Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ В.М. Левчук
«17» 06 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОСТРОЕНИЕ ЯВНОГО БАЗИСА ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА ДЛЯ ТАБЛИЧНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК ШИРИНЫ 3 ГЛУБИНЫ 2

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент ________ / В.Р.Кияткин
17.06.16

Выпускник ________ / А.С.Бурмакина
17.06.16

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Построение явного базиса допустимых правил вывода для табличных модальных логик ширины 3 глубины 2» содержит 29 страниц текста, 6 рисунков, 3 использованных источника.

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА, ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА, БАЗИС ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА, ФРЕЙМ, МОДЕЛЬ, ШКАЛА, ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ, Р-МОРФИЗМ, КО-НАКРЫТИЙНЫЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬ, МОДАЛЬНАЯ АЛГЕБРА, N-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Цель работы — с помощью n-характеристической модели построить явный базис допустимых правил вывода для табличных модальных логик ширины 3 и глубины 2.

В результате исследований доказано, что полученная совокупность правил вывода $\{R_1 - R_5\}$ образует базис допустимых правил вывода для логики $\lambda(F)$. Для этого были доказаны две теоремы. Первая утверждает, что каждое правило R_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, допустимо в $\lambda(F)$. Вторая теорема утверждает, что $\{R_1 - R_5\}$ и есть собственно базис.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Допустимые правила — это те правила, добавление которых к списку постулированных в логике λ правил, не изменяет множества теорем логики λ. С помощью допустимых правил вывода сокращается и упрощается процесс вывода формул. Иначе говоря, множеством $Ad\,(\lambda)$ допустимых правил измеряется дедуктивная мощь данной логической системы. Распознавание допустимости произвольного правила r в заданной логике λ — одна из важных проблем математической логики.

Наибольший вклад в решение этой проблемы для нестандартных логик внес В. В. Рыбаков. Им были постороены разнообразные алгоритмические критерии для различных логик и целых классов логик. Однако такие алгоритмы позволяют всего лишь отделить допустимые правила $Ad(\lambda)$ от общей массы правил. Одним из способов, как дать законченное определение множества $Ad(\lambda)$ всех допустимых правил для данной логики, является построение базиса этих правил.

В данной работе для исследования была взята модальная логика λ, порождённая одним конечным фреймом F (табличная логика).
Сначала была построена n-характеристическая модель $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, найдены все p-морфные образы фрейма F и все ко-накрытийные λ-последовательности. Для каждого "нетривиального"минимального элемента n-характеристической модели было построено своё правило вывода. Таких правил оказалось пять штук: $R_1 - R_5$. Затем была доказана допустимость всех этих правил. При этом использовался критерий допустимости через n-характеристические модели. И в конце доказано, что $\{R_1 - R_5\}$ — базис для $Ad(\lambda)$.

1 Предварительные сведения

Определение 1. *Модальной логикой* называется множество всех пропозициональных формул, содержащее все теоремы минимальной модальной логики K, замкнутое относительно подстановки и правил:

$$\frac{A, A \to B}{B} \text{ и } \frac{A}{\Box A}.$$

Определение 2. Логика λ называется *табличной*, если существует конечный фрейм F такой, что $\lambda = \lambda(F) = \{\alpha \mid F \Vdash \alpha\}$.

Определение 3. *Фрейм* $\mathcal{F}$ есть пара $\langle F, R \rangle$, где F — непустое множество, R — бинарное отношение на F.

Определение 4. *Модель* $\mathfrak{M}$ есть тройка $\langle W, R, V \rangle$, где W — непустое множество, R — бинарное отношение на W и $V : \{p_1, \dots, p_n\} \to 2^W$ — означивание на W.

Определение 5. Говорят, что модальная пропозициональная *формула* α *истинна на фрейме* $F = \langle W, R \rangle$ (обозначение $F \Vdash \alpha$), если при любом означивании V с областью определения всех пропозициональных переменных из формулы α, для любого элемента a из W: $a \Vdash_V \alpha$.

Определение 6. Говорят, что модальная пропозициональная *формула* α *истинна в модели* $\langle W, R, V \rangle$, если для любого элемента a из W верно: $a \Vdash_V \alpha$.

Определение 7. Модель $\mathfrak{M}_n = \langle W_n, R_n, V_n \rangle$ называется *n-характеристической для логики* λ , если для любой формулы α от n переменных из множества $P = \{p_1, p_2 \dots\}$ имеет место $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow \mathfrak{M}_n \Vdash \alpha$.

Определение 8. Фрейм $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ назовём *открытым подпространством* фрейма $F = \langle W, R \rangle$, если $W_1 \subseteq W$ и $R_1 = R \cap (W_1 \times W_1)$.

Определение 9. *Верхним конусом элемента* a называют множество $\{b \mid (a,b) \in R, \quad b \neq a\}$ (обозначение $a^{<}$), *точным верхним конусом* — множество $\{b \mid (a,b) \in R\}$ (обозначение $a^{\leqslant}$)

Определение 10. Элемент a фрейма F называется *ко-накрытием* для множества $X \subseteq F$, если $a^{<} = X^{\leqslant} = \{x^{\leqslant} \mid x \in X\}$.

Определение 11. *Глубиной элемента* a из фрейма F называется максимальное число элементов в цепях элементов, начинающихся с a.

Определение 12. Говорят, что фрейм $F = \langle W, R \rangle$ *корневой*, если $\exists a \in F$ такое, что $a^{\leqslant} = W$. Элемент a называется корнем данного фрейма F.

Определение 13. Множество всех элементов фрейма F глубины n нызывается n-ым *слоем* F (обозначение $S_n(F)$). Множество элементов глубины не более, чем n обозначим $S_{\leq n}(F)$.

Определение 14. Отображение фреймов $\varphi\colon \langle T, R \rangle \to \langle T_1, R_1 \rangle$ называется *p-морфизмом*, если

1. $xRy \Rightarrow \varphi(x)R_1\varphi(y)$,
2. $\varphi(x)R_1\varphi(y) \Rightarrow \exists z(\varphi(y) = \varphi(z) \ \& \ xRz)$.

Определение 15. Фрейм F называется λ-*фреймом логики* λ, если для любой формулы $\alpha \in \lambda : \quad F \Vdash \alpha$.

Определение 16. Фрейм $\mathcal{F}$ называется *ко-накрытийным* λ-*последователем* для F (обозначение $\mathcal{F} = Co_{\lambda}(F)$), если он получен из фрейма F следующим образом:

Пусть $\mathcal{F}_0 = F$ и первый слой фрейма F содержит хотя бы один элемент. На каждом шаге построения $i \geqslant 0$ фрейма $\mathcal{F}_{i+1}$ для любой антицепи $A \subset \mathcal{F}_i$, не имеющей ко-накрытия в $\mathcal{F}_i$, добавляем элемент e, как ко-накрытие для A. Заметим,что для табличной логики λ через конечное число шагов такое построение оборвётся.

Определение 17. Правило вывода

$$r = \frac{\alpha_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \alpha_m(p_1, \ldots, p_n)}{\beta(p_1, \ldots, p_n)}$$

называется допустимым в логике λ тогда и только тогда, когда для любых формул $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ выполняется $\alpha_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \lambda, \ldots, \alpha_m(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \lambda$.

Множество всех допустимых в логике λ правил вывода обозначают $Ad(\lambda)$.

