Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

/В.В. Шайдуров

«13» 06 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧЕ О ЧИСЛЕ РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук 18.06.16 А. П. Ляпин

Выпускник 18.06.16 Н. А. Лисовский

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Вычислительные алгоритмы в задаче о числе решеточных путей» содержит 29 страниц текстового документа, 1 приложение, 16 использованных источников, 5 листов графического материала.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ, РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЗАДАЧА О ЧИСЛЕ РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ.

Цель работы - разработать и запрограммировать алгоритм вычисления производящей функции для числа путей на целочисленной решетке.

В результате работы был разработан и запрограммирован алгоритм нахождения производящих функций для числа путей на целочисленной решетке.

Актуальность работы обуславливается широким использованием разностных уравнений. В частности, многомерные производящие функции используются в теории цифровых многомерных фильтров, в перечислительной комбинаторике и теории вероятностей.

Выводы: была рассмотрена проблематика нахождения производящих функций.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Всем, кто изучал математику, хорошо известен метод конечных разностей, который используется для аппроксимации непрерывного уравнения дискретным. Но исчисление конечных разностей пригодилось не только для аппроксимации, оно развивалось параллельно основным разделам математического анализа и имеет свою теоретическую базу для решения различных задач. Основными задачами в исчислении конечных разностей являются интерполирование и суммирование функций. С последней задачей тесно связана задача решения уравнений в конечных разностях. Задача суммирования тесно связана с производящими функциями. Как в математической статистике, так и в комбинаторике невозможно переоценить значение производящих функций. Зная производящую функцию решения, можно найти решение для большого количества комбинаторных задач.

Дадим общую постановку задачи. Дано разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{A} \subset \mathbb{Z}^n} c_\alpha f(x+\alpha) = 0, x \in \mathbb{Z}^n, \tag{0.1}$$

где переменная $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$—n-мерный вектор, а константы α имеют вид $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

С начальными(краевыми) условиями вида

$$f(x) = \phi(x), x \in \mathbf{M} \subset \mathbb{Z}^n. \tag{0.2}$$

Необходимо найти производящую функцию решения задачи (0.1) с начальными условиями (0.2).

1 Задача о числе путей на целочисленной решетке

1.1 Постановка задачи

1.1.1 Постановка задачи при n=1

При $n = 1$ имеем, $\mathbb{Z}$ — целочисленный луч, а $\mathbb{Z}_+$ его неотрицательной частью. Зададим шаги $\alpha \in \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} \subset \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{A}} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, x \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

где c_α — некоторые константы, а α—шаги.

Сформулируем задачу Коши. Найти решение уравнения (1.1) совпадающее с заданной функцией ϕ

$$f(x) = \phi(x), x \in \mathbf{X} \subset \mathbb{Z}_+, \tag{1.2}$$

Размер множества $\mathbf{X}$ зависит от α.

1.1.2 Постановка задачи при n=2

При $n = 2$ задача Коши примет вид

$$\sum_{\beta \in \mathbf{B}} \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} c_{\alpha\beta} f(x + \alpha, y + \beta) = 0, (x, y) \in \mathbb{Z}_+^2, \tag{1.3}$$

Характеристическим многочленом последовательности задаваемой уравнением (1.2) будем называть многочлен вида

$$P(z) = \sum_{(x,y) \geq 0} \frac{c_{\alpha\beta}}{z^x}.$$

Многогранником Ньютона $\mathbf{M}$ характеристического многочлена $P(z)$ будем называть выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^2$ элементов множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Где

$\mathbf{A} \subset \mathbb{Z}_+$ и $\mathbf{B} \subset \mathbb{Z}_+$ — некоторые фиксированные множества точек 2-мерной целочисленной решетки.

$$f(x, y) = \phi(x, y), (x, y) \in \mathbf{M}. \tag{1.4}$$

1.2 Примеры путей на целочисленной решетке

Известны разные комбинаторные задачи вида (0.1, 0.2), например, пути Дика [3], числа Деланноя, вычисления элементов в последовательности Фибоначчи (3.1, с. 12) , в треугольнике Паскаля и многое др. Самой известной задачей является нахождение чисел Каталана или, что то же самое, нахождение количества правильных скобочных последовательностей. Известно [17], как минимум 60 различных задач, в которых встречаются числа Каталана. Также известно, что существует множество комбинаторых задач, которые сводятся к отысканию путей Дика. В частности задача о числе путей на целочисленной решетке является частным случаем обобщенных путей Дика. Рассмотрим некоторые задачи.

