

УДК 538.94

## Теплофизические свойства квантово-статистических систем с дробно-степенным спектром

Заур З. Алисултанов\*

Руслан П. Мейланов†

Дагестанский государственный университет  
Дзержинского, 12, Махачкала, 367025,

Россия

---

Получена 03.12.2011, окончательный вариант 23.02.2012, принята к печати 10.03.2012

*Исследовано уравнение состояния для систем, обладающих дробно-степенным спектром. Получено соотношение между энергией, давлением и объемом для систем, обладающих дробно-степенным спектром. Рассмотрена дробно-дифференциальная модель электрон-фононного взаимодействия.*

*Ключевые слова: дробные производные, уравнение состояния, нелокальность.*

---

### Введение

Системы с гамильтонианом, содержащим неквадратичную степень импульса, в последнее время все больше привлекают внимание исследователей. Это связано, прежде всего, с тем, что в реальных системах, вследствие их неидеальности, почти никогда не реализуются квадратичные зависимости энергии от импульса. Неквадратичная зависимость энергии от импульса приводит к достаточно интересным эффектам. Еще Кагановым было отмечено [1], что в случае неквадратичной зависимости энергии электрона от импульса период обращения электронов в магнитном поле, а следовательно и резонансная частота, зависят от приложенного электрического поля. Этот эффект, как указал Каганов, можно использовать для анализа формы изоэнергетических поверхностей в полупроводниках. Интересные результаты были получены в работе [2], где рассматривались высокочастотные электромагнитные явления в полупроводниках с неквадратичным законом дисперсии носителей тока. В работе [3] была рассмотрена электронная хаотичность в одномерной сверхрешетке. Хаотичность была обусловлена неквадратичным законом дисперсии. А в работе [4] исследованы нелинейные электромагнитные волны в стохастизированном электронном газе с неквадратичной зависимостью энергии от импульса и показано, что отклонение от квадратичной зависимости приводит к замедлению волн.

Другой фактор, усиливающий интерес к системам с неквадратичной зависимостью энергии от импульса, связан с проникновением в физику идей так называемого дробного исчисления, основанного на математическом аппарате интегрирования дробного порядка [5, 6]. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, характерно отклонение от квадратичной зависимости энергии от импульса и наличие нелокальности дробно-степенного характера. Такое отклонение приводит, в частности, к распределениям вероятностей дробно-степенного типа. Эти распределения оказываются необычайно устойчивыми [7, 8]. Следует отметить, что нелокальные взаимодействия степенного типа рассматривались еще в работах Дайсона в применении к фазовым переходам в

---

\*zaur0102@gmail.com

†lanten50@mail.ru

ферромагнетиках [9–11]. В работе [12] изучались нелокальные взаимодействия такого типа в кристаллической решетке и были получены дробные кинетические уравнения. Особенности дробной квантовой механики рассматривались в работах [13–16], где было проведено исследование систем с гамильтонианами, содержащими нецелую степень импульса.

Наконец, следует отметить, что полученная недавно двумерная модификация атомов углерода — графен [17] — является системой с гамильтонианом, содержащим неквадратичную степень импульса. Действительно, электроны графена обладают линейным законом дисперсии [18].

Идея дробно-степенной зависимости энергии от импульса лежит также в основе работ [19, 20], где подробно был рассмотрен вопрос о возможном способе введения и физической интерпретации дробного интегрирования в квантовой статистической физике. Эта идея развивается также и в настоящей работе. Исходным пунктом исследований является дробное уравнение для функции Грина, рассмотренное в работе [20] и имеющее следующий вид:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \nabla_1^\alpha \right] G(1, 1') = \delta(1 - 1'), \quad (1)$$

где 1 означает  $r_1 t_1$ ,  $1' = r_1' t_1'$ . Здесь и ниже предполагается, что  $\hbar = 2m = 1$ , и используются безразмерные переменные времени  $t = \tau/\tau_0$  и координаты  $r = s/s_0$ , а  $\tau_0$  и  $s_0$  — некоторые характерные время и длина системы.  $\nabla_1^\alpha$  — дробная производная Рисса, определенная как [21]

$$\nabla_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi}{2}(2-\alpha))} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{|x-\xi|^{\alpha-1}},$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ . В работе [20] также были сформулированы условия, при которых уравнение (1) имеет место. Система, описываемая уравнением (1), обладает дробно-степенным спектром

$$\omega = |p|^\alpha, \quad (2)$$

где  $p$  — безразмерная переменная, связанная с размерной соотношением  $p = q/q_0$ ,  $q_0$  — некоторый характерный импульс системы. В дальнейшем будем пользоваться системой единиц, в которой  $\frac{q_0^2}{2m} = q_0 = 1$ .