Утверждение 1. Для любой модальной логики λ, расширяющей $K4$, такой, что λ имеет : (i) конечную глубину; (ii) конечный набор аксиом, есть алгоритм, который определяет допустимость правил вывода для r. В частности, правило r с n переменными допустимо в λ тогда и только тогда, когда r истинно на конечном фрейме n-характеристической модели $\mathfrak{M}_n(\lambda)$.

В частности, все табличные модальные логики над $K4$ удовлетворяют этому утверждению.

Определение 18. Правило r называется *следствием множества правила вывода* $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$ в модальной логике λ (обозначение $R \vdash r$), если заключение правила выводимо из множества посылок этого правила с помощью теорем, правил из множества R и постулированных правил.

Определение 19. Множество R правил вывода является *базисом допустимых в логике λ правил вывода*, если $R \subseteq Ad(\lambda)$ и для $\forall r \in Ad(\lambda)(R \vdash r)$.

Утверждение 2. Правило вывода

$$r = \frac{\alpha_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \alpha_m(p_1, \ldots, p_n)}{\beta(p_1, \ldots, p_n)}$$

допустимо в алгебраической логике λ тогда и только тогда, когда квазитождество

$$q(r) = (\alpha_1(p_1, \ldots, p_n) = 1 \& \ldots \& \alpha_m(p_1, \ldots, p_n) = 1 \Longrightarrow \beta(p_1, \ldots, p_n) = 1)$$

истинно на свободной алгебре $\mathcal{F}_\omega(\lambda)$ многообразия $Var(\lambda)$.

Утверждение 3. Пусть λ — алгебраическая логика, тогда квазитождество

$$q = (g_1 = f_1 \& \ldots \& g_m = f_m \Longrightarrow g = f)$$

истинно на $\mathcal{F}_\omega(\lambda)$ тогда и только тогда, когда правило вывода

$$r = \frac{g_1 \equiv f_1, \ldots, g_m \equiv f_m}{f \equiv g}$$

допустимо в λ, при этом любая формула в заключении этого правила продуцирует отдельное правило.

Утверждение 4. Правила вывода $\{r_1, \ldots, r_n\}$ образуют базис для допустимых правил вывода в логике λ тогда и только тогда, когда $\{q(r_1), \ldots, q(r_n)\}$ образуют базис квазитождеств свободной алгебры $\mathcal{F}_\omega(\lambda)$.

Определение 20. Говорят, что r_1 и r_2 *семантически эквивалентны* в логике λ, если для любой алгебры $A \in Var(\lambda)$: $\quad A \models r_1 \Longleftrightarrow A \models r_2$ (обозначение $r_1 \sim r_2$).

Определение 21. Говорят, что правила r_1 и r_2 *эквивалентны по допустимости* в логике λ, если $r_1 \in Ad(\lambda) \Longleftrightarrow r_2 \in Ad(\lambda)$ (обозначение $r_1 \equiv r_2$).

Утверждение 5. Существует алгоритм, который по любому квазитождеству q в языке модальных алгебр строит квазитождество $f(q)$ следующей формы

$$f(q) = (\bigvee_{1 \leqslant j \leqslant m} \varphi_j) = 1 \Rightarrow (p_0 = 1),$$
$$\text{где } \varphi_j = \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} p_i^{k(j,k,l)} \wedge \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} (\diamond p_i)^{k(j,k,2)},$$

$k(j,i,l), k(j,i,2) \in \{0,1\}$, $\;p_i$ — переменные, и все переменные из q встречаются среди p_i, $\;t^0 = t,\ t^1 = \neg t$.

Квазитождество $f\,(q)$ семантически эквивалентно q на $Var\,(\lambda)$ для любой нормальной модальной логики λ. Более того, если $f\,(q)$ ложно на некоторой алгебре $B \in Var\,(\lambda)$, при означивании $x_i \to a_i \in B$, то q ложно на B при этом же означивании.

Утверждение 6. Пусть λ есть нормальная модальная логика. Для любого правила r, правило и его редуцированная форма $f(r)$ эквивалентны в λ по допустимости.

2 Построение базиса

Фрейм $\mathfrak{F}$, порождающий табличную логику λ, представлен на рисунке 1:

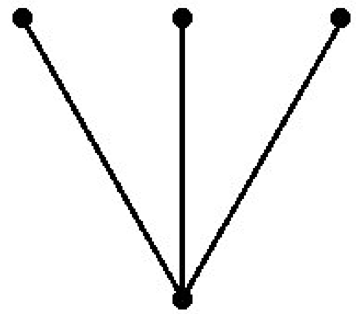

Рисунок 1 – Фрейм F.

Он рефлексивен и транзитивен поскольку $\lambda = \lambda\mathfrak{F}$ расширяет $S4$. На рисунке 2 пречислены все корневые подфреймы фрейма $\mathfrak{F}$ и все их p-морфные образы:

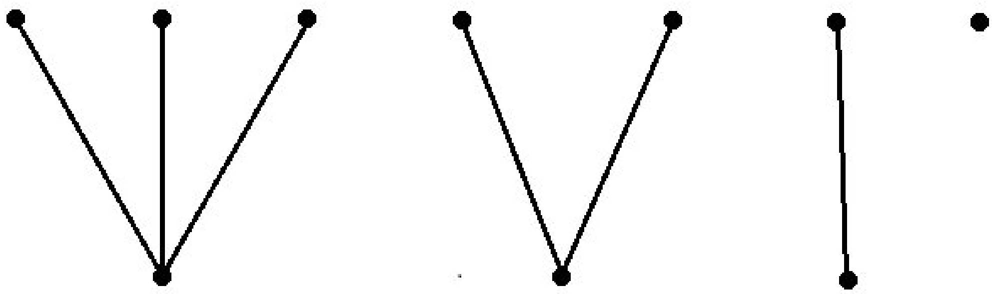

Рисунок 2 – Корневые подфреймы и их p-морфные образы.

Рассмотрим n-характеристическую модель $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ для нашей логики. Формально она выглядит так: $\mathfrak{M}_n(\lambda) = \langle W_n, R_n, V_n \rangle$, где $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

1. $W_n = \{a_i \mid i \in 2^n\} \cup \{a_{jk} \mid j \in 2^n,\ k = (\gamma, \delta, \eta),\ \gamma, \delta, \eta \in 2^n\} \cup$
   $\cup \{a_{js} \mid j \in 2^n,\ s = (\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in 2^n\} \cup \{a_{jt} \mid j, t \in 2^n,\ j \neq t\}$;

2. R_n - рефлексивное и транзитивоне бинарное отношение на W_n и

   $\langle a_{jk}, a_i \rangle \in R_n \Leftrightarrow i \in k$

   $\langle a_{js}, a_i \rangle \in R_n \Leftrightarrow i \in s$

   $\langle a_{jt}, a_i \rangle \in R_n \Leftrightarrow i \neq t$

3. $V_n(p_i) = \{a_i \mid p_i \in i\} \cup \{a_{jk}, a_{js}, a_{jt} \mid p_i \in j\}$.

Первый слой — это совокупность некоторых элементов a_i со всевозможным означиванием из множества $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Всего таких элементов 2^n.
Второй слой состоит из элементов, которые являются ко-накрытием с попарно различными означиваниями(рисунок 3):

1. a_{jk} — для любых трех различных элементов 1-го слоя,

2. a_{js} — для любых двух различных элементов 1-го слоя,

3. a_{jt} — для каждого в отдельности элемента 1-го слоя.

