Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А. Цих /А. К. Цих
«17» июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О МНОГОЧЛЕНАХ БЕРНУЛЛИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ______ / Е. К. Лейнартас
17.06.2016

Выпускник ______ / О. В. Агальцева
17.06.2016

Красноярск 2016

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена обобщениям на случай многих переменных хорошо известного и широко применяемого в различных разделах математики понятия – многочлены Бернулли.

Цель работы - найти формулы, в которых многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом выражаются через классические многочлены Бернулли.

Одним из основных методов исследования чисел и многочленов Бернулли являются производящие функции.

В результате исследований изучены основные методы теории производящих функций, рассмотрено обобщение многочленов Бернулли на случай нескольких переменных и найдена формула, в которой многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом выражаются через классические многочлены Бернулли.

Ключевые слова: числа Бернулли, многочлены Бернулли, степенные ряды, производящие функции.

ANNOTATION

This research is dedicated to generalizations in case of many variables of the term widely known and applied in various sections of the mathematics, namely, Bernoulli polynomials.

Purpose of the work is to find formulas where Bernoulli polynomials associated with rational cone are expressed through classic Bernoulli polynomials.

One of the key methods for studying Bernoulli numbers and polynomials are generating functions.

Principal methods of generating function theory were studied, generalization of Bernoulli polynomials in case of several variables were considered in terms of the research, and a formula was found where Bernoulli polynomials associated with rational cone are expressed through classic Bernoulli polynomials.

Key words: Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, exponential series and generating functions.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многочлены Бернулли $B_\mu(x)$ определяются разложением в степенной ряд функции $\frac{te^{xt}}{e^t-1}$:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}B_\mu(x)\frac{t^\mu}{\mu!}.$$

При $x=0$ числа $B_\mu(0)=B_\mu$ называются числами Бернулли. Числа и многочлены Бернулли использовал Я. Бернулли (1713 г) для отыскания суммы степенней последовательных натуральных чисел

$$1^\mu+2^\mu+\cdots+n^\mu=\frac{1}{\mu+1}[B_\mu(n+1)-B_\mu(0)].$$

Числа и многочлены Бернулли нашли широкое применение в различных задачах комбинаторного анализа, теории чисел и вычислительной математики. (см. например, [1], [6] [7]).

Одним из главных средств изучения свойств чисел и многочленов Бернулли является теория производящих функций. Изложению основных идей и методов этой теории посвящена первая глава работы. В ней рассмотрены основы метода производящих функций, в частности определены операции над ними и рассмотрены некоторые примеры.

Во второй главе методы теории производящих функций используются для изучения свойств классических чисел и многочленов Бернулли.

В § 2.1 и § 2.2 определяются числа Бернулли и исследуются их основные свойства, в частности приведена рекуррентная формула для их вычисления. В § 2.3 определяются многочлены Бернулли одной переменной и формулируются некоторые их свойства.

Третья глава посвящена обобщению чисел и многочленов Бернулли на случай нескольких переменных.

В § 3.1 и § 3.2 рассматривается предложенное О. А. Шишкиной в работе [8] обобщение многочленов Бернулли на случай нескольких переменных. В этой работе определяются числа Бернулли и многочлены Бернулли ассоциированные с рациональным конусом и изучаются некоторые их свойства.

Цель магистерской диссертации: *найти формулы, в которых многочлены Бернулли ассоциированные с рациональным конусом выражаются через классические многочлены Бернулли.*

Пусть $a^1, \dots, a^n$ линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - целые числа. Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1, \dots, a^n$, назовем множество

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}.$$

Отметим, что такой конус является симплициальным, т. е. каждый его элемент выражается через образующие единственным образом. Кроме того, симплициальный конус также является выступающим, т. е. не содержит прямых.

Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ и отметим, что любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ – вектора-столбцы, A – матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ .. & .. & .. \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $T(\xi)$ мероморфную функцию

$$T(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{\left(e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1\right)},$$

где $\langle a^j, \xi \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \xi_k$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Функция $T(\xi)$ разлагается в степенной ряд вида:

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu(A)}{\mu!} \xi^\mu, \tag{1}$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \mu! = \mu_1! \dots \mu_n!, \xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_n^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Определение 1. Коэффициенты $b_\mu(A)$ ряда (1) назовем числами Бернулли, ассоциированными с конусом K.

Определение 2. Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ многочленом Бернулли нескольких переменных назовем многочлен вида

$$B_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)!\, k!} b_{\mu - k}(A) x^k, \tag{2}$$

где $b_k(A)$ – числа Бернулли, $k = (k_1, \dots k_n)$, $x = (x_1, \dots x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, \dots, \mu_n - k_n)$.