## 1. Уравнение состояния для системы, описываемой уравнениями дробного порядка

Уравнение состояния для системы, обладающей спектром (2), получено в работе [20] и имеет вид

$$P = \frac{1}{\beta} n + 2 \frac{1}{\beta} e^{\beta\mu} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( 1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)} \right) e^{-\beta|p|^\alpha}, \quad (3)$$

где  $P$  — давление,  $p$  — импульс,  $\beta = 1/kT$ ,  $\mu$  — химический потенциал,  $n$  — концентрация идеального газа, т.е. газа, обладающего спектром (2) при  $\alpha = 2$ . Из уравнения (3) видно, что учет степенной функции импульса в законе дисперсии приводит, в конечном итоге, к появлению некоторого добавочного давления в уравнении состояния, то есть фактически учитывает взаимодействие между частицами. Функция распределения, определяющая это добавочное давление, в сущности, представляет собой распределение Вейбулла (растянутая экспонента), которое тесно связано с фрактальными свойствами системы [22]. Это добавочное давление равно нулю при  $\alpha = 2$ , и мы приходим к уравнению состояния идеального газа. Исследуем уравнение (3). Попытаемся сделать некоторые общие замечания относительно характера этого взаимодействия. Уравнение (3), записанное в виде

$$P - I_\alpha = \frac{N}{V} kT, \quad (4)$$

где  $I_\alpha = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)}\right) e^{-\beta|p|^\alpha}$ , очень похоже на уравнение Ван-дер-Ваальса, которое, однако, не содержит информации о конечности размеров частиц. Это связано с тем, что рассмотренная аппроксимация не учитывает столкновений и того факта, что частицы не могут проникать друг в друга. Если пренебречь эффектами конечности размеров частиц, то уравнение Ван-дер-Ваальса может быть записано как

$$P - \frac{N^2 a}{V^2} = \frac{N}{V} kT.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4), получим

$$n^2 a = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)}\right) e^{-\beta|p|^\alpha}.$$

С целью получения выражения для химического потенциала прибегнем к приближению, а именно будем использовать выражение для химического потенциала больцмановского идеального газа. Это приближение во многих случаях оправдано [23]. Химический потенциал больцмановского газа с точностью до несущественных постоянных величин есть величина, равная [23]

$$\mu = \beta^{-1} \ln \left[ \frac{N}{V} \beta^{3/2} \right].$$

Тогда имеем

$$na = 2\beta^{1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)}\right) e^{-\beta|p|^\alpha}.$$

Для конкретных вычислений необходимо перейти к размерным величинам. В системе единиц, в которой  $q_0^2/2m \neq 1$ ,  $q_0 \neq 1$ ,  $\hbar \neq 1$ , интеграл  $I_\alpha$  записывается как

$$I_\alpha = 2\frac{q_0^3}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 - e^{-\beta\frac{q_0^2}{2m}(p^2 - |p|^\alpha)}\right) e^{-\beta\frac{q_0^2}{2m}|p|^\alpha}.$$

А в размерных переменных

$$I_\alpha = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 - e^{-\beta\frac{q_0^2}{2m}(q_0^{-2}q^2 - q_0^{-\alpha}|q|^\alpha)}\right) e^{-\beta\frac{q_0^{2-\alpha}}{2m}|q|^\alpha}. \quad (5)$$

Тогда для постоянной Ван-дер-Ваальса получим следующее выражение, связывающее её с параметром  $\alpha$ :

$$n^2 a = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 - e^{-\beta\frac{q_0^2}{2m}(q_0^{-2}q^2 - q_0^{-\alpha}|q|^\alpha)}\right) e^{-\beta\frac{q_0^{2-\alpha}}{2m}|q|^\alpha}.$$