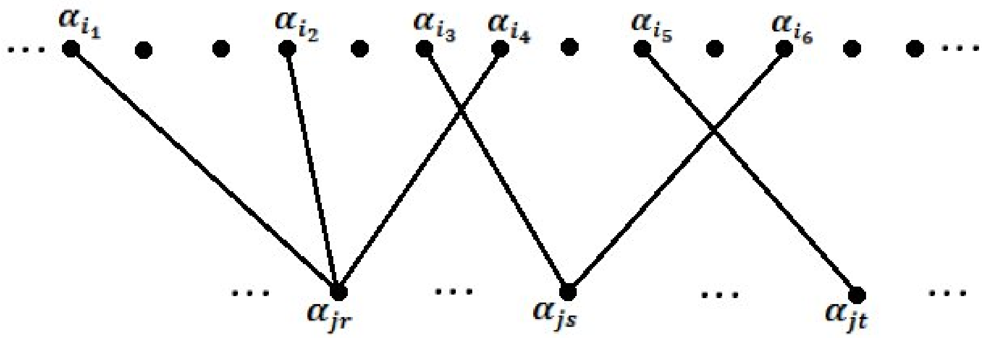

Рисунок 3 – Фрейм модели $\mathfrak{M}_n(\lambda)$.

Вернёмся к корневым λ-фреймам и p-морфным образам данного фрейма $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — корневой, то его p-морфные образы также являются корневыми. Все полученные фреймы являются λ-фреймами. Построим их всевозможные ко-накрытийные λ-последователи (рисунок 4).
Для построения правил вывода используются только ко-накрытийные λ-последователи нетривиальных антицепей, поэтому работать придётся только

с первыми двумя фреймами из указанных на рисунке 4.

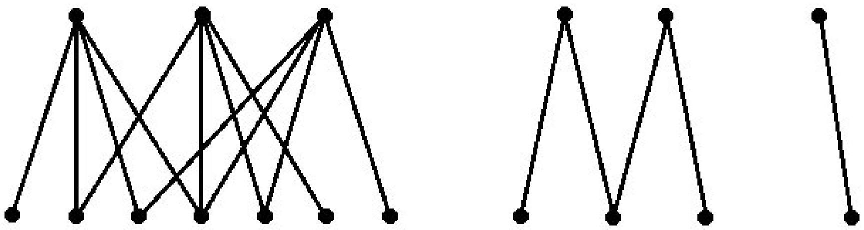

Рисунок 4 – Ко-накрытийные λ-последователи.

Для построения последовательности правил вывода определим формулы $f(e_i)$. Каждому элементу $e_i \in F_k, \quad k \in \{1,2\}$ (рисунок 5 и 6) сопоставим пропозициональную переменную p_i и индукцией по глубине определим формулы $f(e_i)$ следующим образом:

1. $\forall e_i \in S_1 \;\; f(e_i) := p_i \wedge \Box p_i$

2. Пусть для любого $e_i \in S_1$ (глубины 1) формула $f(e_i)$ уже определена, и элемент $e_j \in F_k, \quad k \in \{1,2\}$ глубины 2 является ко-накрытием некоторой антицепи A_l.

Тогда $f(e_j) := p_j \wedge \Diamond p_j \wedge \{\bigwedge_{e_i \in A_l} \neg\Box p_i\} \wedge \Phi(A_l)$, где $\Phi(A_l) = q(A_l) \wedge \Diamond q(A_l)$, $q(A_l) := (\bigwedge_{e_i \in A_l} \Diamond f(e_i) \wedge \bigwedge_{e_i \notin A_l} \neg\Diamond f(e_i)) \wedge (\bigvee_{e_i \in S_1} \neg f(e_i))$.

Рассмотрим первый фрейм — F_1:

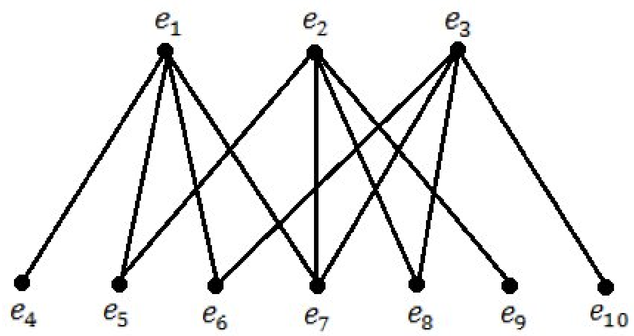

Рисунок 5 – Фрейм F_1.

Согласно приведённым выше правилам для каждого элемента этого фрейма построим свою формулу:

1. $f(e_1) = p_1 \wedge \Box p_1$;

2. $f(e_2) = p_2 \wedge \Box p_2$;

3. $f(e_3) = p_3 \wedge \Box p_3$.

4. $f(e_4) = (p_4 \wedge \Diamond p_4) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_1\})$, где $\Phi(\{e_1\}) = [(\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond\, [(\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\neg f(e_3))]$;

5. $f(e_5) = (p_5 \wedge \Diamond p_5) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_1, e_2\})$, где $\Phi(\{e_1, e_2\}) = [(\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond\, [(\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))]$;

6. $f(e_6) = (p_6 \wedge \Diamond p_6) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_1, e_3\})$, где $\Phi(\{e_1, e_3\}) = [(\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond\, [(\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))]$;

7. $f(e_7) = (p_7 \wedge \Diamond p_7) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_1, e_2, e_3\})$, где $\Phi(\{e_1, e_2, e_3\}) = [(\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond\, [(\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$ $\wedge \neg f(e_3))]$;

8. $f(e_8) = (p_8 \wedge \Diamond p_8) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_2, e_3\})$, где $\Phi(\{e_2, e_3\}) = [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$

$\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$

$\wedge \neg f(e_3))]$;

9. $f(e_9) = (p_9 \wedge \Diamond p_9) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_9\})$, где
   $\Phi(\{e_9\}) = [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$
   $\wedge \neg f(e_3))]; \wedge\Diamond [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \Diamond f(e_2) \wedge \neg\Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$
   $\wedge\neg f(e_3))]$;

10. $f(e_{10}) = (p_{10} \wedge \Diamond p_{10}) \wedge (\neg\Box p_1 \wedge \neg\Box p_2 \wedge \neg\Box p_3) \wedge \Phi(\{e_{10}\})$, где
    $\Phi(\{e_{10}\}) = [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$
    $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond [(\neg\Diamond f(e_1) \wedge \neg\Diamond f(e_2) \wedge \Diamond f(e_3)) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$
    $\wedge \neg f(e_3))]$.

