Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /А. К. Цих
« 17 » июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _____ / Е. К. Лейнартас
17.06.2016

Выпускник _____ / А. В. Агальцева
17.06.2016

Красноярск 2016

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена некоторым обобщениям классических биномиальных коэффициентов.

Цель работы - найти формулы, в которых обобщенные биномиальные коэффициенты выражаются через классические, исследовать аналог уравнения для случая произвольного числа переменных.

Одним из основных инструментов исследования свойств обобщенных биномиальных коэффициентов является метод теории производящих функций.

В результате исследования изучена проблема разрешимости задачи Коши для многомерного разностного уравнения, рассмотрены методы теории производящих функций, позволяющие найти формулу для производящей функции решения, найдены формулы, в которых обобщенные биномиальные коэффициенты выражаются через классические, исследован многомерный аналог основного рекуррентного соотношения.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения, биномиальные коэффициенты, производящие функции.

ANNOTATION

This research is dedicated to some generalizations of classic binominal coefficients.

Purpose of the research is to find formulas where generalized binominal coefficients are expressed through classic ones, research analogues equation for the case of random number of variables.

One of the main research instruments of characteristics of generalized binominal coefficients is the research method of generating functions.

In result of research solution of Cauchy problem for multivariate difference equation was studied, methods of generating functions theory that allow to find a formula for solution of generating function were considered, formulas where binominal coefficients are expressed through classic ones were found, multivariate analogue of main recurrent relation was researched.

Key words: recurrent relations, binominal coefficients, generating functions.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основное свойство биномиальных коэффициентов $f(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!y!}$записанное в виде

$$f(x,y) = f(x-1,y) + f(x,y-1), \qquad (1)$$

часто называют основным рекуррентным соотношением. С точки зрения теории разностных уравнений это двумерное разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x,y)$. Это уравнение помимо биномиальных коэффициентов имеет и другие решения, которые ***будем называть обобщенными биномиальными коэффициентами.***

Цель работы состоит в том, чтобы:

1) Найти формулы, в которых обобщенные биномиальные коэффициенты выражаются через классические;

2) исследовать аналог уравнения (1) для случая произвольного числа переменных.

В первой главе магистерской работы рассматривается задача Коши и проблема разрешимости для многомерного разностного уравнения.

Обозначим $A=\{\alpha\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — некоторое фиксированное конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки.

Рассмотрим разностное уравнение (относительно неизвестной функции $f:\mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{C}$)

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x+a) = 0, \quad x\in \mathbb{Z}_+^n, \qquad (2)$$

где c_α—коэффициенты (постоянные) уравнения.

Зафиксируем $m \in A$ такое, что $\alpha_j \le m_j$, $j = 1,2,\dots,n$и обозначим X_0 множество $X_0 = \cup_{j=1}^n \{y \in \mathbb{Z}^n : 0 \le y_i < m_j\}$.

Сформулируем задачу. Найти решение уравнения (0.2), *совпадающее на* X_0 *с функцией* ϕ:

$$f(x) = \phi(x), x \in X_0. \qquad (3)$$

Известно, что задача (2)-(3) имеет единственное решение (см., например, [2], [11]).

Вторая глава посвящена проблеме нахождения производящих функций решению задач Коши для многомерного разностного уравнения. В §2.1 приведены формулы для производящих функций решения и в §2.2 доказано, что производящая функция решения задачи Коши рациональна, если рациональна производящая функция начальных данных.

Параграф 2.3. является основным в работе и в нем.

- найдены формулы, в которых обобщенные биномиальные коэффициенты выражаются через классические;

- исследован аналог уравнения (1) для случая произвольного числа переменных.

Введем необходимые обозначения и определения. Сформулируем следующую задачу для основного рекуррентного соотношения.

Найти решение $f(x,y)$ разностного уравнения,

$$f(x,y) - f(x-1,y) - f(x,y-1) = 0,\ x = 1,2,\dots, y = 1,2,\dots, \qquad (4)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\mathrm{f}(y,0) = \varphi(x), f(0,y) = \psi(y), \varphi(0) = \psi(0), \mathrm{x}=0,1,2,\dots; \mathrm{y}=0,1,2,\dots . \qquad (5)$$

В глава 1 данной работы показано (см. [1]), что эта задача имеет единственное решение, а также приведена формула в которой решение задачи (4) - (5) выражается через начальные данные φ и ψ. В магистерской диссертации ***дано другое доказательство*** этой формулы, основанное на методе производящих функций.

Обозначим производящие функции решения $f(x,y)$ задачи (4) - (5) и ее начальных данных следующим образом.

$F(z,w) = \sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0}} f(x,y)z^x w^y$,

$F(z,0) = \sum_{x\geq 0} f(x,0)z^x = \sum_{x\geq 0} \varphi(x)z^x$ и

$F(0,w) = \sum_{y\geq 0} f(0,y)z^y = \sum_{y\geq 0} \psi(y)z^y$.

Отметим, что $F(0,0) = f(0,0) = \varphi(0) = \psi(0)$.

Предложение 1. Для производящей функции $F(z,w)$ решение задачи (4)-(5) справедлива следующая формула:

$$F(z,w) = \frac{(1-z)F(z,0)+(1-w)F(0,w)-F(0,0)}{1-z-w}.$$

Из предложения 1 получаем формулу для обобщенных биномиальных коэффициентов.

Следствие 1. Для решения $f(x,y)$ задачи (4)-(5) справедлива следующая формула

$$f(x,y) = f(0,0)\frac{(x+y)!}{x!y!} + \sum_{k=1}^{x}[\varphi(k)-\varphi(k-1)]\frac{(x+y-k)!}{(x+k)!y!} + \sum_{k=1}^{y}[\psi(k)- -\psi(k-1)]\frac{(x+y-k)!}{x!(y-k)!}$$

.