Химический потенциал больцмановского газа в размерных переменных имеет вид [23]

$$\mu = \beta^{-1} \ln \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m} \beta \right)^{3/2} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta^{1/2}}{n} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 - e^{-\beta\frac{q_0^2}{2m}(q_0^{-2}q^2 - q_0^{-\alpha}|q|^\alpha)}\right) e^{-\beta\frac{q_0^{2-\alpha}}{2m}|q|^\alpha} = \\ &= \frac{\beta^{-1}}{n\alpha(\pi)^{3/2}} \left[ \left( \frac{q_0^2}{2m\beta^{-1}} \right)^{\frac{6-3\alpha}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Это соотношение связывает взаимодействие частиц между собой, которое определяется постоянной Ван-дер-Ваальса с параметром  $\alpha$ . Это соотношение очень важно с точки зрения

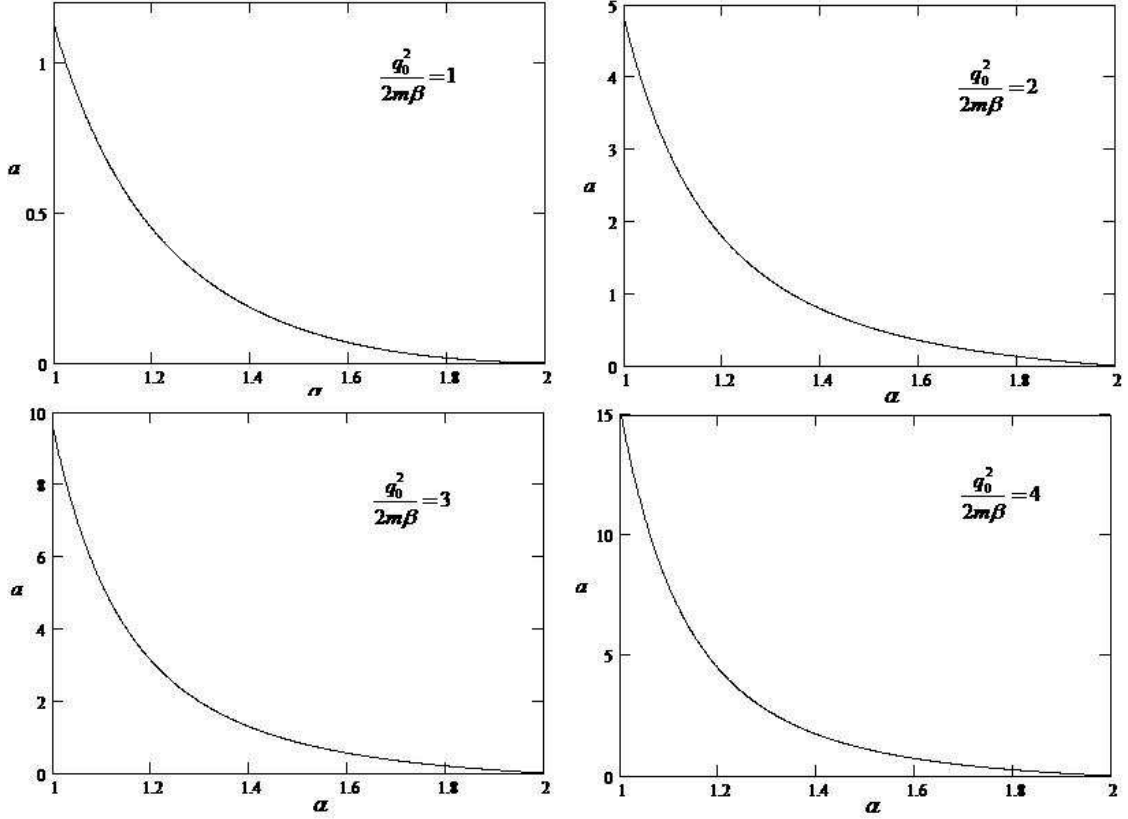


Рис. 1. Зависимость постоянной Ван-дер-Ваальса  $a$  от параметра  $\alpha$ . При построении кривых условно принято, что  $\frac{\beta^{-1}}{n(\pi)^{3/2}} = 1$ . Каждому значению постоянной Ван-дер-Ваальса  $a$  ставится в соответствие одно значение параметра  $\alpha$ , т.е. системы с различными  $a$  можно описать уравнением состояния (9) (с параметрами  $\alpha$ , соответствующим этим  $a$ ), которое является следствием спектра (2), а следовательно, и уравнения (1)