1.2.1 Последовательность Фибоначчи

Известный пример одномерного разностного уравнения. Последовательность значений вычисляется по формуле

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2).$$

С начальными условиями $f(0) = 1, f(1) = 1$.

1.2.2 Пути Дика

Разностное уравнение путей Дика имеет вид

$$f(x, y) = f(x-1, y+1) + f(x-1, y-1).$$

В классической постановке задача рассматривается в $\mathbb{Z}_+^2$.

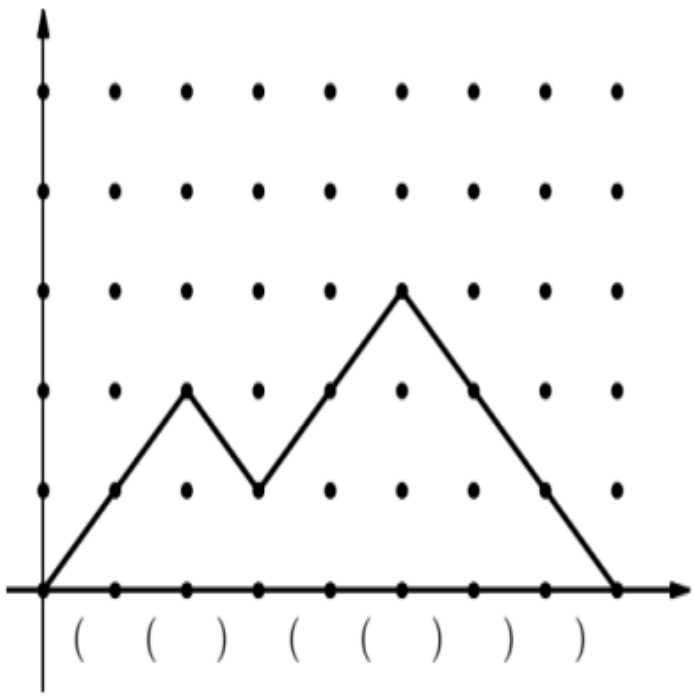

Рисунок 1 — Пути Дика

Из рисунка видно, что путям Дика можно сопоставить правильные скобочные последовательности, взяв вектор $(1, 1)$ в качестве правой скобки, а вектор $(1, -1)$ в качестве левой скобки. Поэтому число Дика D_{2n} равняется $n-$му числу Каталана C_n.