Выбирая специальным образом решения $f(x,y)$ разностного уравнения (4) можно получить различные тождества с биномиальными коэффициентами.

Следствие 2. Пусть $p_1 + p_2 = 1$, тогда для любых $x, y \in \mathbb{Z}_+$ справедливо тождество

$$p_2^{y+1}\sum_{k=0}^{x} p_1^{x-k}\frac{(x+y)-k!}{(x-k)!y!} + p_1^{x+1}\sum_{k=0}^{y} p_2^{y-k}\frac{(x+y-k)!}{x!(y-k)!} = 1. \qquad (6)$$

Тождество (6) хорошо известно [16], его часто называют тождеством Добеши (I. Daubeacheis), полученным в теории вейвлетов с компактным носителем ([12]). Различные варианты доказательства этого тождества и его обобщения тождества получены в [13], [14], [15].

Для того, чтобы рассмотреть аналог задачи (0.4)-(0.5) для произвольного числа переменных нам потребуется следующие обозначения.

Пусть $e^j = (0,\dots,1,\dots,0)$ единичные векторы, j=1,2,…,n. Рассмотрим разностное уравнение вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x-e_j) = 0,\ x \in \mathbb{Z}_+^n \qquad (7)$$

и будем искать его решение, удовлетворяющие следующим условиям

$$f(x)\Big|_{x_i} = \varphi_j(x[j]), \qquad (8)$$

где $x[j] = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, j=1,2,…n.

Обозначим $\pi_j z = (z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, .., z_n)$ - проекция точки z на j – ую координатную плоскость, а $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k}$ – композиция проекции.

Теорема 1. Для производящей функции $F(x) = \sum_{x \geq 0} f(x) z^x$ решения задачи (0.7)-(0.8) справедлива следующая формула

$$\sum_J (-1) \pi_J (1 - z_1 - \dots - z_n) F(z_1, \dots, z_n) = 0, \qquad (9)$$

где в формуле (9) суммирование идет по всевозможным наборам

$J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1,2,\dots,n\}$, $\#J=k$ – число элементов множества J.

Замечание 1. Для n=2 из теоремы следует предложение 1.

Следствие 2.3. Для решения уравнения (2.5) справедлива формула
$f(x) = \sum_{J \neq \emptyset} \sum_{\pi_J y = I}^{\pi_J x} P_J(\delta) f(\pi_J y) \frac{\|x - \pi_J y\|!}{(x - \pi_J y)!}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. изучена проблема разрешимости задачи Коши для многомерного разностного уравнения;

2. рассмотрены методы теории производящих функций, позволяющие найти формулу для производящей функции решения;

3. найдены формулы, в которых обобщенные биномиальные коэффициенты выражаются через классические;

4. исследован многомерный аналог основного рекуррентного соотношения.

Список использованной литературы

1. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей : наука / А. О. Гельфонд. – Москва : Академия, 1967. – 376 с.

2. Bousquet-Mélou, M. Linear recurrences with constant coefficients: the science / M. Bousquet-Mélou , M. Petkovšek // Journal of the American Mathematical Society. 2000.- vol. 225. – P. 51 – 75.

3. De Boor, C. Fundamental solution of multivariate difference equations: the science / C. De Boor, K. Höllig // Journal of the American Mathematical Society. – 1989. – vol. 111. – P. 403-415.

4. Duffin, R. Asymptotic expantions of double Fourier transforms: the science / R. Duffin, D. Shaffer // Journal of the American Mathematical Society. – 1960. – vol .27. – P. 581-596.

5. Vert J. Fundamental solutions of multidimensional difference equations with periodical and matrix coefficients: the science / J. Vert // Journal of the American Mathematical Society. – 1995. – vol. 49. – P. 47-56.

6. Brion, M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes: the science / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – vol. 10, no 4. – P. 797-833.

7. Риордан, Дж. Комбинаторные тождества : наука / Риордан Дж. – Москва: Академия, 1972. – 276.

8. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: наука / Стенли Р. - Москва: Академия, 1990. – 301.

9. Ляпин, А. П. Последовательности Риордана и двумерные разностные уравнения // Журнал СФУ. Математики и физики. – 2009. – №2. – С. 210-220.

10. Федорюк, М.В. Асимптотика: интегралы и ряды: наука /. Федорюк М.В. – Москва: Академия, 1987. – 544с.

11. Lipshits, L. D-finite power series: the science / L. Lipshits // Journal of the American Mathematical Society. – 1989. – vol. 122. – P. 353-373.

12. Лейнартас, Е.К., Лейнартас, Д.Е. Многомерные разностные уравнения: наука / Лейнартас Е.К., Лейнартас Д.Е. – Красноярск: Сибирский Федеральные Университет, 2010. – 154с.

13. Daubeacheis, I. Ten Lectures on Wavelets/: the science / I. Daubeacheis // Journal by Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). – 1992. – P. 377.

14. Zielberger D. On an identity of Daubeacheis/: the science / D. Zielberger // Journal of the American Mathematical Society. - 1993 – vol. 110. – P. 487.

15. Егорычев, Г.П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений $\mathbb{C}_n$: наука / Г.П.Егорычев - изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 3, №4. – С. 39-44.

16. В.П. Кривоколеско, Е.К. Лейнартас. О тождествах с полиномиальными коэффициентами. Серия «Математика»: наука / В.П. Кривоколеско, Е.К. Лейнартас. – Красноярск: сибирский Федеральный Университет, 2012. Т.5, №3.С. 56-62.