возможности описания реальных систем методом дробного интегрирования, который осуществляется с помощью уравнения (1) через спектр (2). На рис. 1 приведена эта зависимость.

Для того чтобы получить какие-нибудь сведения о потенциале взаимодействия частиц газа, будем действовать следующим образом. В работе [25] показано, что система взаимодействующих фермионов в приближении Хартри описывается уравнением состояния

$$P - \frac{1}{2}n^2v = \frac{N}{V}kT,$$

где  $v = \int V(r)dr$  — самосогласованное поле всех частиц,  $v = V(r)$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц. Сравнивая последнее уравнение с уравнением (3), получим в размерных переменных

$$\frac{1}{2}n^2v = \frac{n\beta^{-1}}{\alpha(\pi)^{3/2}} \left[ \left( \frac{q_0^2}{2m\beta^{-1}} \right)^{\frac{6-3\alpha}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right],$$

или

$$v = \frac{2\beta^{-1}}{n\alpha(\pi)^{3/2}} \left[ \left( \frac{q_0^2}{2m\beta^{-1}} \right)^{\frac{6-3\alpha}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right], \quad (6)$$

или

$$\int V(r)dr = \frac{2\beta^{-1}}{n\alpha(\pi)^{3/2}} \left[ \left( \frac{q_0^2}{2m\beta^{-1}} \right)^{\frac{6-3\alpha}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right].$$

Это соотношение связывает самосогласованное поле с параметром  $\alpha$ .

В конце укажем на один интересный момент. Знак энергии взаимодействия, как видно из (6), определяется выражением в скобках, а следовательно температурой  $\beta^{-1}/k$ . Приведенные выше выражения и построенные кривые показывают, что постоянная Ван-дер-Ваальса есть положительное число, т.е. взаимодействие частиц носит отталкивающий характер. Однако такая ситуация, как оказалось, имеет место не всегда. Действительно, чтобы такая ситуация сохранялась, тепловая энергия  $\beta^{-1}$  должна быть меньше характеристической энергии  $q_0^2/2m$ , т.е.  $q_0^2/2m\beta^{-1} \geq 1$ . Это условие определяет температуры, для которых справедливы вышеприведенные кривые.

$$T \leq \frac{q_0^2}{2mk}.$$

Однако если это условие не выполняется, то система существенно изменяется. Это изменение прежде всего заключается в изменении характера взаимодействия частиц. Оно становится отрицательным, т.е. частицы притягиваются. Физически такое поведение можно, по-видимому, объяснить следующим образом. Выразим характеристический импульс  $q_0$  через характеристическую длину согласно соотношению  $q_0 = \hbar/l_0$ . Взаимодействие между частицами зависит от расстояния между частицами. Пусть  $l_0$  есть расстояние, при котором энергия взаимодействия меняет знак с положительного на отрицательный. При  $r = l_0$ , очевидно, энергия взаимодействия равна нулю. Такая ситуация действительно имеет место в реальных атомарных и молекулярных газах [24]. С какой стороны от  $l_0$  будет среднее расстояние между частицами, определяется тепловой энергией. При малых температурах  $T \leq \hbar^2/2ml_0^2k$  частицы не разлетаются на большие расстояния и среднее расстояние между частицами остается меньше характеристической длины  $l_0$ , следовательно, энергия взаимодействия носит отталкивающий характер. При температурах  $\hbar^2/2ml_0^2k < T$  наблюдается обратная картина.

