Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ / В.М.Левчук

« 21 » 06 2016г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ИДЕАЛОВ НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ТИПОВ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор
_______ / В.М.Левчук
21.06.2016

Выпускник _______ /Я.Д. Асеева
21.06.2016

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Перечисление идеалов нильтреугольной подалгебры алгебр Шевалле исключительных типов» содержит 18 страниц текста, 5 рисунков, 4 использованных источников.

АЛГЕБРА ШЕВАЛЛЕ, НИЛЬТРЕУГОЛЬНАЯ ПОДАЛГЕБРА, ГРУППА ШЕВАЛЛЕ, УНИПОТЕНТНАЯ ПОДГРУППА.

Цель работы – решить озаглавленную задачу для D – инвариантных идеалов и аналогичную задачу для D – инвариантных нормальных унипотентных подгрупп групп лиева типа редукцией к перечислению определенных подмножеств системы положительных корней, ассоциированной с алгеброй Шевалле исключительного лиева типа. Полученные результаты отражают две основные теоремы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В группах G(K) лиева типа (включая скрученные группы) над полем K выделяют максимальную унипотентную подгруппу U. Когда G(K) - группа Шевалле, построенная по системе корней Ф, с унипотентной подгруппой U=UФ(K) ассоциирована алгебра Ли NФ(K) - нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле типа Ф над K. См. § 1.

В работе перечисляются D–инвариантные (инвариантные относительно подгруппы D диагональных автоморфизмов) идеалы в NФ(K) и нормальные D - инвариантные подгруппы в U. Основными являются две задачи.

(А) Найти число D–инвариантных идеалов нильтреугольной подалгебры NФ(К) алгебр Шевалле над полем К.

(Б) Перечисление нормальных D - инвариантных подгрупп унипотентной подгруппы U группы лиева типа, включая скрученные группы.

Для классических типов задачи исследовались ранее в работах [1], [2].

Наша цель - исследовать задачи для исключительных типов. Решение получено при $|K|>2$ *и* некоторых других ограничениях на основное поле.

К основным результатам относятся следующие две теоремы.

Теорема A. Число D – инвариантных идеалов алгебры NФ(К) над полем К равно:

7 для типа G_2, 6К=К;

104 для типа F_4, 2К=К;

832 для типа E_6, $|K|>2$.

Теорема Б. Число нормальныхD – инвариантных подгрупп в группе UG(K) равно:

7 при $G = G_2$, $6K=K$, *или* $G = {}^3D_4$, $|K| > 4$;

104 при $G = F_4$, $2K=K$, *или* $G = {}^2E_6$, $|K| > 2$.

1 Нильтреугольная подалгебра NΦ(K) алгебры Шевалле и унипотентная подгруппа U

В группах Шевалле G(K) над полем выделяют максимальную унипотентную подгруппу U=UG(K).

Алгебру Шевалле L_K над полем K характеризуют базисом Шевалле, ассоциируемым с каждой из 9 неразложимых систем корней Φ, из которых 4 – классических типов A_n, B_n, C_n, D_n и 5 – исключительных типов G_2, F_4 и E_n (n=6,7,8),[1, § 4.4]. Его составляют из элементов e_r и h_r:=2r/(r,r). Более точно, если Π – база Φ, то базис Шевалле имеет вид :

$$\{ e_r (r \in \Phi), h_r (r \in \Pi) \}.$$

Подалгебру в L_K с базисом из элементов e_r (r• Φ^+) базиса Шевалле называют *нильтреугольной* и обозначают через $N\Phi(K)$. Для корней r,s∈Φ пусть p=p(r,s) – наибольшее неотрицательное целое число i такое, что

s - ir ∈ Φ. Тогда в алгебреNΦ(K) умножение определяется правилами:

$$[e_r e_s] = = \pm(p+1), e_{r+s} \;\; (r,s,r+s \in \Phi), \qquad [e_r e_s]=0 \quad (r+s \notin \Phi \cup \{0\}).$$

При K=GF(q) мы исследуем задачу **(A)** перечисления D – инвариантных идеалов алгебр NΦ(K).

Задача **(A)** связана с перечислениями нормальных D – инвариантных подгрупп групп Шевалле. Напомним, что в группе автоморфизмов алгебры Шевалле L_K выделяют корневые автоморфизмы x_r(t) при любых r∈Φ и t∈K. Подгруппу порожденную всевозможными корневыми автоморфизмами называют группой Шевалле типа Φ над полем K и обозначают через Φ(K).