Используя эти формулы, строим правила вывода для каждого минимального элемента фрейма F_k, $k \in \{1, 2\}$ следующим образом:

$$R_\ell = R(F_k, e_j, A) := \frac{\bigvee_{e_i \in \{e_j^<\}} f(e_i)}{\neg f(e_j)},$$

где e_j есть ко-накрытие нетривиальной (неодноэлементной) антицепи A из фрейма F_k. В результате получаем правило $R_1 = R(F_1, e_5, \{e_1, e_2\})$:

$$R_1 := \frac{f(e_1) \vee f(e_2) \vee f(e_3) \vee f(e_4) \vee f(e_6) \vee f(e_7) \vee f(e_8) \vee f(e_9) \vee f(e_{10})}{\neg f(e_5)}.$$

Правило $R_2 = R(F_1, e_6, \{e_1, e_3\})$ имеет вид:

$$R_2 := \frac{f(e_1) \vee f(e_2) \vee f(e_3) \vee f(e_4) \vee f(e_5) \vee f(e_7) \vee f(e_8) \vee f(e_9) \vee f(e_{10})}{\neg f(e_6)}.$$

Следующее правило $R_3 = R(F_1, e_7, \{e_1, e_2, e_3\})$:

$$R_3 := \frac{f(e_1) \vee f(e_2) \vee f(e_3) \vee f(e_4) \vee f(e_5) \vee f(e_6) \vee f(e_8) \vee f(e_9) \vee f(e_{10})}{\neg f(e_7)}.$$

Правило $R_4 = R(F_1, e_8, \{e_2, e_3\})$:

$$R_4 := \frac{f(e_1) \vee f(e_2) \vee f(e_3) \vee f(e_4) \vee f(e_5) \vee f(e_6) \vee f(e_7) \vee f(e_9) \vee f(e_{10})}{\neg f(e_8)}.$$

Строим формулы $f(e_i)$ для второго фрейма — F_2:

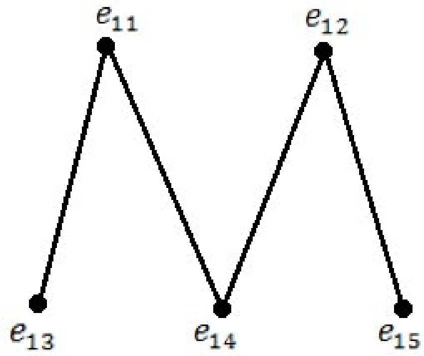

Рисунок 6 – Фрейм F_2.

1. $f(e_{11}) = p_{11} \wedge \Box p_{11}$;

2. $f(e_{12}) = e_{12} \wedge \Box e_{12}$;

3. $f(e_{13}) = p_{13} \wedge \Diamond p_{13} \wedge \Diamond f(e_{11}) \wedge \neg\Diamond f(e_{12}) \wedge \neg\Box p_{11} \wedge \neg\Box p_{12} \wedge \Phi(\{e_{11}\})$,
   где $\Phi(\{e_{11}\}) = [\Diamond f(e_{11}) \wedge \neg f(e_{11})] \wedge \Diamond\, [\Diamond f(e_{11}) \wedge \neg f(e_{11})]$;

4. $f(e_{14}) = p_{14} \wedge \Diamond p_{14} \wedge \Diamond f(e_{11}) \wedge \Diamond f(e_{12}) \wedge \neg\Box p_{11} \wedge \neg\Box p_{12} \wedge \Phi(\{e_{11}, e_{12}\})$,
   где $\Phi(\{e_{11}, e_{12}\}) = [(\Diamond f(e_{11}) \wedge \Diamond f(e_{12})) \wedge (\neg f(e_{11}) \wedge \neg f(e_{12}))] \wedge$
   $\wedge \Diamond\, [(\Diamond f(e_{11}) \wedge \Diamond f(e_{12})) \wedge (\neg f(e_{11}) \wedge \neg f(e_{12}))]$;

5. $f(e_{15}) = p_{15} \wedge \Diamond p_{15} \wedge \neg\Diamond f(e_{11}) \wedge \Diamond f(e_{12}) \wedge \neg\Box p_{11} \wedge \neg\Box p_{12} \wedge \Phi(\{e_{12}\})$,
   где $\Phi(\{e_{12}\}) = [\Diamond f(e_{12}) \wedge \neg f(e_{12}) \wedge (\neg f(e_1) \wedge \neg f(e_2) \wedge$
   $\wedge \neg f(e_3))] \wedge \Diamond\, [\Diamond f(e_{12}) \wedge \neg f(e_{12})]$.

Эти формулы позволяют построить одно правило $R_5 = R(F_2, e_{14}, \{e_{11}, e_{12}\})$:

$$R_5 := \frac{f(e_{11}) \vee f(e_{12}) \vee f(e_{13}) \vee f(e_{15})}{\neg f(e_{14})}.$$

Теорема 1. *Правила $\{R_1 - R_5\}$ допустимы в логике $\lambda(F)$.*

Доказательство:

Предположим, что правило R_1 не допустимо в λ. Тогда посылка правила R_1 всюду истинна на $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, но существует $z \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что на z

заключение правила опровергается при некотором означивании V, т.е. на z при означивании V истина $f(e_5)$.

По строению $f(e_5)$ существуют $a_1 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое,что на a_1 истинна $f(e_1)$ при означивании $V(a_1 \Vdash_V f(e_1))$ и z видит $a_1; a_2 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что $a_2 \Vdash_V f(e_2)$ и z видит a_2. По строению $f(e_5)$ засчёт $\{\Diamond f(e_j) \mid (iRj) \wedge \neg(jRi)\}$ существует $b \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что $b \Vdash_V f(e_4)$ и z видит b. Значит $z^{\leqslant}$ имеет вид, предствленный на рисунке 1.

Определим p-морфизм $g: z^{\leqslant} \to e_5^{\leqslant}$ и доопределим его сразу же на всем $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ так, чтобы образ $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ совпал с F_1.

1. Для любого $a_1 \in z^{\leqslant}$ такого, что $a_1 \Vdash_V p_1 \wedge \Box p_1$ определим p-морфизм g следующим образом: $g(a_1) = e_1$, по свойству p-морфизма получаем $a_1 \Vdash_{g(V)} f(e_1)$.

2. Для любого $a_2 \in z^{\leqslant}$ такого, что $a_2 \Vdash_V p_2 \wedge \Box p_2$ определим p-морфизм g следующим образом: $g(a_2) = e_2$, по свойству p-морфизма получаем $a_2 \Vdash_{g(V)} f(e_2)$.

Утверждение 7. Для любого $x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ на x при означивании V истинны только формулы вида $p \wedge \Box p$

Доказательство:

Предположим, что для $x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ выполнимо $x \Vdash_V f(c)$, где $c \notin$ $\notin S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda))$. По построению $f(c)$ на $x \Vdash_V \Diamond f(g)$, где x видит y, $y \in (\mathfrak{M}_n(\lambda))$ в частности, есть $y \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda))$. Так как $x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda))$, то из x достижим только он сам, следовательно $x \Vdash_V f(y)$, где $f(y) = p_y \wedge \Box p_y$, следовательно $x \Vdash_V \Box p_y$, т.е. $x \nVdash_V \neg\Box p_y$,тогда засчёт $\bigwedge_{i \neq j} \neg\Box p_j$ в строении $f(c)$ на x опровергается $f(c)$ при означивании V.

Получили противоречие, следовательно исходное предположение не верно, т.е. на элементах первого слоя $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ могут быть истинны только формулы вида $p \wedge \Box p$.

$\blacksquare$

Из утверждения 7 следует, что для любого $x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_1, a_2\}$ можем задать g следующим образом: $x \Vdash f(e_1)$, то $g(x) = e_1$, или если $x \Vdash f(e_2)$, то $g(x) = e_2$.