1.2.3 Числа в треугольнике Паскаля

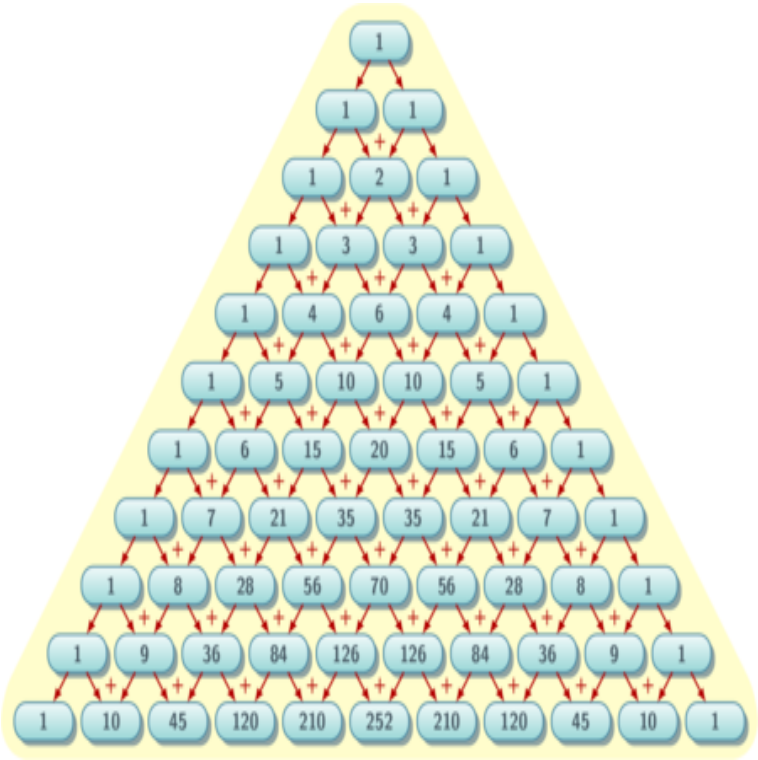

Рисунок 2 — Треугольник Паскаля

Хорошо известные всем числа Паскаля можно задать разностным уравнением вида

$$f(x, y) = f(x - 1, y) + f(x, y - 1).$$

Значения функции в точке являются биномиальными коэффициентами. Также эту задачу можно интерпретировать так: сколькими путями шахматная ладья может добраться из точки $(0, 0)$ в точку (m, n).

2 Производящие функции на целочисленной решетке

2.1 Производящие функции в одномерном случае

Производящей функцией решения задачи (1.1) с начальными данными (1.2) называют функцию $F(z), z \in \mathbb{C}$ вида

$$F(z) = \sum_{x \geq 0} \frac{f(x)}{z^x}. \tag{2.1}$$

А.Муавр [16] рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \ldots$ с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, образующими возвратные последовательности, т.е. удовлетворяющими соотношению вида $c_0 a_{m+p} + c_1 a_{m+p-1} + \cdots + c_m a_p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, где c_j некоторые постоянные. Оказалось, что такие ряды всегда изображают рациональные функции. Важные особенности рациональных производящих функций рассмотрены в 4 главе [12].

Известно [13], что производящую функцию (2.1) можно представить в виде:

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

где $P(z)$— характеристический многочлен разностного уравнения (1.1), а $Q(z)$ — некоторый полином зависящий от начальных данных.

2.2 Производящие функции в двумерном случае

В двумерном случае производящая функция принимает вид

$$F(z, w) = \sum_{(x,y) \geq 0} \frac{f(x, y)}{z^x w^y}.$$

Можно ли аналогично утверждать, что производящая функция от двух переменных также будет рациональной? Этот вопрос уже не так очевиден, но в [4] доказана теорема, что производящая функция решения задачи (1.3,1.4) ра-

циональна тогда и только тогда, когда рациональна производящая функция начальных данных.

2.3 Общие идеи нахождения двумерной производящей функции

Идеи в основе решения задачи: теория многомерных разностных уравнений [4] и формулы для вычисления производящих функций.

Рассмотрим некоторую точку на $\mathbb{Z}_+^2$ с координатами (x, y), удаленную от начала координат. Если заданы некоторые шаги (α_i, β_i), то в эту точку можно попасть из точек с координатами $(x - \alpha_i, y - \beta_i)$ (рис.3)