Скрученные группы Шевалле $^2\Phi$(K) получают как стабилизатор определенного “скручивающего” автоморфизма порядка 2 групп Ф(К) типов A_n, D_n, E_6, F_4, B_2 , G_2.

В группах Шевалле G(K) над полем выделяют максимальную унипотентную подгруппу U=UG(K). Мы исследуем задачу **(Б)** перечисления нормальных подгрупп групп UG(К), инвариантных относительно подгруппы D диагональных автоморфизмов или, кратко D -инвариантных. Для классических типов задачу **(Б)** решили ранее в [1].

В настоящей работе задачи исследуются для исключительных лиевых типов. Основные теоремы А и Б из введения доказываются в § 2 - 4.

2 Редукция задач (А) и (Б) и случай классических типов

Решение задач (А) и (Б) мы будем редуцировать к перечислению определенных подмножеств системы положительных корней, ассоциированной с алгеброй Шевалле исключительного лиева типа.

На системе корней Ф вводим частичный порядок. Для заданных корней r,s ∈ Ф считаем $s \leq r$, если r-s имеет линейное разложение с неотрицательными коэффициентами по базе. Корни r и s называем инцидентными, если $s \leq r$ или $r \leq s$. Любое множество попарно неинцидентных корней из Φ^+ называют множеством углов. С учетом известных представлений специальными матрицами алгебр NФ(K) классических типов, множеством из m углов называют также m- ступенчатой лестницей типа Φ^+. В алгебре NФ(K) выделяем идеалы

$$T(r):=\sum_{s\geq r} Ke_s, \quad Q(r):=\sum_{s>r} Ke_s.$$

При H ⊂ NФ(K) множество L=L(H) $=\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ корней такое, что $H \subset \sum_{r\in L} T(r)$ и включение нарушается при любой замене T(r) на Q(r) , очевидно, состоит из попарно неинцидентных корней и называется множеством углов подмножества H.

Для попарно неинциндентных корней $r_1, r_2, \ldots, r_m \in G$ введем подгруппу $\mathrm{T}(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, по определению, порожденную всевозможными подгруппами T(s), для корней таких, что s$\leq r_i$ хотя бы для одного i.

Известна [3] следующая теорема, редуцирующая задачу **(Б)** к перечислению m-ступенчатых лестниц.

Теорема 1. Подгруппы T $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ групп UG(K) ранга > 2 являются различными для различных множеств попарно неинциндентных корней $r_1, r_2, \ldots, r_m \in G$. Все такие подгруппы являются нормальными D – инвариантными подгруппами и исчерпывают их, если |K|>4 для G= ${}^2E_6$, ${}^2A_n$, ${}^2D_n$ $(n > 3)$, или 2K=K для B_n, C_n, F_4, или 6K=K для G= G_2, наконец, |K|>2 в остальных случаях.

Задача (Б) решена для классических типов в [2]. Основной в этой работе является

Теорема 2. Число нормальных D – инвариантных подгрупп в группе UG(K) классических типов для поля характеристик > 2:

$\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$ *для* $G = A_{n-1}$, *n> 1;*

$\binom{n}{[n/2]}$ *для* $G = {}^2A_{n-1}$, *n> 1;*

$\binom{2n}{n}$ *для* $G = {}^2D_n$, $n \geq 2$, $|K| > 4$, *или*

$K = 2K$, $G = B_n$, *или*

C_n, $n \geq 1$;

$$\binom{2n}{n-1} + 4^{n-1} \qquad \text{для } 2K = 0,\ G = B_n \text{ или } C_n,\ n>2;$$

$$\binom{2n-1}{n} + \binom{2n-2}{n} \qquad \text{для } G = D_n,\ n>2.$$

Аналогично редуцируется задача (A).

Заметим число одноступенчатых лестниц в NΦ(K) всегда равно $|\Phi^+|$.

Для типа G_2 используем схему положительных корней с базой {a, b}, |a| < |b|.