1. Для любого $a_3 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_3 \Vdash_V f(e_3)$ определим p-морфизм $g(a_3) = e_3$. По свойству p-морфизма $e_3 \Vdash_{g(V)} f(e_3)$.
2. Для любого $a_4 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_4 \Vdash_V f(e_4)$ определим p-морфизм $g(a_4) = e_4$. По свойству p-морфизма $e_4 \Vdash_{g(V)} f(e_4)$
3. Для любого $a_5 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)_n)$ такого, что $a_5 \Vdash_V f(e_5)$ определим p-морфизм $g(a_5) = e_5$. По свойству p-морфизма $e_5 \Vdash_{g(V)} f(e_5)$

Утверждение 8. Для любого $x \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ $x \Vdash_V f(e_i)$ тогда и только тогда, когда $g(x) = e_i$ и $e_i \Vdash_{g(V)} f(e_i)$.

Доказательство:

$\Rightarrow$ Доказательство очевидно. Следует из определения g и его свойств, как p-морфизма.

$\Leftarrow$ Предположим, что $x \Vdash_{g(V)} f(e_i)$, $g(x) = e_i$, где $i \neq j$ и e_j глубины больше 1,следовательно $e_i \Vdash_{g(V)} f(e_j)$. Так как $g(x) = e_i$, то e_i видит X, где X — некоторая антицепь, а e_i — ко-накрытие X, следовательно $e_i \Vdash_{g(V)} \Phi(X)$, т.е. $e_i \Vdash_{g(V)} \neg\Diamond f(y)$, где $y \in X$.

Так как $x \Vdash_{g(V)} f(e_j)$, то $x \Vdash_{g(V)} \Phi(A)$, где A — некоторая антицепь.

Если $X \neq A$, то существует $y \in A \backslash X$ такой, что $e_j \Vdash_{g(V)} \Diamond f(y)$. Формула $f(e_j)$ содержит $\wedge\Diamond f(y)$, но на e_i опровергается $\Diamond f(y)$ при означивании $g(V)$, следовательно $e_i \Vdash_{g(V)} f(y)$. Получили противоречие. Значит предположение, что $e_i \Vdash_{g(V)} f(e_j)$ не верно.

Если $X = A$, то по строению λ-ко-последователей $x = e_i$, следовательно утверждение очевидно.

$\blacksquare$

Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_3, a_4, a_5\}$ таких, что $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$ определим p-морфизм $g(x) = a_1$ или $g(x) = a_2$ соответственно. Из утверждения 8 следует, что других таких $x \in S_2(\mathfrak{M}_n)$ нет.

1. Для любого $a_6 \in S_2(\mathfrak{M}_n)$ такого, что $a_6 \Vdash_V f(e_6)$ определим p-морфизм $g(a_6) = e_6$. По свойству p-морфизма $e_6 \Vdash_{g(V)} f(e_6)$.

2. Для любого $a_7 \in S_2(C_n)$ такого, что $a_7 \Vdash_V f(e_7)$ определим p-морфизм $g(a_7) = e_7$. По свойству p-морфизма $e_7 \Vdash_{g(V)} f(e_7)$.

3. Для любого $a_8 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_8 \Vdash_V f(e_8)$ определим p-морфизм $g(a_8) = e_8$. По свойству p-морфизма $e_8 \Vdash_{g(V)} f(e_8)$.

4. Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)_n) \diagdown \{a_6, a_7, a_8\}$ таких, что $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$ или $x \Vdash_V f(e_3)$ или $x \Vdash_V f(e_4)$ или $x \Vdash_V f(e_5)$определим p-морфизм $g(x) = a_1$, или $g(x) = a_2$ или $g(xt) = a_3$ или $g(x) = a_4$, или $g(x) = a_5$ соответственно.

Итак, определили p-морфизм $g : \langle \mathfrak{M}_n(\lambda), V \rangle \to \langle F_1,\ f(V) \rangle$. Из определения g следует $f(V) = S$ на F_1. По утверждению 8 $e_4 \Vdash_S f(e_4)$ и только она, следовательно на e_4 посылка правила R_1 не истинна, так как она представляет собой $\bigvee_{i \neq 4.7} f(e_i) \vee \Diamond f(e_7)$, а дизъюнктивного члена, который истинен на e_4 в посылке правила R_1 нет.
Получили противоречие, т.е. исходное предположение, что R_1 не допустимо неверно.

Рассмотрим теперь R_2:
Предположим, что R_2 недопустимо в λ. Тогда посылка правила R_2 всюду

истинна на $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, но существует $z \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что z заключение правила R_2 опровергается при означивании V, т.е. на z при этом означивании V истинна $f(e_6)$.

По построению $f(e_6)$ следует, что существует $a_1 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что $a_1 \Vdash_V f(e_1)$ и z видит a_2. По построению $f(e_5)$ засчёт $\{\Diamond f(j) \mid iRj \wedge \neg(jRi)\}$ справедливо $\exists b_1 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ и $\exists b_2 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такие, что $b_1 \Vdash_V f(e_2)$ и $b_2 \Vdash_V f(e_3)$ и z видит b_1 и b_2.

Значит $z^{\leqslant}$ может совпадать с одним из фреймов, изобржённых на рисунке 2. Так как в R_2 при построении $f(e_2)$ и $f(e_3)$ использовали $\Phi(\{e_1\})$, следовательно $z^{\leqslant}$ имеет вид 1 или 2.

Определим p-морфизм $g : z^{\leqslant} \to e_6^{\leqslant}$ и доопределим его на всём $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, так чтобы образ фрейма $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ совпал с F_2.

1. Для любого $a_1 \in z^{\leqslant}$ такого, что $a_1 \Vdash_V p_1 \wedge \Box p_1$ определим p-морфизм $g(x) = e_2$ соответственно.

   Из утверждения 8 следует, что $\forall x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_1\}$ можем задать g таким образом: $g(x) = a_1$ и $x \Vdash_V f(e_1)$.

2. Для любого $a_2 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_2 \Vdash_V f(e_2)$ определим p-морфизм $g(a_2) = e_2$. По свойству p-морфизма $e_2 \Vdash_{g(V)} f(e_2)$.

3. Для любого $a_3 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_3 \Vdash_V f(e_3)$ определим p-морфизм $g(a_3) = e_3$. По свойству p-морфизма $e_3 \Vdash_{g(V)} f(e_3)$.

4. Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_2, a_3\}$ таких, что $x \Vdash_V f(e_1)$ определим p-морфизм $g(x) = a_1$. Из утверждения 8 следует, что других таких $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ нет.

5. Для любого $a_4 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_4 \Vdash_V f(e_4)$ определим p-морфизм $g(a_4) = e_4$. По свойству p-морфизма $e_4 \Vdash_{g(V)} f(e_4)$.

   Для любого $a_5 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_5 \Vdash_V f(e_5)$ определим p-морфизм

$g(a_5) = e_5$. По свойству p-морфизма $e_5 \Vdash_{g(V)} f(e_5)$.

6. Для любого $a_6 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ такого, что $a_6 \Vdash_V f(e_6)$ определим p-морфизм $g(a_6) = e_6$. По свойству p-морфизма $e_6 \Vdash_{g(V)} f(e_6)$.

7. Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_4, a_5, a_6\}$ таких, что $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$ или $x \Vdash_V f(e_3)$определим p-морфизм $g(x) = a_1$ или $g(x) = a_2$ или $g(x) = a_3$ соответственно.