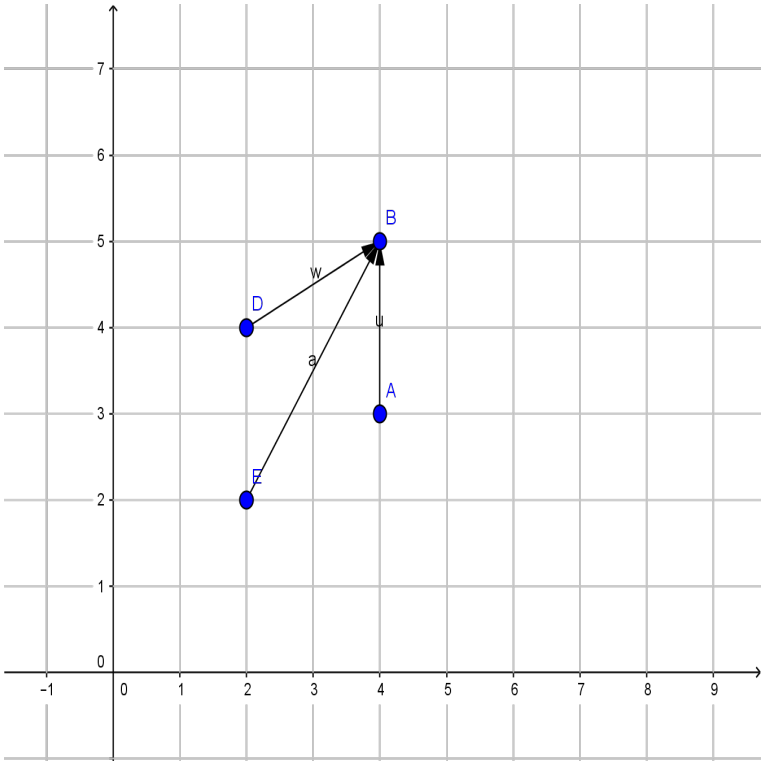

Рисунок 3 — Пример шагов

где $A = (x - \alpha_1, y - \beta_1), D = (x - \alpha_2, y - \beta_2), E = (x - \alpha_3, y - \beta_3), B = (x, y)$.

Тогда число путей f(x,y) равно сумме числа путей в этих точках.

$f(x, y) = f(x - \alpha_1, y - \beta_1) + f(x - \alpha_2, y - \beta_2) + f(x - \alpha_3, y - \beta_3)$.

Запишем формулу для n путей в общем виде

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f(x-\alpha_i, y-\beta_i). \tag{2.2}$$

Обозначим $h_0^1 = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\alpha_i\}$ и $h_0^2 = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\beta_i\}$, $h_i^1 = h_0^1 - \alpha_i$, $h_i^2 = h_0^2 - \beta_i$. Произведем замену в (2.2) $x \to x + h_0^1, y \to y + h_0^2$, тогда

$$f(x+h_0^1, y+h_0^2) = \sum_{i=1}^{n} f(x+h_i^1, y+h_i^2).$$

Перепишем в виде

$$f(x,y) = c_i \sum_{i=0}^{n} f(x+h_i^1, y+h_i^2), \tag{2.3}$$

где

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ -1, & \text{если } i > 0. \end{cases}$$

Таким образом, число путей на целочисленной решетке можно описать при помощи линейного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Известно, что в общем случае решением разностных уравнений могут быть функции произвольного вида, поэтому для того, чтобы задача имела единственное решение, необходимо задать начальные данные.

Известно [4], что для уравнения (2.3) начальные данные необходимо задавать на множестве

$$\mathbf{X} = \{\mathbb{Z}_+^2 \setminus h + \mathbb{Z}_+^2\},$$

где $h = (h_0^1, h_0^2)$.

Для поставленной задачи о числе путей начальные данные однозначно определяются набором шагов (α, β). Будем считать, что $f(0,0) = 1$. Так, чтобы найти начальные данные на направлении $(x, 0), x = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим

только те шаги для которых $\beta_i = 0.$, если таких шагов нет, то, очевидно, что $f(x,0), x = 1,2,\ldots,$ иначе мы получаем одномерное разностное уравнение вида

$$\sum_{i\in\mathbf{B}} c_i f(x+h_i^1,0) = 0,$$

где $\mathbf{B} = \{h_i : h_i^2 = h_0^2\}$,

причем,

$$f(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < 0, \\ 1, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Значения $f(x,0)$ при $x \geq 1$ можно рекурсивно вычислить используя данное разностное уравнение.

Вообще говоря, вычислять значения начальных данных $f(x,y_k)$, $x = 0,1,\ldots$ логично вычислять через значения $f(x,y_i)$, таких, что $y_i < y_k$, $i = \overline{0,k-1}$ полагая, что все $f(x,y_i), 0 \leq y_i < y_k$, и что $f(x,y) = 0, y < 0$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для направлений вдоль оси OY.