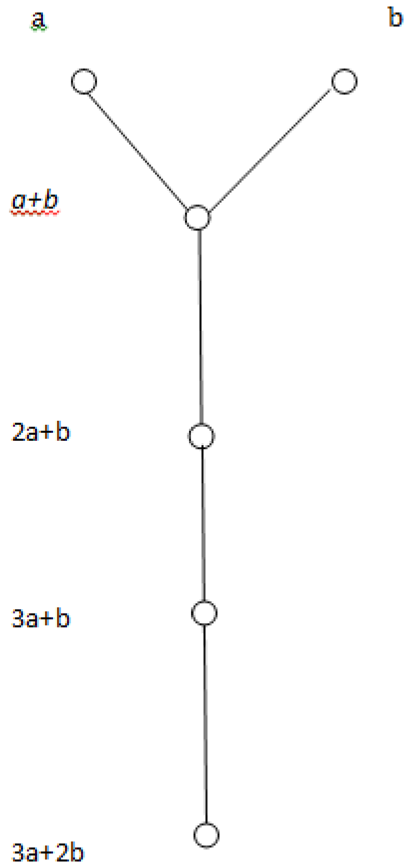


Рисунок 1 – Схема для типа G_2

Очевидно, что в этом случае более чем 1 ступенчатая лестница единственна. Поэтому число всех лестниц равно $|\Phi^+|$+1=6+1=7.

Известное соответствие показывает, что этому же числу равно число нормальных D- инвариантных подгрупп группы U типа $^3D_4$, при |K|>4.

Лемма 2.1 Число m-ступенчатых лестниц (или множество углов) типа G_2 в алгебре NΦ(K) равно 7.

Ограничение 6K=K существенно, так как редукция нашей задачи при ограничении 2K=0 или 3K=0 становится не верной .

Лемма 2.2 Число D – инвариантных идеалов алгебры NΦ(K) типа G_2над полем K, 6K=K равно 7 .

Таким образом теоремы A и Б для типа G_2 доказаны.

3 Доказательство теоремы A

В начале исследуем случай лиева типа F_4. Используем представление из [4] системы положительных корней типа F_4 следующей диаграммой.

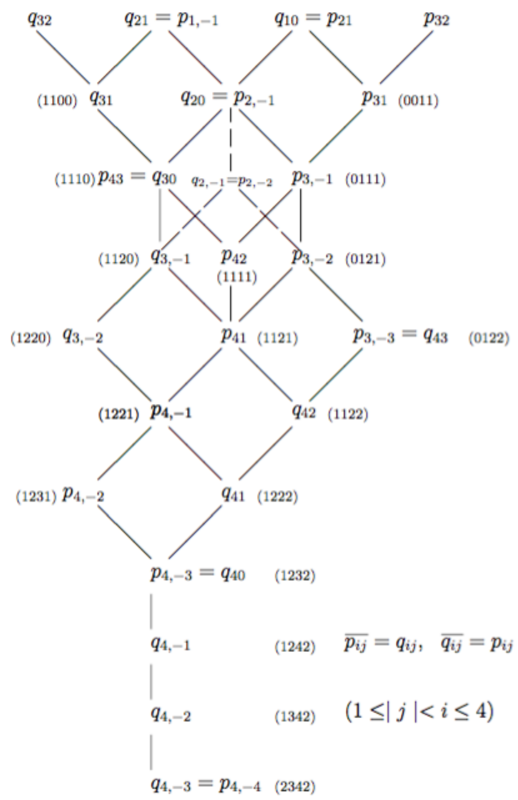


Рисунок 2 – диаграмма для типа F_4

Здесь отношение $r \leq s$ выполняется тогда и только тогда, когда от корня r можно спуститься до корня s по связному пути.

Очевидно, число одноступенчатых лестниц равно $|\Phi^+|$=24. Далее находим числа не одноступенчатых лестниц.

Число 2-х ступенчатых лестниц равно 55.