## 2. Соотношение между энергией, давлением и объемом

Представляет интерес вывести соотношение между энергией, давлением и объемом для системы с дробно-степенным спектром. В дальнейшем нас будут интересовать лишь качественные зависимости определяемых величин. Поэтому пренебрежем несущественными постоянными множителями в последующих выражениях. Там, где возникнет необходимость оставить постоянные члены, это будет специально оговорено. В работе [20] было показано, что для системы с дробно-степенным спектром плотность состояний имеет вид

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\alpha} \omega^{\frac{D}{\alpha}-1},$$

где  $D$  — размерность ( $D = 1, 2, 3$ ) фазового пространства. Параметр  $alpha$  не является несущественным, поэтому он будет сохранен во всех выражениях. Рассмотрим трехмерную структуру. Тогда

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\alpha} \omega^{\frac{3}{\alpha}-1}.$$

Число частиц с энергией в промежутке от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  при этом есть величина

$$dN = \frac{V \omega^{\frac{3}{\alpha}-1} d\omega}{\alpha \exp[\beta(\omega - \mu)] + 1}. \quad (7)$$

Величины  $\beta$  и  $\mu$  определяют термодинамическое состояние системы и поэтому не могут быть опущены. В последнем выражении мы опустили также и спиновую постоянную. Заметим,

что все приводимые в этом пункте формулы имеют совершенно аналогичный вид для обеих статистик Ферми и Бозе, отличаясь лишь знаком в знаменателе выражения (7). Так, для бозе-газа будем иметь следующее выражение:

$$dN = \frac{V\omega^{\frac{3}{\alpha}-1}d\omega}{\alpha \exp[\beta(\omega - \mu)] - 1}.$$

Интегрируя выражение (7), по энергии получим полное число частиц в газе:

$$N = \frac{V}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{\frac{3}{\alpha}-1}d\omega}{\exp[\beta(\omega - \mu)] + 1}.$$

Вводя переменную интегрирования  $z = \beta\omega$ , имеем

$$\frac{N}{V} = \frac{\beta^{-\frac{3}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{3}{\alpha}-1}dz}{\exp[z - \beta\mu] + 1}.$$

Эта формула определяет химический потенциал  $\mu$  как функцию от температуры  $\beta^{-1}$  и плотности  $N/V$ . Для большого термодинамического потенциала имеем

$$\Omega = -\frac{V\beta^{-1}}{\alpha} \int_0^{\infty} \omega^{\frac{3}{\alpha}-1} \ln(1 + \exp[\beta(\mu - \omega)]) d\omega.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\Omega = -\frac{\alpha V}{3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{\frac{3}{\alpha}}d\omega}{\exp[\beta(\omega - \mu)] + 1} d\omega. \quad (8)$$

Найдем с помощью выражения (7) полную энергию системы:

$$E = \int \omega dN = \frac{V}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{\frac{3}{\alpha}}d\omega}{\exp[\beta(\omega - \mu)] + 1}. \quad (9)$$

Выражение (8) с точностью до множителя  $-\frac{\alpha}{3}$  совпадает с выражением (9). Имея в виду также, что  $\Omega = -PV$ , получим выражение

$$PV = \frac{\alpha}{3} E.$$

Интересно отметить, что значение коэффициента при тепловой энергии определяется степенью зависимости энергии от импульса в законе дисперсии. При  $\alpha = 2$  получаем соотношение для состояния идеального газа.

### 3. Дробно-дифференциальная модель электрон-фотонного взаимодействия

Рассмотрим с помощью того же подхода проблему электрон-фононного взаимодействия. Модель, учитывающая электрон-фононное взаимодействие строится исходя из квадратичной зависимости энергии от импульса и дает для амплитуды взаимодействия зависимость от импульса [26]

$$\Phi(Q) \cong q^{1/2}.$$

Однако эта модель не учитывает всех деталей и различных механизмов электрон-фононного взаимодействия [27–29] и с целью улучшения совпадений с экспериментальными данными эту функцию видоизменяют, а именно меняют степень зависимости от импульса уже на чисто феноменологическом уровне [26]. Представляет интерес рассмотреть дробно-дифференциальную модель электрон-фононного взаимодействия. При этом мы воспользуемся элементарным подходом к данной проблеме, осуществленным в работе [26]. Рассмотрим систему взаимодействующих ионов и электронов. Ионы расположены в узлах кристаллической решетки, а электроны считаются с известной степенью точности свободными. Исходным пунктом рассмотрения служит дробное уравнение для функции Грина (1). Как было сказано, системы, описываемые такими уравнениями, обладают спектром (2). С учетом этого полная энергия для таких систем может быть записана в виде