Исходя из геометрического смысла задачи, положим $f(x,y) = 0, x < 0$ или $y < 0$ и $f(x,y) = 1$, то есть будем считать, что в начало координат можно попасть единственным способом. Этих данных достаточно, чтобы, используя данное разностное уравнение, вычислить значение $f(x,y)$ в любой точке $(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2$. Впрочем, известно [4], что можно выписать явное решение, используя понятие фундаментального решения разностного уравнения [4]. Аналогичные рассуждения позволяют нам получить формулу для нахождения числа путей на целочисленной решетке

$$F(z,w) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_+^2} \frac{f(x,y)}{z^x w^y}.$$

.

3 Примеры

3.1 Нахождение производящей функции для чисел Фибонначи

Рассмотрим уравнение при $n = 1$.

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2),$$

$$f(0) = 1, f(1) = 1.$$

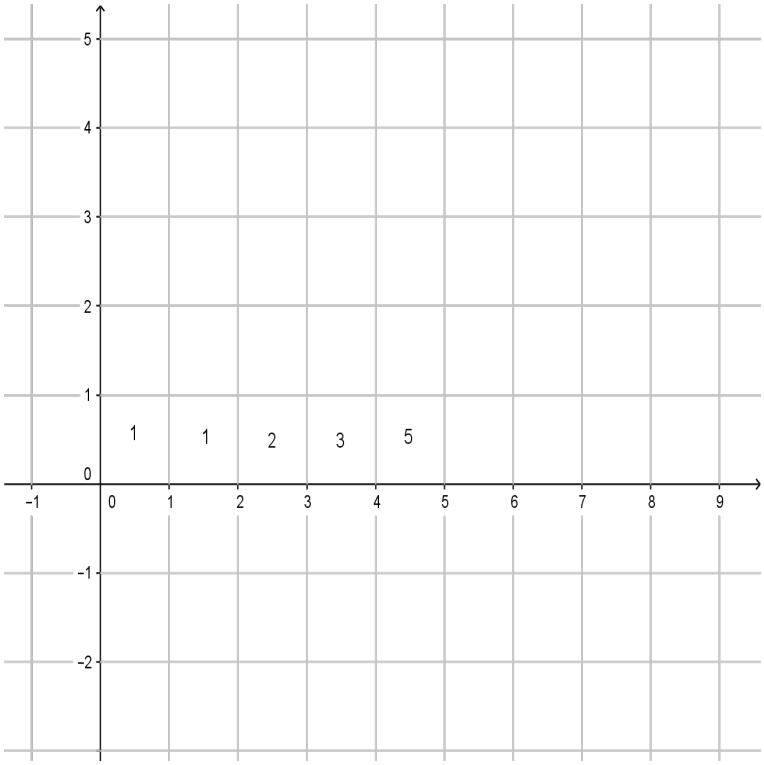

Рисунок 4 — Первые члены последовательности Фибоначчи

На рисунке показано, сколькими способами можно попасть из точки 0 в любую точку, так как у нас есть только шаги длинны 1 и 2, то в точку 1 можно попасть одним способом, используя шаг длинны 1, а в точку 2 можно попасть уже 2 способами, из точки 0 и из точки 1.

Преобразуем его к виду

$$f(x+2) - f(x+1) - f(x) = 0,$$

далее представим в виде

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x+2) - \sum_{x=0}^{\infty} f(x+1) - \sum_{x=0}^{\infty} f(x+0) = 0,$$

разделим обе части на z^x и придем к виду

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x+2)}{z^x} - \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x+1)}{z^x} - \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} = 0.$$

Сделаем замену $x = x - 2$ для первой суммы и $x = x - 1$ для второй суммы

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{f(x)}{z^{x-2}} - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{f(x)}{z^{x-1}} - \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} = 0.$$

Выделим производящую функцию $F(z)$

$$z^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} - z \sum_{x=1}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} - F(z) = 0,$$

$$z^2(F(z) - \sum_{x=0}^{1} \frac{f(x)}{z^x}) - z(F(z) - \sum_{x=0}^{0} \frac{f(x)}{z^x}) - F(z) = 0,$$

$$z^2(F(z) - f(0) - \frac{f(1)}{z}) - z(F(z) - f(0)) - F(z) = 0,$$

$$z^2F(z) - zF(z) - F(z) + zf(0) - z^2f(0) - zf(1) = 0,$$

$$(z^2 - z - 1)F(z) = z^2f(0),$$

$$F(z) = \frac{z^2f(0)}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

3.2 Общий вид производящей функции при n=1

Найдем общую формулу для отыскания производящей функции $F(z)$.

Имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha f(x+\alpha) = 0, \alpha \in \mathbf{A}.$$

Где коэффициент c_α принимает значение 1 при $\alpha = n$ и -1 в остальных случаях. А также

$$f(x) = \phi(x), x \in \mathbf{M}.$$

Проделаем те же шаги, что и в (3.1, с. 12)

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha f(x+\alpha) = 0,$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{c_\alpha f(x+\alpha)}{z^x} = 0,$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c_n f(x+n)}{z^x} + \ldots + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{c_0 f(x)}{z^x} = 0,$$

$$c_n \sum_{x=n}^{\infty} \frac{f(x)}{z^{x-n}} + \ldots + c_0 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} = 0,$$

$$c_n z^n \sum_{x=n}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} + \ldots + c_0 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{z^x} = 0,$$

$$c_n z^n (F(z) - \sum_{x=0}^{n-1} \frac{f(x)}{z^x}) + \ldots + F(z) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k z^k F(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k z^k \sum_{x=0}^{k-1} \frac{f(x)}{z^x} = 0,$$

$$F(z) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k z^k \sum\limits_{x=0}^{k-1} \frac{f(x)}{z^x}}{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k}.$$

3.3 Нахождение производящей функции для чисел в треугольнике Паскаля

Рассмотрим двумерное разностное уравнение

$$f(x,y) = f(x,y-1) + f(x-1,y).$$

И начальные условия

$$f(0,0) = 1, f(0,1) = 1, f(1,0) = 1.$$

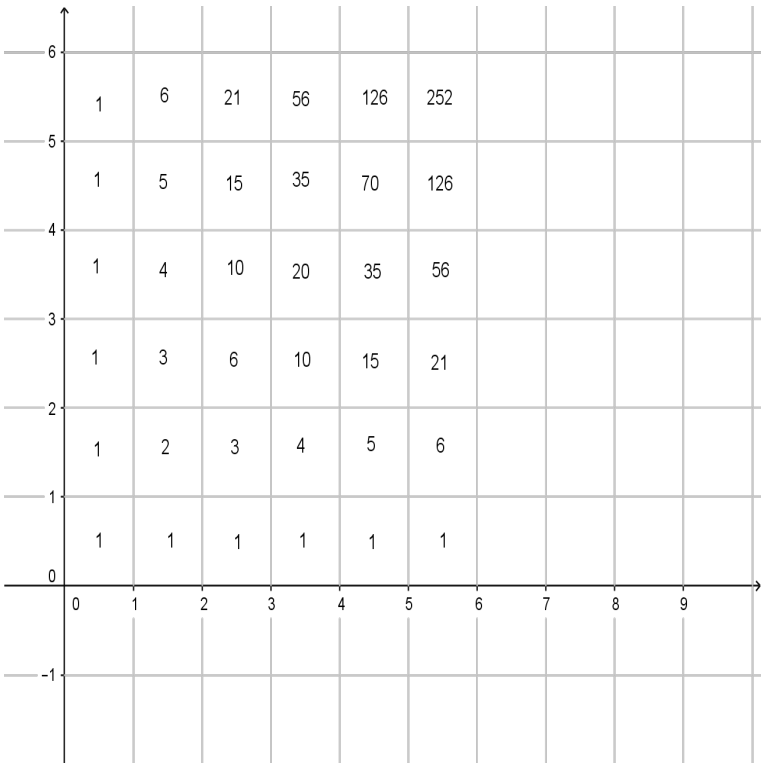

Рисунок 5 — Треугольник Паскаля

На рисунке показано значение функции в точках сетки при заданных шагах.