1) $q_{32}q_{21}$	15) $p_{32}q_{2,-1}$	29) $p_{42}p_{3,-2}$	43) $p_{3,-3}p_{41}$
2) $q_{32}q_{10}$	16) $p_{32}p_{43}$	30) $p_{42}p_{3,-3}$	44) $p_{3,-3}q_{3,-2}$
3) $q_{32}p_{32}$	17) $q_{31}q_{20}$	31) $q_{3,-2}p_{41}$	45) $p_{3,-3}p_{4,-1}$
4) $q_{32}p_{31}$	18) $q_{31}p_{31}$	32) $q_{3,-2}p_{3,-3}$	46) $p_{3,-3}p_{4,-2}$
5) $q_{32}p_{20}$	19) $q_{31}q_{2,-1}$	33) $q_{20}p_{31}$	47) $p_{4,-1}q_{42}$
6) $q_{32}q_{2,-1}$	20) $q_{31}p_{3,-1}$	34) $q_{20}q_{31}$	48) $q_{42}p_{4,-1}$
7) $q_{32}q_{20}$	21) $p_{31}p_{43}$	35) $q_{2,-1}p_{3,-1}$	49) $q_{42}p_{4,-2}$
8) $q_{32}p_{3,-1}$	22) $p_{31}q_{2,-1}$	36) $q_{2,-1}p_{43}$	50) $p_{4,-2}q_{41}$
9) $q_{21}q_{10}$	23) $p_{43}q_{2,-1}$	37) $q_{3,-1}p_{42}$	51) $q_{41}p_{4,-2}$
10) $q_{21}p_{32}$	24) $p_{43}p_{3,-1}$	38) $q_{3,-1}p_{3,-2}$	52) $q_{32}p_{3,-2}$
11) $q_{10}p_{32}$	25) $q_{3,-1}p_{42}$	39) $q_{3,-1}p_{3,-3}$	53) $q_{32}p_{3,-3}$
12) $q_{10}p_{31}$	26) $q_{3,-1}p_{3,-2}$	40) $q_{3,-2}q_{42}$	54) $q_{21}p_{31}$
13) $p_{32}q_{31}$	27) $q_{3,-1}p_{3,-3}$	41) $p_{41}q_{3,-2}$	55) $q_{21}p_{3,-3}$
14) $p_{32}q_{20}$	28) $p_{42}q_{3,-2}$	42) $p_{41}p_{3,-3}$	

Число 3-х ступенчатых лестниц равно 24.

1) $q_{32}q_{21}q_{10}$	6) $q_{32}p_{32}q_{2,-1}$	10) $q_{21}q_{10}p_{32}$
2) $q_{32}q_{21}p_{32}$	7) $q_{32}q_{20}p_{31}$	11) $q_{10}p_{32}q_{31}$
3) $q_{32}q_{21}p_{31}$	8) $q_{32}p_{31}q_{2,-1}$	12) $p_{32}q_{31}q_{20}$
4) $q_{32}q_{10}p_{32}$	9) $q_{32}q_{2,-1}p_{3,-1}$	13) $p_{32}q_{31}q_{2,-1}$
5) $q_{32}p_{32}p_{20}$		

14) $p_{32}p_{43}q_{2,-1}$

15) $q_{31}q_{20}p_{31}$

16) $q_{31}q_{2,-1}p_{3,-1}$

17) $q_{31}p_{31}q_{2,-1}$

18) $p_{31}p_{43}q_{2,-1}$

19) $p_{43}q_{2,-1}p_{3,-1}$

20) $q_{3,-1}p_{42}p_{3,-2}$

21) $q_{3,-1}p_{42}p_{3,-3}$

22) $p_{42}q_{3,-2}p_{3,-2}$

23) $p_{42}q_{3,-2}p_{3,-3}$

24) $q_{3,-2}p_{41}p_{3,-3}$

Учитывая, что m-ступенчатая лестница типа F_4 при m > 3 единствен-на, получаем число всех лестниц типа F_4

$$\left|\Phi^+\right|+55+24+1=104.$$

Лемма 3.1. Число m-ступенчатых лестниц (или множество углов) в алгебре NФ(К) типа F_4 равно 24, 55, 24 и 1, соответственно случаям m=1,2,3 и 4. Общее число лестниц типа F_4 равно 104.