$$E = |p|^\alpha + U(r), \quad (10)$$

$U(r)$  — потенциальная энергия ионов, или в размерных переменных

$$E = \frac{q_0^{2-\alpha}}{2M} |q|^\alpha + U(r). \quad (11)$$

Обычно ионы представляют в виде гармонических осцилляторов. В данном случае, когда зависимость от импульса становится дробно-степенной, с большей вероятностью можно ожидать отклонения от гармонического закона. В связи с этим рассмотрим данную задачу в общем виде, следуя работе [30], где рассматривался класс гамильтонианов типа

$$H = |p|^\alpha |r|^{\alpha'} + |r|^\beta |p|^{\beta'}.$$

Возьмем случай, когда  $\alpha' = \beta' = 0$ . Тогда имеем следующий гамильтониан:

$$H = |p|^\alpha + |r|^\beta.$$

С учетом этого перепишем выражение для полной энергии в виде

$$E = \frac{q_0^{2-\alpha}}{2M} |q|^\alpha + \frac{k}{2} |r|^\beta, \quad (12)$$

где  $k$  — константа упругости. С учетом (12) полная энергия волны отклонений узлов решетки от положения равновесия представится в виде

$$E = \int \frac{q_0^{2-\alpha}}{2M} n \left| M \frac{\partial \xi_q}{\partial t} \right|^\alpha dr + \int \frac{k}{2} |\Delta \xi_q|^\beta dr.$$

Волна отклонений узлов  $\Delta \xi_q$  от положения равновесия связана с градиентом соотношением

$$\Delta \xi_q = \xi_q(r+a) - \xi_q(r) = a \frac{\partial \xi_q}{\partial r}.$$

С учетом этого окончательно получаем

$$E = \frac{q_0^{2-\alpha}}{2} n M^{\alpha-1} \int \left| \frac{\partial \xi_q}{\partial t} \right|^\alpha dr + \int \frac{\chi}{2} \left| \frac{\partial \xi_q}{\partial r} \right|^\beta dr. \quad (13)$$

Если представить волну отклонений в виде стандартной экспоненты  $\xi_q = A b_q^\dagger e^{-i\omega t + \frac{i}{\hbar} q r}$ , где  $A$  — амплитуда отклонений,  $b_q^\dagger$  — оператор рождения фонона, то

$$E = \frac{q_0^{2-\alpha}}{2} n M^{\alpha-1} A^\alpha \omega^\alpha V + \frac{\chi}{2} \left( \frac{q}{\hbar} \right)^\beta A^\beta V.$$

Так как энергия фонона есть  $\hbar\omega$ , а также  $\hbar\omega = cq$  и  $c^2 = \frac{\chi}{nM}$ , то получаем выражение, которое определяет зависимость амплитуды от импульса:

$$cq = \frac{q_0^{2-\alpha}}{2} nM^{\alpha-1} A^\alpha (cq)^\alpha V + \frac{c^2 nM}{2} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^\beta A^\beta V. \quad (14)$$

В случае квадратичного гамильтониана, т.е. когда  $\alpha = \beta = 2$ , получаем известный результат [26]

$$A(q) = \gamma \frac{1}{\sqrt{nMcqV}},$$

где  $\gamma = \hbar$ .