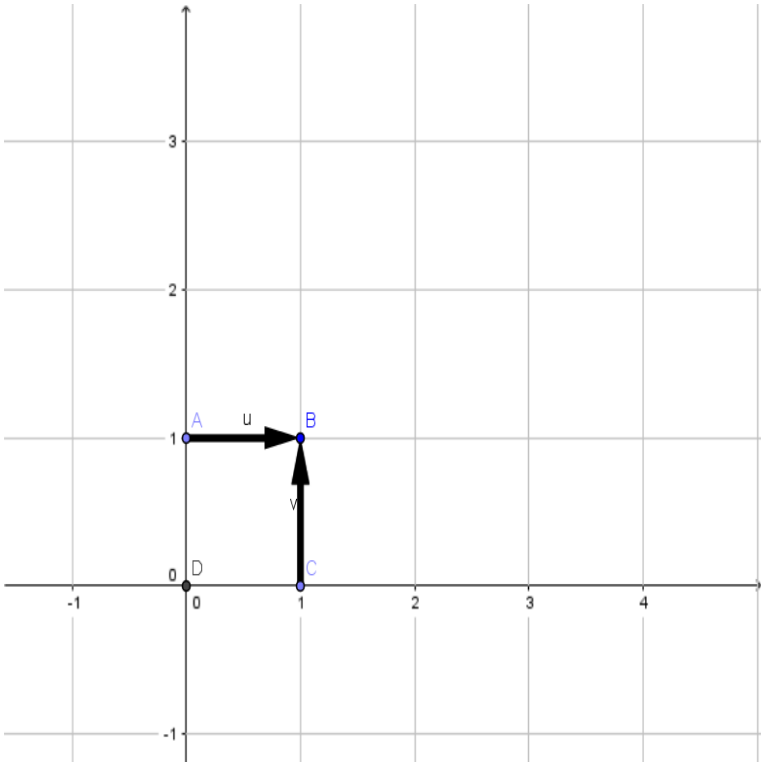

Рисунок 6 — Многогранник Ньютона для поставленной задачи

ABCD образует многогранник Ньютона для заданных шагов $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

По аналогии с одномерным случаем преобразуем исходное уранение к виду

$$f(x+1,y+1) = f(x+1,y) + f(x,y+1),$$

$$f(x+1,y+1) - f(x+1,y) - f(x,y+1) = 0.$$

Разделим обе части на z^x и w^y

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x+1,y+1)}{z^x w^y} - \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x+1,y)}{z^x w^y} - \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,y+1)}{z^x w^y} = 0.$$

Аналогично одномерному случаю нам нужно получить производящую функцию $F(z,w)$ вида

$$F(z,w) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y}.$$

Произведем замену $x = x-1$ и $y = y-1$ для первой суммы, $x = x-1$ для второй суммы и $y = y-1$ для третьей суммы

$$zw\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} - z\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} - w\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} = 0,$$

$$zw\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} - z\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} - w\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y} = 0,$$

$$zw\left(F(z,w) - \sum_{x=0}^{\infty}\frac{f(x,0)}{z^x} - \sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(0,y)}{w^y} + 1\right) - \tag{3.1}$$

$$-z\left(F(z,w) - \sum_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,0)}{w^y}\right) - w\left(F(z,w) - \sum_{x=0}^{\infty}\frac{f(0,y)}{z^x}\right) = 0.$$