Далее исследуем случай лиева типа E_6. Используем представление из [3] системы положительных корней типа E_6 следующей диаграммой

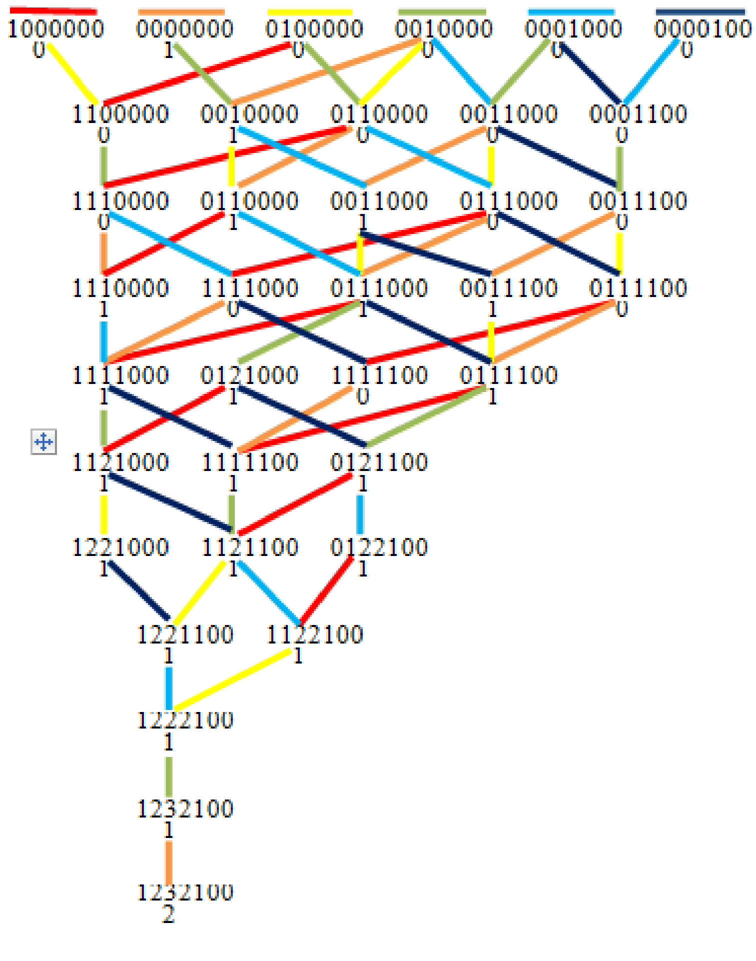


Рисунок 3 – диаграмма для типа E_6

Число одноступенчатых лестниц равно $|\Phi^+|$=36.

Далее находим числа не одноступенчатых лестниц. Замечаем, что если выполнялось условие r$\leq s$, т.е. от корня r можно спуститься до корня s по связному пути.

Подробнее рассмотрим случай 2-х ступенчатых лестниц. Возьмем корень r = 100000(0). Так как он простой корень, то всякий инциндентный с r корень лежит в $\{r\}^+$. Все остальные корни с r неинциндентны и будут составлять двухступенчатую лестницу с корнем r. И так с каждым из 36 корней. Далее беру корень этой же высоты и так же с каждым их 36 корней получаю 2-х ступенчатую лестницу. Если корни одной высоты, то идем слева на права. В итоге получаем 204 двухступенчатых лестниц.

Аналогично, находим число 351 всех 3-х ступенчатых лестниц, 204 всех4-х ступенчатых лестниц и 36 всех 5-ти ступенчатые лестниц, а также общее число лестниц $|\Phi^+|$+204+351+204+36+1=832**.** Доказана

Лемма 3.2. Число m-ступенчатых лестниц (или множество углов) в алгебре NФ(K) типа E_6 равно 36, 204, 351, 204, 36 и 1, соответственно случаям m = 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Общее число лестниц типа E_6 равно 104.

С учетом редукции из параграфа 2, доказательство теоремы А завершается.

4 Доказательство теоремы Б

Доказательство аналогично доказательству теоремы А.

Известное при скручивании соответствие показывает число нормальных D- инвариантных подгрупп группы U типа ${}^3D_4$ при |K| > 4 совпадает с числом, указанным в лемме 2.2

Для лиева типа F_4 соответствие показывает число нормальных D - инвариантных подгрупп группы U типа F_4 при 2K=K, совпадает с числом, указанным в лемме 3.1. Известное при скручивании соответствие показывает, что этому же числу равно число нормальных D- инвариантных подгрупп группы U типа $^2E_6$, при |K|>4.

Лемма 4.1 Число D – инвариантных идеалов алгебры NФ(K) типа F_4 над полем K, 2K=K равно 104.

Для лиева типа E_6 соответствие показывает число нормальных D - инвариантных подгрупп группы U типа E_6, совпадает с числом, указанным в лемме 3.2.