Рассмотрим  $\alpha = \beta$ . В этом случае из (14) получаем более общую зависимость амплитуды взаимодействия от импульса

$$A(q) = \gamma' (MnVc^{\alpha-1})^{-1/\alpha} q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$\text{где } \gamma' = \left[ \frac{1}{2} (q_0^{2-\alpha} M^{\alpha-2} + c^{2-\alpha}) \right]^{-1/\alpha} \hbar.$$

Амплитуда электрон-фононного взаимодействия определяется амплитудой волны отклонения  $\xi_q$  возмущенной плотности узлов решетки  $n_q(r, t)$  от равновесного значения  $n$ ,  $n_q(r, t) = n(r, t) - n \cong n$ . Последняя же пропорциональна градиенту  $\partial \xi_q / \partial r$ . Тогда получим

$$n_q(r, t) = \text{const} (MnVc^{\alpha-1})^{-1/\alpha} q^{\frac{1}{\alpha}} \left( b_q^+ \exp \left( -i\omega t + \frac{i}{\hbar} qr \right) + k.c. \right).$$

С учетом этого выражения для гамильтониана взаимодействия электронного газа с возникшим колебанием решетки можно получить следующее выражение:

$$H_{ef} = \sum_{pq} \text{const} \cdot q^{\frac{1}{\alpha}} (a_{p-q}^+ a_p b_q^+ + a_{p+q}^+ a_p b_q),$$

которое, дополненное гамильтонианом свободных частиц, представляет собой известное выражение гамильтониана Фрелиха, но с амплитудой электрон-фононного взаимодействия

$$\Phi(q) \cong q^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (15)$$

Выражение (14) представляет собой широкий класс зависимостей  $A(q)$ , который позволяет интерпретировать результаты реальных экспериментов, варьируя только параметром  $\alpha$ .

Различные модели электрон-фононного взаимодействия особенно интересны в теории сверхпроводимости. Действительно, амплитуда электрон-фононного взаимодействия является важным параметром, который определяет критическую температуру перехода в сверхпроводящее состояние. Известно, что классическая теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), будучи идеализированной моделью, не может адекватно описать свойства всех традиционных сверхпроводников, допуская серьёзные ошибки, к примеру, при расчёте параметров диборида магния — необычного соединения, имеющего очень высокую температуру перехода. Проблема заключается в том, что БКШ не распространяется на случай сильного электрон-фононного взаимодействия. "Улучшенный" вариант БКШ, предложенный Герасимом Элиашбергом, позволяет получать более точные формулы для расчёта критической температуры. Так, например, физики решили уравнения Элиашберга сразу в двух экзотических случаях: для чистого и для допированного графена. Поскольку в чистом графене уровень Ферми лежит в дираковской точке [31], здесь нужно говорить о "многозонном" спаривании, в котором принимают участие частицы из обеих зон [32]. Допирование графена подразумевает гораздо более эффективное спаривание, в котором участвуют частицы, принадлежащие только одной зоне. В связи со сказанным можно заключить,



что в случае графена и других объектов, где реализуются условия высокотемпературной сверхпроводимости, представляется интересным применить дробно-дифференциальную модель сверхпроводимости, параметром которой будет более общее выражение (15), из которого следует, что амплитуда электрон-фононного взаимодействия при  $1 < \alpha < 2$  больше, чем в случае  $\alpha = 2$ . Некоторые попытки описания высокотемпературной сверхпроводимости с помощью спектра (2) были предприняты в работах [33, 34].

## Заключение

Резюмируя сказанное, можно основные результаты данной работы записать так.

1. Проведено исследование уравнения состояния для систем с дробно-степенным спектром. Получено соотношение между постоянной Ван-дер-Ваальса и порядком дробной производной.

2. Рассмотрена дробно-дифференциальная модель электрон-фононного взаимодействия, которая, на наш взгляд, могла бы стать интересной при интерпретации результатов реальных экспериментов. Данная модель приводит к сравнительно большим значениям константы электрон-фононного взаимодействия, а следовательно, интересна при описании высокотемпературной сверхпроводимости.