Итак,определили p-морфизм $g : \langle \mathfrak{M}_n(\lambda), V \rangle \to \langle \mu_2, f(V) \rangle$. Из определения g следует $f(V) = S$ на F_2. По утверждению 8 $e_6 \Vdash_S f(e_6)$ и только она, следовательно на e_6 посылка правила R_2 не истинна, так как она представляет собой $\bigvee_{i \neq 5} f(e_i) \vee \Diamond f(e_7)$, а дизъюнкция истинна, если хотя бы один ее член истиннен в данной точке, но такого члена нет в посылке правила R_2.

Получили противоречие, т.е. исходное предположение, что R_2 не допустимо неверно.

Рассмотрим теперь R_3:

Предположим, что R_3 недопустимо в λ. Тогда посылка правила R_3 всюду истинна на $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, но существует $z \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что z заключение правила R_3 опровергается при означивании V, т.е. на z при этом означивании V истинна $f(e_7)$.

По построению $f(e_7)$ засчёт $\{\Diamond f(e_j) \mid iRj \wedge \neg(jRi)\}$ существует $a_1 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ и $a_2 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такие, что $a_1 \Vdash_V f(e_1)$ и $a_2 \Vdash_V f(e_2)$ и zRa_1 и zRa_2, а также $\exists b_1 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ и $\exists b_2 \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такие, что $b_1 \Vdash_V f(e_4)$ и $b_2 \Vdash_V f(e_5)$ и zRb_1 и zRb_2.

Значит $z^{<}$ может совпадать с одним из следующих фреймов (рисунок 2): Так как в R_2 при построении $f(e_4)$ и $f(e_5)$ использовали $\Phi(\{e_1, e_2\}$, то b_1 и b_2 видят одну и ту же антицепь. Фреймы вида 1 и 2 λ-фреймы, поэтому их не рассматриваем. Значит $z^{<}$ имеет вид 3.

Определим p-морфизм $g : z^{\leqslant} \to e_9^R$ и доопределим его на всем $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, так чтобы образ $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ совпал с F_3.

1. Для любого $a_1 \in z^{\leqslant}$ такого, что $a_1 \Vdash_V p_1 \wedge \Box p_1$ определим p-морфизм $g(a_1) = e_1$. По свойству p-морфизма $e_1 \Vdash_{g(V)} f(e_1)$.

2. Для любого $a_2 \in z^{\leqslant}$ такого, что $a_2 \Vdash_V p_2 \wedge \Box p_2$ определим p-морфизм $g(a_2) = e_2$. По свойству p-морфизма $e_2 \Vdash_{g(V)} f(e_2)$.

   Из утверждения 8 следует, что для любого $x \in S_1(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_1, a_2\}$ можем задать g таким образом: $g(x) = e_1$ или $g(x) = e_2$ и $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$.

3. Для $\forall a_3, a_4, a_5, a_6 \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ таких, что $a_3 \Vdash_V f(e_3)$, $\;a_4 \Vdash_V f(e_4)$, $a_5 \Vdash_V f(e_5)$, $\;a_6 \Vdash_V f(e_6)$ определим p-морфизм g таким образом: $e_3 \Vdash_{g(V)} f(e_3)$, $e_4 \Vdash_{g(V)} f(e_4)$, $e_5 \Vdash_{g(V)} f(e_5)$, $e_6 \Vdash_{g(V)} f(e_6)$.

4. Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ таких, что $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$ определим p-морфизм $g(x) = e_1$ или $g(x) = e_2$ соответственно.

5. Для $\forall a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda))$ таких, что $a_7 \Vdash_V f(e_7)$, $a_8 \Vdash_V f(e_8)$, $a_9 \Vdash_V f(e_9)$, $a_{10} \Vdash_V f(e_{10})$, $a_{11} \Vdash_V f(e_{11})$ определим p-морфизм g таким образом: $g(a_7) = e_7$, $g(a_8) = e_8$, $g(a_9) = e_9$, $g(a_{10}) = e_{10}$, $g(a_{11}) = e_{11}$ по свойству p-морфизма $e_7 \Vdash_{g(V)} f(e_7)$, $e_8 \Vdash_{g(V)} f(e_8)$, $e_9 \Vdash_{g(V)} f(e_9)$, $e_{10} \Vdash_{g(V)} f(e_{10})$, $e_{11} \Vdash_{g(V)} f(e_{11})$.

6. Для любого $x \in S_2(\mathfrak{M}_n(\lambda)) \diagdown \{a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$ такого, что $x \Vdash_V f(e_1)$ или $x \Vdash_V f(e_2)$, или $x \Vdash_V f(e_3)$ или $x \Vdash_V f(e_4)$ определим p-морфизм $g(x) = e_1$, или $g(x) = e_2$ или $g(x) = e_3$ или $g\,(x) = e_4$ соответственно.

Итак, определили p-морфизм $g : \langle \mathfrak{M}_n(\lambda), V \rangle \to \langle \mu_3, f(V) \rangle$. Из определения g следует $f(V) = S$ на F_2. По утверждению 8 $e_9 \Vdash_S f(e_9)$ и только она, следовательно на e_9 посылка правила R_3 опровергается, не содержит дизъюнктивного члена, истинного на e_9.

Получили противоречие, т.е. исходное предположение, что R_3 не допустимо неверно.

Рассмотрим R_4:

Предположим, что R_4 недопустимо в λ. Тогда посылка правила R_4 всюду истинна на $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, но существует $z \in \mathfrak{M}_n(\lambda)$ такое, что z заключение правила R_4 опровергается при означивании V, т.е. на z при этом означивании V истинна $f(e_8)$.

$z^<$ имеет такой же вид, что и в предыдущем случае.

Определили p-морфизм $g : \langle \mathfrak{M}_n(\lambda), V \rangle \to \langle \mu_3, f(V) \rangle$ аналогично предыдущему случаю.

Из определения g следует $f(V) = S$. По утверждению 8 $e_4 \Vdash_S f(e_4)$ и только она, следовательно посылка опровергается,так как не содержит дизъюнктивного члена $f(e_4)$.

Получили противоречие, т.е. исходное предположение, что R_3 не допустимо неверно.

Рассмотрим R_5:

Аналогично предыдущему случаю, докажем, что R_5 допустимо.

$\blacksquare$

Теперь докажем, что эти правила составляют базис.

Теорема 2. *Совокупность правил* $\mathcal{R}= \{R_1 - R_5\}$ *образует базис для допустимых правил вывода логики* λ.

Доказательство:

Предположим, что $\mathcal{R}= \{R_1 - R_5\}$ — не базис, следовательно существует допустимое правило r, отличное от правил $\mathcal{R}$ и существует алгебра B из многообразия $Var(\lambda)$ такая, что на B истинны $\mathcal{R}$ и все постулированные правила вывода, а r опровержимо на B при означивании V. Следовательно $B \notin \mathcal{F}^{Q}_{\omega}(\lambda)$, так как $\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}_{\omega}(\lambda) \Vdash r$. Тогда по утверждению существует нетривиальная антицепь элементов $A \in B^+_n$ такая, что не существует элемента $\alpha \in B^+_n$ — ко-накрытия для этой антицепи, но в тоже время фрейм $A = \alpha^< \cup \{\alpha\}$ является λ-фреймом.