Для $n = 1$ и $a = 1$ определенные нами числа и многочлены Бернулли совпадают с классическими числами B_μ и многочленами $B_\mu(x)$.

В определении чисел и многочленов Бернулли ассоциированных с конусом K предполагается, что конус K является n-мерным, т. е. порожден n линейно-независимыми векторами $a^1, a^2, \dots, a^n$. В параграфе 3.3 третьей главы рассмотрен случай, когда конус K – это луч в n-мерном пространстве.

В параграфе 3.4 решена следующая задача: *найдена формула в которой многочлены Бернулли $B_\mu^A(x)$, ассоциированные с конусом K, порожденным векторами $a^1, a^2, \dots, a^n$, выражаются через классические многочлены Бернулли.*

Если $a^1, \dots, a^n$ – векторы, которые являются столбцами матрицы A, то обозначим через $a^{*1}, \dots, a^{*n}$ векторы, которые являются строками матрицы A^{-1} обратной к матрице A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{*1} & a_2^{*1} & \dots & a_n^{*1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{*n} & a_2^{*n} & \dots & a_n^{*n} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $B_\mu^A(x)$ – многочлен Бернулли, ассоциированный с конусом K, $x \in (x_1, \dots, x_n)$. Справедлива следующая формула

$$B_\mu^A(x) = \sum_{\nu^1 + \dots + \nu^n = \mu} B_{\|\nu^1\|}(y_1) \dots B_{\|\nu^n\|}(y_n) \frac{(a^1)^{\nu^1}}{\nu^1!} \dots \frac{(a^n)^{\nu^n}}{\nu^n!} \cdot \mu!, \quad (3)$$

где $y_j = x_1 a_1^{*j} + \dots + x_n a_n^{*j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, а $B_{\|\nu^j\|}(y_j)$ – многочлены Бернулли от переменной y_j, степени $\nu_1^j + \dots + \nu_n^j = \|\nu^j\|$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $a^1 = (1, 0)$, $a^2 = (1, 1)$. В этом случае матрица A и обратная к ней имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а векторы $a^1 = (1, 0)$, $a^2 = (1, 1)$, $a^{*1} = (1, -1)$, $a^{*2} = (0,1)$.

Для ассоциированных с конусом K многочленов Бернулли из формулы (3) получим

$$B_{11}^{A}(x) = \sum_{\substack{\nu_1^1+\nu_1^2=1 \\ \nu_2^1+\nu_2^2=1}} B_{\|\nu^1\|}(y_1)B_{\|\nu^2\|}(y_2)\frac{1^{\nu_1^1}\cdot 0^{\nu_2^1}\cdot 1^{\nu_1^2}\cdot 1^{\nu_2^2}}{\nu_1^1!\,\nu_2^1!\,\nu_1^2!\,\nu_2^2!}1!\,1!,$$

где $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$.

После вычислений, получим

$$B_{11}^{A}(x_1, x_2) = x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{5}{12}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. изучены основные методы теории производящих функций, которые применены для определения и изучения свойств классических чисел и многочленов Бернулли.
2. рассмотрено обобщение многочленов Бернулли на случай нескольких переменных.
3. найдена формула, в которых многочлены Бернулли ассоциированные с рациональным конусом выражаются через классические многочлены Бернулли.

Список использованных источников

1. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей : наука /А. О. Гельфонд. – Москва : Академия, 1967. – 376с.

2. Рыбников, К. А. Введение в комбинаторный анализ : наука / К. А.Рыбников — Москва : МГУ, 1972. –256 с.

3. Brion, M. Lattice points in simple polytopes : the science / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. no 2 – P. 371–392.

4. Brion, M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes : the science / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. –vol. 10, no 4. – P. 797–833.

5. Лейнартас, Е. К. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами в рациональных конусах целочисленной решетки / Е. К. Лейнартас, Т. И. Некрасова // Сибирский математический журнал. – Красноярск, 2016. – №4 – С. 74-85.

6. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях : наука / С. А. Ландо. – Москва :МЦНМО, 2007. – 144 с.

7. Устинов, А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера : наука / А. В. Устинов Москва : МГУ, 2002. – 936 с.

8. Шишкина, О. А. / Многочлены Бернулли нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2016. – Т. 16. – С. 89-101.

9. Shishkina, O. A. Multidimensional Analogue of the Bernulli Polynomials and its Properties / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2016. – V. 9(3) – P. 376-384.