Лемма 4.2 Число D – инвариантных идеалов алгебры NФ(K) типа E_6 над полем K равно 832, |K|>2.

С учетом редукции теоремы 1, доказательство теоремы Б завершается.

5 Замечание о типах E_7 и E_8

Для типа E_7 число одноступенчатых лестниц равно $|\Phi^+|$=63. Далее находим числа не одноступенчатых лестниц.

Число 2-х и 5-ти ступенчатых лестниц = 546, 3-х и 4-х ступенчатых - 1470 , 6-ти ступенчатых - 63 , 7-ми ступенчатых - 1 . Всего лестниц $|\Phi^+|$+546+1470+1470+546+63+1= 4159.

Диаграмма E_7 имеет вид:

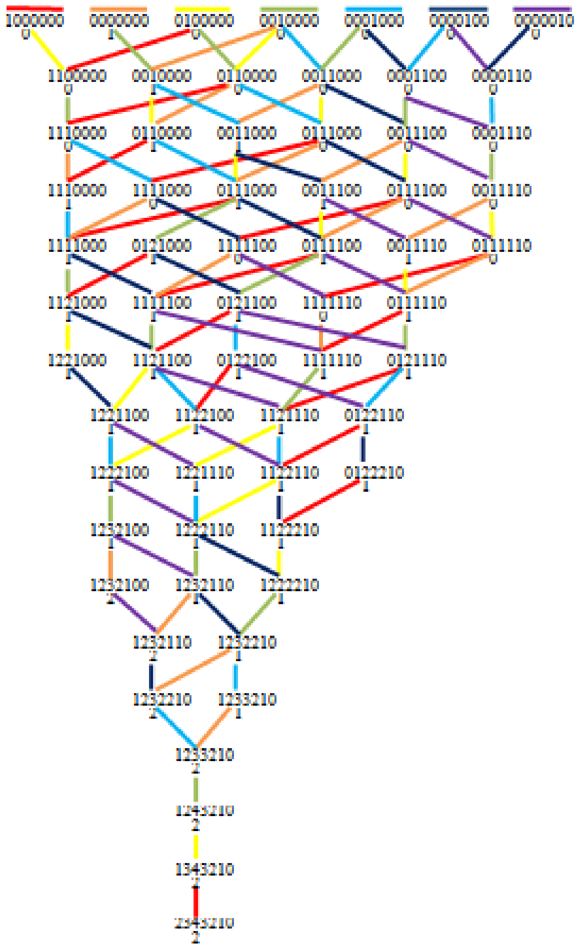


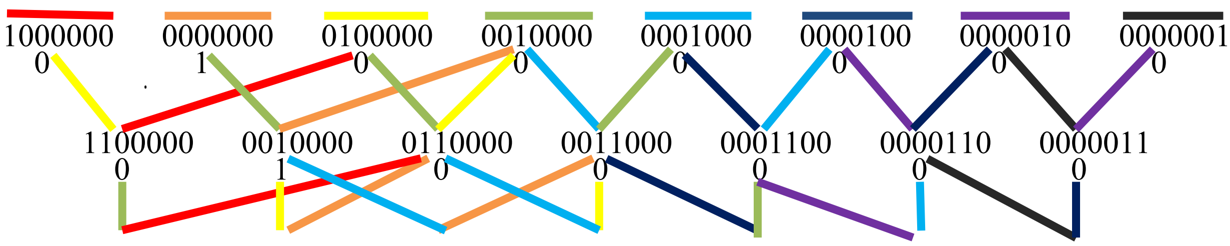
Рисунок 4 – диаграмма для типа E_7

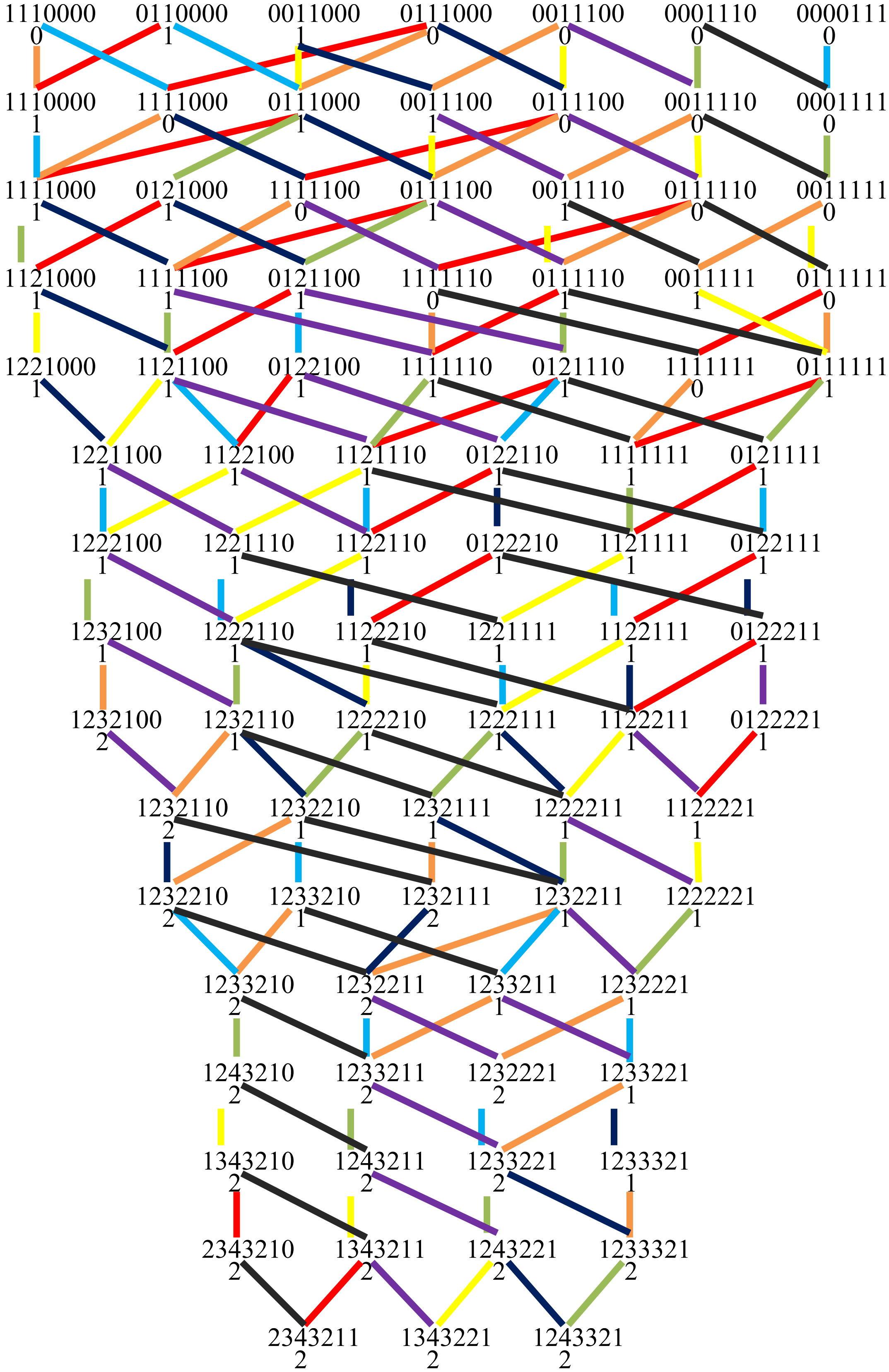
Для типа E_8 число одноступенчатых и 7-ми ступенчатых лестниц равно 120.

Число 2-х и 6-ти ступенчатых лестниц = 1540, 3-х и 5-ти ступенчатых - 6120, 4-х ступенчатых - 9518 , 8-ми ступенчатых - 1 .

Всего лестниц $|\Phi^+|$+1540+6120+9518+6120+1540+120+1=25079.

Диаграмма E_8 имеет вид:




1110000 0 0110000 1 0011000 1 0111000 0 0011100 0 0001110 0 0000111 0
1110000 1 1111000 0 0111000 1 0011100 1 0111100 0 0011110 0 0001111 0
1111000 1 0121000 1 1111100 0 0111100 1 0011110 1 0111110 0 0011111 0
1121000 1 1111100 1 0121100 1 1111110 0 0111110 1 0011111 1 0111111 0
1221000 1 1121100 1 0122100 1 1111110 1 0121110 1 1111111 0 0111111 1
1221100 1 1122100 1 1121110 1 0122110 1 1111111 1 0121111 1
1222100 1 1221110 1 1122110 1 0122210 1 1121111 1 0122111 1
1232100 1 1222110 1 1122210 1 1221111 1 1122111 1 0122211 1
1232100 2 1232110 1 1222210 1 1222111 1 1122211 1 0122221 1
1232110 2 1232210 1 1232111 1 1222211 1 1122221 1
1232210 2 1233210 1 1232111 2 1232211 1 1222221 1
1233210 2 1232211 2 1233211 1 1232221 1
1243210 2 1233211 2 1232221 2 1233221 1
1343210 2 1243211 2 1233221 2 1233321 1
2343210 2 1343211 2 1243221 2 1233321 2
2343211 2 1343221 2 1243321 2

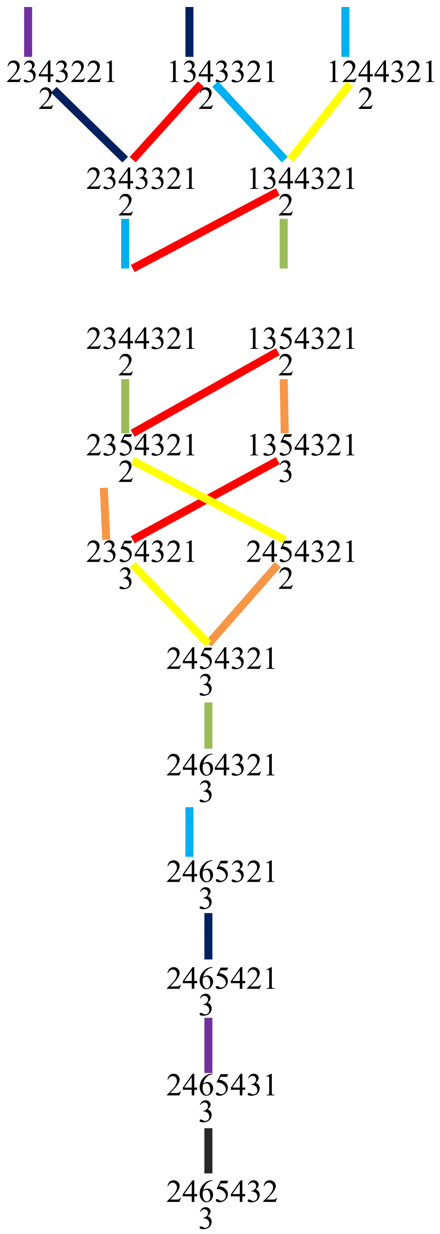


Рисунок 5 – диаграмма для типа E_8

Замечание: Диаграммы взяты из [3]. В параграфах 4 - 5, данные о количестве m-ступенчатых лестниц взяты из [5].

Основные результаты исследования докладывались в СФУ в 2016 году на научно - техническойх конференции студентов, аспирантов и молодых ученых <<МОЛОДЕЖЬ И НАУКА>> с международным участием (Красноярск: СФУ, 2016).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы получены и доказаны две теоремы:

Теорема А. Число D – инвариантных идеалов алгебры NФ(K) над полем K равно:

7 для типа G_2*, 6K=K;*

104 для типа F_4*, 2K=K;*

832 для типа E_6*, |K|>2.*

Теорема Б. Число нормальныхD – инвариантных подгрупп в группе UG(K) равно:

7 при G= G_2*, 6K=K, или G =* ${}^3D_4$ *, |K|* > 4*;*

104 при G=F_4 *, 2K=K, или G=* ${}^2E_6$ *, |K|>2.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Egorychev, G. P. Enumeration of characteristic subgroups of unipotent Lie-type groups / G. P. Egorychev, V.M. Levchuk. – New-York: 1995. P. 65– 68.
2. Egorychev, G. P. Enumeration in the Chevalley algebras / G.P. Egorychev, V.M. Levchuk //ACM SIGSAM Bulletin. – 2009. - № – 2. – P. 20 – 34.
3. Levchuk, V. M. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type / V. M. Levchuk, G.S. Suleimanova. – J. Algebra, 2012. P. 98 – 116.
4. Petersen, T. K. Eulerian Numbers / T. Kyle Petersen // Department of Mathematical Sciences DePaul University Chicago, IL, USA. –2015. – №.18. – P. 279 – 280.