Исследум строение фрейма B^+ в общем виде. Подфрейм фрейма B^+, содержащий антицепь, которая не имеет λ-ко-накрытия может иметь один из видов, изображённых на рисунке 1. Рассмотрим случай, когда подфрейм B^+_1 фрейма B^+ имеет вид 1 и покажем,что правило R_1, соответствующее антицепи $\{e_1, e_2\}$ поровергается на B^+. Фрейм B^+_1 состоит из элементов вида:

1. x из ко-накрытийного последователя $Co_\lambda(z_1^{\leqslant})$;
2. y такие, что yRx,где $x \in Co_\lambda(z_1^{\leqslant})$;
3. d такие, что d видит x,где $x \in Co_\lambda(z_1^{\leqslant})$.

Зададим означивание V на B^+ так, чтобы посылка правила R_1 была всюду истинна на B^+, но $\exists z_0 \in B^+$, на котором заключение правила R_1 опровергается при означивании V.

1. Для $\forall x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$ зададим означивание V так, что $x_1 \Vdash_V p_1$ и $x_1 \Vdash_V p_2$, следовательно $x_1 \Vdash_V f(e_1)$, $x_1 \Vdash_V f(e_2)$. Для $\forall x_2 \in S_2(Co_\lambda(z_1^R))$ зададим означивание V так, что $x_2 \Vdash_V p_3$ и $x_2 \Vdash_V p_5$, следовательно $x_2 \Vdash_V f(e_3)$, $x_2 \Vdash_V f(e_5)$, причём x_2 видит только x_1.
2. По построению λ-фрейма все $y_1 \in S_2(B^+)$ либо являются ко-накрытием антицепи $\{x_1\} \subseteq S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$, либо ко-накрытием антицепи
   $\{d, x_1\} \subseteq S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$, где $x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$, $d \in S_1(B^+)$.
   Для $\forall y_1 \in S_2(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_1 \Vdash_V p_3$ и $y_1 \Vdash_V p_5$, следовательно, $y_1 \Vdash_V f(e_3)$ и $y_1 \Vdash_V f(e_5)$.
   Другие ко-накрытия не возможны, так как получаемые корневые фреймы не являются λ-фреймами.

Для $\forall y_2 \in S_2(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_2 \Vdash_V p_3$ и $y_2 \Vdash_V p_5$, следовательно $y_2 \Vdash_V f(e_3)$ и $y_2 \Vdash_V f(e_5)$ соответственно.

3. Для $\forall d \in B^+$ зададим означивание V так, что $d \Vdash_V p_1$ и $d \Vdash_V p_2$, тогда $d \Vdash_V f(e_1)$ и $d \Vdash_V f(e_2)$.

Итак, при определенном таким образом означивании V посылка правила R_1 всюду истинна на B^+, а заключение $\neg f(e_7)$ опровергается в x_3, следовательно R_1 опровергается на B^+ значит $\mathcal{R}$ не истинно на B^+, что противоречит исходному предположению $B \Vdash R$.

Рассмотрим случай, когда подфрейм B_2^+ фрейма B^+ имеет вид 2 и покажем,что правило R_2, соответствующее антицепи $\{e_2, e_3\}$.

Фрейм B_1^+ состоит из элементов вида:

1. $x \in Co_\lambda(z_2^{\leqslant})$;
2. y такие, что yRx, где $x \in Co_\lambda(z_2^{\leqslant})$;
3. d такие, что d видит x, где $x \in Co_\lambda(z_2^{\leqslant})$.

Зададим означивание V на B^+ так, чтобы посылка правила R_2 была всюду истинна на B^+, но $\exists z_0 \in B^+$, на котором заключение правила R_2 опровергается при означивании V.

1. Для $\forall x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$ зададим означивание V так, что $x_1 \Vdash_V p_1$, следовательно $x_1 \Vdash_V f(e_1)$.

   Для $\forall x_2 \in S_2\left(Co_\lambda\left(z_2^{\leqslant}\right)\right)$ зададим означивание V так, что $x_2 \Vdash_V p_2$ и $x_2 \Vdash_V p_3$, следовательно $x_2 \Vdash_V f(e_2)$ и $x_2 \Vdash_V f(e_3)$, причём x_2 видит только x_1.

   Для $\forall x_3 \in S_2(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$ зададим означивание V так, что $x_3 \Vdash_V p_2$ и $x_3 \Vdash_V p_3$, следовательно $x_3 \Vdash_V f(e_2)$ и $x_3 \Vdash_V f(e_3)$, причём x_3 видит только x_2.

Для $\forall x_4 \in S_2(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$ такого, что x_4 видит только x_2, зададим означивание V так, что $x_4 \Vdash_V p_4$ и $x_4 \Vdash_V p_5$, тогда $x_4 \Vdash_V f(e_4)$ и $x_4 \Vdash_V f(e_5)$.

Для $\forall x_5 \in S_2(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$ такого, что x_5 видит только x_3, зададим означивание V так, что $x_5 \Vdash_V p_6$ и $x_5 \Vdash_V p_5$, тогда $x_5 \Vdash_V f(e_6)$ и $x_5 \Vdash_V f(e_5)$.

2. Для $\forall y_1 \in S_2(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$ зададим означивание V так, что $y_1 \Vdash_V p_2$ и $y_1 \Vdash_V p_3$, тогда $y_1 \Vdash_V f(e_2)$ и $y_1 \Vdash_V f(e_3)$, причём по построению λ-фрейма y_1 может быть либо ко-накрытием антицепи $\{x_1\} \subseteq S_1(Co_\lambda(z_2^{\leqslant}))$, либо ко-накрытием антицепи $\{d, x_1\} \subseteq S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$, где $x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_1^{\leqslant}))$, $d \in B^+$.

   Для $y_2 \in S_2(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_2 \Vdash_V p_2$ и $y_2 \Vdash_V p_3$, причем все $y_2 \in S_2(B^+)$ могут быть либо ко-накрытием антицепи $\{y_1\} \subseteq S_2(B^+)$, либо ко-накрытием антицепи $\{x_2, x_3\}$, причем $y_2 \neq x_4$ и $y_2 \neq x_5$, либо ко-накрытием двух несравнимых y_1 и y_1', где $y_1' \in S_2(B^+)$. Другие ко-накрытия не возможны, так как получаемые корневые фреймы не являются λ-фреймами.

3. Для $\forall d \in B^+$ зададим означивание V так, что $d \Vdash_V p_1$, тогда $d \Vdash_V f(e_1)$.

Итак, при определенном таким образом означивании V посылка правила R_2 всюду истинна на B^+, а заключение $\neg f(e_5)$ опровергается в точках x_4 и x_5, следовательно R_2 опровергается на B^+ значит $\mathcal{R}$ не истинно на B^+, что противоречит исходному предположению $B \Vdash \mathcal{R}$.

Рассмотрим случай, когда подфрейм B_3^+ фрейма B^+ имеет вид 3 и покажем,что правило R_3, соответствующее антицепи $\{e_2, e_3\}$.

Фрейм $B+$ состоит из элементов вида:

1. $x \in Co_\lambda(z_3^{\leqslant})$;
2. y такие, что yRx, где $x \in Co_\lambda(z_3^{\leqslant})$;
3. d такие, что d видит x, где $x \in Co_\lambda(z_3^{\leqslant})$.