## Список литературы

- [1] В.М.Даниленко, М.А.Кривоглаз, Л.Н.Лириков, А.А.Смирнов, Украинское совещание по теории металлов и сплавов, *УФН*, **70**(960), №1, 191–198.
- [2] Ф.Г.Басс, Е.А.Рубинштейн, *ФТТ*, **19**(1977), №5, 1379–1388.
- [3] F.G.Bass, V.V.Konotor, A.P.Panchekha, *JETP*, **99**(1989), №6, 1055–1060.
- [4] F.G.Bass, A.D.Panchekha, *JETP*, **99**(1991), №6, 1711–1717.
- [5] R.Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2000.
- [6] В.В.Учайкин, *Метод дробных производных*, Ульяновск, Изд-во "Артишок", 2008.
- [7] В.В.Учайкин, *ЖЭТФ*, **124**(2003), 903–920
- [8] А.А.Станиславский, *ТМФ*, **138**(2004), №3, 491–507.
- [9] F.J.Dyson, *Communication in Mathematical Physics*, **12**(1969), №2, 91–107
- [10] F.J.Dyson, *Communication in Mathematical Physics*, **12**(1969), №3, 212–215.
- [11] F.J.Dyson, *Communication in Mathematical Physics*, **21**(1971), №4, 269–283.
- [12] N.Laskin, G.Zaslavsky, *Physica A*, **368**(2006), 38–54.
- [13] В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов, *P-адический анализ и математическая физика*, М., Наука, 1994.
- [14] N.Laskin, *Physics Letters A*, **268**(2000), 298–305.
- [15] N.Laskin, *Physical Review E*, **62**(2000), №3, 3135–3145.
- [16] В.М.Елеонский, В.Г.Королев, Н.Е.Кулагин, *Письма в ЖЭТФ*, **76**(2002), вып. 12, 859–862.

- [17] A.H.Castro Neto, F.Guinea, N.M.R.Peres, K.S.Novoselov, A.K.Gaim, *Rev. Mod. Phys.*, **81**(2008), №1, 109–162.
- [18] K.S.Novoselov et al., *Nature*, **438**(2005), 197–200.
- [19] З.З.Алисултанов, Р.П.Мейланов, *Нелинейный мир*, **9**(2011), №7, 453–460.
- [20] З.З.Алисултанов, Р.П.Мейланов, *ТМФ*, (в печати).
- [21] С.Г.Самко, Ф.Ф.Килбас, О.И.Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения, Минск, Наука и техника, 1987.
- [22] А.А.Потапов, Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки, М., Университетская книга, 2005.
- [23] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Статистическая физика, часть 1, М., Наука, 1978.
- [24] И.Г.Каплан, Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий, М., Наука, 1982.
- [25] Каданов, Г.Бейм, Квантовая статистическая механика, М., Мир, 1964.
- [26] И.А.Квасников, Термодинамика и статистическая физика. Том 4. Квантовая статистика, М., Едиториал УРСС, 2002.
- [27] А.Н.Козлов, В.Н.Флеров, *Письма в ЖЭТФ*, **25**(1977), вып. 1, 54–58.
- [28] В.Ф.Гринь, Д.С.Лепсверидзе, Е.А.Сальков и др., *Письма в ЖЭТФ*, **21**(1975), вып. 7, 415–418
- [29] Е.Г.Максимов, Ш.Ван, М.В.Магницкая, С.В.Эберт, *Письма в ЖЭТФ*, **21**(2008), вып. 7, 507–510
- [30] В.М.Елеонский, В.Г.Королев, Н.Е.Кулагин, *Письма в ЖЭТФ*, **76**(2002), вып. 12, 859–862.
- [31] С.П.Меркулова, Ю.Е.Лозовик, А.А Соколик, *УФН*, **178**(2008), №7, 757–776.
- [32] G.Savini, A.C.Ferrari, F.Giustino, *Phys. Rev. Lett.*, **105**(2010), 037002.
- [33] З А. V.Milovanov, J.J.Rasmussen, arXiv:cond-mat/0201504v3 [cond-mat.supr-con], 8 Oct 2002.
- [34] X-B Wang, J-X Li, Q.Jiang, Z-H Zhang, *Phys. Rev. B*, **49**(1994), 14, 9778-9781.

## Thermophysical Propeties of Quantum-Statistical System with Factional Power-Low Spectrum

Zaur Z. Alisultanov  
 Ruslan P. Meilanov

---

*We investigated the equation of state for systems with fractional power-law spectrum. Was obtained a relation between the energy, pressure and volume for systems with fractional power-law spectrum. We considered the fractional differential model of the electron-phonon interaction.*

*Keywords: fractional derivatives, equation of state, non-locality.*