigma_x - p) dy = 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi R} \sigma_{xy} dy = 0.$$

Для приближенного решения уравнения (2) воспользуемся методом Бубнова-Галеркина и составим уравнение первого приближения:

$$\int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} \left[\frac{D}{h}\nabla^4 \bar{w} - L\left(\bar{w}, \bar{\Phi}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2}\right] \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} dx dy = 0. \tag{5}$$

Подставим $\bar{\Phi}, \bar{w}$ в (5) и выполним интегрирование, получим уравнение для определения критической нагрузки

$$\frac{\pi^2}{32\,R^2} E f^2 - \frac{5}{6R} E f + \frac{\pi^2}{16} E + \frac{\pi^2}{R^2\,h} D - \frac{\pi^2}{4} p = 0. \tag{6}$$

Если устремить $f \to 0$, то прогиб оболочки стремится к нулю, тогда получим формулу

$$p_B = D\frac{4}{h\,R^2} + E\frac{1}{4}. \tag{7}$$

Если учесть сделанные ранее предположения, то она полностью совпадает со значением критической нагрузки, полученной при решении линейной задачи.

Наименьшее значение этой нагрузки называется верхней критической нагрузкой, и при коэффициенте Пуассона $\mu = 0{,}3$ это значение равно

$$p_B \approx 0,605\frac{Eh}{R}.$$

Если обозначить $\bar{p} = pR/Eh$, то получим

$$\bar{p}_B \approx 0,605.$$

Если ввести безразмерные параметры $\xi, \hat{p}, k$, характеризующие прогиб, сжимающее усилие и кривизну оболочки

$$\xi = \frac{f}{h}, \quad \hat{p} = \frac{p\,\pi^2}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2, \quad k = \frac{R\,\pi^2}{h},$$

то формула (6) для нахождения критической нагрузки запишется в виде

$$\hat{p} = \frac{\pi^2}{3\,(1-\mu^2)} + \frac{k^2}{4\,\pi^2} + \frac{\pi^2}{8}\xi^2 - \frac{10}{3\,\pi^2} k\xi\,.$$

Наименьшая критическая нагрузка называется нижней критической нагрузкой. Для этого найдем минимум $\hat{p}$ по параметру ξ. В результате получим

$$\hat{p}_H = \frac{\pi^2}{3\,(1-\mu^2)} + \frac{k^2}{4\,\pi^2} - \frac{200}{9\,\pi^6}\,k^2\,. \tag{8}$$

Обозначим $\bar{p} = \hat{p}/k$. Тогда получим формулу для вычисления нижней предельной нагрузки в виде

$$\bar{p}_H = \frac{\pi^2}{3\,(1-\mu^2)\,k} + \frac{k}{4\,\pi^2} - \frac{200k}{9\,\pi^6}\,. \tag{9}$$

Значение критических нагрузок зависит от параметра k, то есть от отношения R/h.

Решение задачи с позиции нелинейной теории впервые было дано Карманом и Цянь Сюэсэнем [3]. Оно состоит в выборе аппроксимирующего выражения для прогиба w, содержащего несколько варьируемых параметров. Было получено значение нижней критической нагрузки $\bar{p}_H = 0,194$. П.Г. Бурдин получил значение нижней критической нагрузки, равное $\bar{p}_H = 0,186$. В перечисленных выше решениях $\bar{p}_H$ оказывался не зависящим от отношения R/h. Однако С.А. Алексеев [4], пользуясь методом последовательных приближений, пришел к иному выводу, состоящему в том, что величина $\bar{p}_H$ падает с возрастанием R/h. Такая неопределенность найденных значений свидетельствует о большой чувствительности результатов приближенного решения к методике расчета.

Нагрузка, приложенная к цилиндрической оболочке, связана с безразмерной нагрузкой соотношением $p = \bar{p}E\pi^2/k$. Следовательно, из выражения (9) получим

$$p_H = \frac{Eh^2}{3\,(1-\mu^2)\,R^2} + \frac{E}{4} - \frac{200E}{9\,\pi^4}\,.$$

Полученная нижняя критическая нагрузка зависит от отношения R/h и с его ростом уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00717).

Список литературы

[1] I.N.Herstein, Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 1104–1110.

[2] J.Zhang, W.Yu, Jordan derivations of triangular algebras, *Linear Algebra Appl.*, **419**(2006), 251–255.

[3] J.M.Cusack, Jordan derivations on rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**(1975), №2, 321–324.

[4] N.Nader, M.Ghosseiri, Jordan derivations of some classes of matrix rings, *Taiwanese J. of Math.*, **11**(2007), №1, 51–62.

On the Lower Critical Load of the Elastic Cylindrical Shell with Axial Compression

Alexander N. Blinov

A formula for calculating an approximate value of the lower critical load under axial compression of a circular cylindrical shell in a nonlinear formulation were obtained in this paper. A comparison with results obtained by other authors were done.

Keywords: lower critical load, elastic cylindrical.