Зададим означивание V на B^+ так, чтобы посылка правила R_3 была всюду истинна на B^+, но $\exists z_0 \in B^+$, на котором заключение правила R_3 опровергается при означивании V.

1. Для $\forall x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_3^R))$ зададим означивание V так, что $x_1 \Vdash_V p_1$ и $x_1 \Vdash_V p_2$, следовательно $x_1 \Vdash_V f(e_1)$ и $x_1 \Vdash_V f(e_2)$. Для $\forall x_2 \in S_2(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$ такое, что x_2 видит только один элемент $x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$, зададим означивание V так, что $x_2 \Vdash_V p_3$, тогда $x_2 \Vdash_V f(e_3)$.

   Для $\forall x_3 \in S_2(Co_\lambda(z_3^R))$ такого, что x_3 видит два элемента $x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_3^R))$, зададим означивание V так, что $x_3 \Vdash_V p_4$ и $x_3 \Vdash_V p_5$, следовательно $x_3 \Vdash_V f(e_4)$ и $x_3 \Vdash_V f(e_5)$.

   Для $\forall x_4 \in S_3(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$ такого, что x_4 видит только x_2, зададим означивание V так, что $x_4 \Vdash_V p_7$, тогда $x_4 \Vdash_V f(e_7)$.

   Для $\forall x_5 \in S_3(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$ такого, что x_5 видит только $x_3 \in S_2(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$, зададим означивание V так, что $x_5 \Vdash_V p_8$ и $x_5 \Vdash_V p_9$, тогда $x_5 \Vdash_V f(e_8)$, $x_5 \Vdash_V f(e_9)$.

2. Для $\forall y_1 \in S_2(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_1 \Vdash_V p_3$, тогда $y_1 \Vdash_V f(e_3)$, причём по построению λ-фрейма y_1 может быть либо ко-накрытием антицепи $\{x_1\} \subseteq S_1(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$, либо ко-накрытием антицепи $\{d, x_1\} \subseteq S_1(B^+)$, где $x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_3^R))$, $d \in B^+$.

   Для $y_2 \in S_3(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_2 \Vdash_V p_3$, тогда $y_2 \Vdash_V f(e_3)$, причем по строению λ-фрейма y_2 является либо ко-накрытием антицепи $\{x_2\}$ или $\{x_3\}$,где $\{x_2\} \subseteq S_2(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$ или $\{x_3\} \subseteq S_2(Co_\lambda(z_3^{\leqslant}))$, причём $y_2 \neq x_4$ и $y_2 \neq x_5$, либо ко-накрытием двух несравнимых y_1 и y_1', где $y_1' \in S_2(B^+)$.

   Другие ко-накрытия не возможны, так как получаемые корневые фреймы не являются λ-фреймами.

3. Для $\forall d \in B^+$ зададим означивание V так, что $d \Vdash_V p_1$ и $d \Vdash_V p_2$, тогда $d \Vdash_V f(e_1)$ и $d \Vdash_V f(e_2)$.

Итак, при определенном таким образом означивании V посылка правила R_3 всюду истинна на B^+, а заключение $\neg f(e_9)$ опровергается в точках x_5, следовательно R_3 опровергается на B^+ значит $\mathcal{R}$ не истинно на B^+, что противоречит исходному предположению $B \Vdash \mathcal{R}$. Рассмотрим случай, когда подфрейм B_4^+ фрейма B^+ имеет вид 1 и покажем,что правило R_4, соответствующее антицепи $\{e_1, e_5\}$.

Зададим означивание V на B^+ так, что посылка правила R_4 была всюду истинна на B^+, но $\exists z_0 \in B^+$, на котором заключение правила R_4 опровергается.

1. Для $\forall x_1 \in S_1(Co_\lambda(z_4^\leqslant))$ зададим означивание V так, что $x_1 \Vdash_V p_1$ и $x_1 \Vdash_V p_2$, тогда $x_1 \Vdash_V f(e_1)$ и $x_1 \Vdash_V f(e_2)$.

   Для $\forall x_2 \in S_2(Co_\lambda(z_4^\leqslant))$ зададим означивание V так, что $x_2 \Vdash_V p_4$ и $x_2 \Vdash_V p_5$, тогда $x_2 \Vdash_V f(e_4)$ и $x_2 \Vdash_V f(e_5)$.

   Для $\forall x_3 \in S_3(Co_\lambda(z_4^\leqslant))$ зададим означивание V так, что $x_3 \Vdash_V p_8$ и $x_3 \Vdash_V p_9$, тогда $x_3 \Vdash_V f(e_8)$ и $x_3 \Vdash_V f(e_9)$, следовательно $x_2 \Vdash_V \Diamond f(e_9)$.

2. Для $y_1 \in S_2(B^+)$ зададим означивание V так, что $y_1 \Vdash_V p_4$ и $y_1 \Vdash_V p_5$, тогда $y_1 \Vdash_V f(e_4)$ и $y_1 \Vdash_V f(e_5)$.

3. Для $\forall d \in B^+$ зададим означивание V так, что $d \Vdash_V p_1$ и $d \Vdash_V p_2$, тогда $d \Vdash_V f(e_1)$ и $d \Vdash_V f(e_2)$.

Итак, при определенном таким образом означивании V посылка правила R_4 всюду истинна на B^+, а заключение $\neg f(e_9)$ опровергается в точках x_3, следовательно R_4 опровергается на B^+ значит $\mathcal{R}$ не истинно на B^+, что противоречит исходному предположению $B \Vdash \mathcal{R}$. Опровержимость R_5 на B^+ доказывается аналогично предыдущему случаю, получаем $\mathcal{R}$ опровержимо на B^+.

Итак, $\mathcal{R}$ опровержимо на B^+ при любом виде подфрейма B^+, содржащего антицепь, которая не имеет λ-ко-накрыти. Получим противоречие, так как предпологали, что на B истинно при любом означивании. Значит предположение, что $\mathcal{R}$ — не базис не верно, т.е. построенные правила $\{R_1 - R_5\}$ образуют базис допустимых правил вывода логики $\lambda(\mathcal{F})$.

■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе были получены следующие результаты:

1. Построена n-характеристическая модель для логики $\lambda(F)$, порождённой фреймом F.

2. Для каждого "нетривиального"минимального элемента n-характеристической модели построено своё правило вывода. Таких правил оказалось пять штук: $\{R1 - R5\}$.

3. Доказано, что все эти правила допустимы в логике $\lambda(F)$.

4. Доказано, что совокупность правил $\{R1 - R5\}$ образует базис для всех допустимых правил в логике $\lambda(F)$.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по нестандартным логикам.

Результаты бакалаврской работы были доложены на международной студенческой научной конференции «Молодежь и наука: Проспект Свободный – 2016».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Rybakov, V. V. Admissibility of logical inference rules: Book/ V. V. Rybakov. — Elsevier Publ. Amsterdam, New-York. — 1997. — V. 136. — 617 p.

2. Римацкий, В.В. Базисы допустимых правил вывода табличных модальных логик глубины 2 / В. В. Римацкий // Алгебра и логика. — 1996. — Т. 35. —№5. —С. 612—623.

3. Римацкий, В.В. Явный базис допустимых правил вывода логик конечной ширины / В.В. Римацкий // Журнал Сибирского федерального университета. —2008. —С. 85-93.