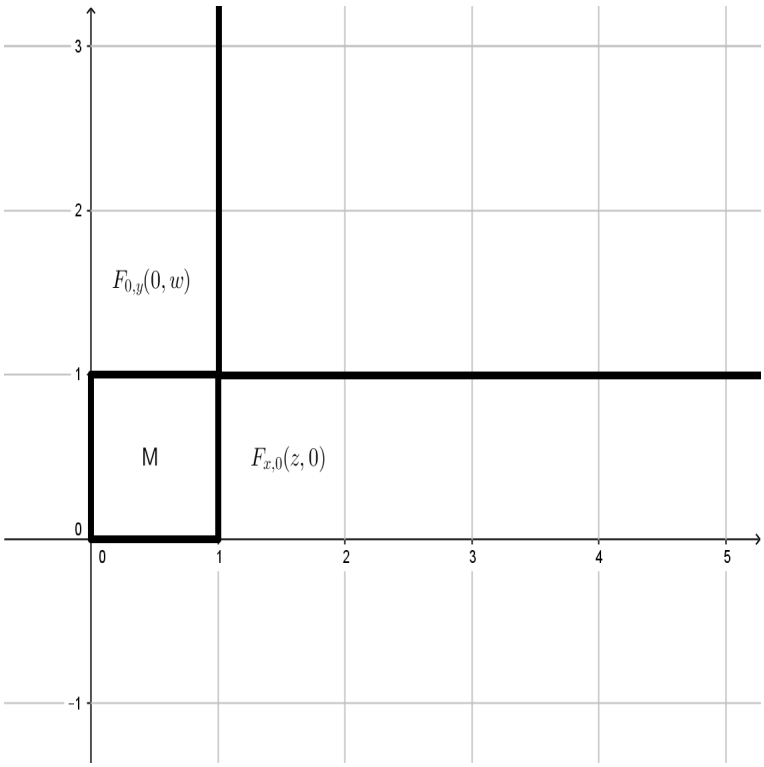

Рисунок 7 — Пересечение одномерных производящих функций

Поясним, что произошло на прошлом шаге. Для того, чтобы выразить $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\sum\limits_{y=0}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y}$ из первой суммы, нам нужно к значениям, которые у нас есть $\sum\limits_{x=1}^{\infty}\sum\limits_{y=1}^{\infty}\frac{f(x,y)}{z^x w^y}$ прибавить значения на нулевых слоях по x и по y, которыми соответственно будут производящие функции $F_{x,0}(z,0)$ и $F_{0,y}(0,w)$, но так как эти производящие функции пересекаются в области , то нам нужно прибавить значение находящееся в этой области,которое в условиях задачи равно 1.

Вычислим $F_{x,0}(z,0)$ и $F_{0,y}(0,w)$

$$F_{x,0}(z,0) = \frac{z}{z-1},$$
$$F_{0,y}(0,w) = \frac{w}{w-1}.$$

Подставим в (3.1)

$$zw\left(F(z,w) - \frac{z}{z-1} - \frac{w}{w-1} + 1\right) - z\left(F(z,w) - \frac{w}{w-1}\right) -$$
$$-w\left(F(z,w) - \frac{z}{z-1}\right) = 0,$$

$$F(z,w) = \frac{\frac{z^2w}{z-1} + \frac{zw^2}{w-1} - zw - \frac{z^2}{z-1} - \frac{w^2}{w-1}}{zw - z - w},$$

$$F(z,w) = \frac{zw}{zw - z - w}.$$

3.4 Общий вид производящей функции при n=2

Найдем общую формулу для отыскания производящей функции $F(z,w)$. Имеем

$$\sum_{\beta=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{n} c_{\alpha\beta} f(x+\alpha, y+\beta) = 0, \alpha \in \mathbf{A}, \beta \in \mathbf{B}.$$

Где коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ принимает значение 1 при $\alpha = n$ и $\beta = m$, и -1 в остальных случаях. А также

$$f(x,y) = \phi(x,y), x \in \mathbf{M}.$$

Проделаем те же шаги, что и в (3.3, с. 14)

$$\sum_{\beta=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{c_{\alpha\beta} f(x+\alpha, y+\beta)}{z^x w^y} = 0,$$

$$\sum_{\beta=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{x=\alpha}^{\infty}\sum_{y=\beta}^{\infty} \frac{c_{\alpha\beta} f(x,y)}{z^{x+\alpha} w^{y+\beta}} = 0,$$

$$\sum_{\beta=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{n} z^\alpha w^\beta \sum_{x=\alpha}^{\infty}\sum_{y=\beta}^{\infty} \frac{c_{\alpha\beta} f(x,y)}{z^x w^y} = 0,$$

$$z^n w^m \sum_{x=n}^{\infty}\sum_{y=m}^{\infty} \frac{f(x,y)}{z^x w^y} - z^{n-1} w^m \sum_{x=n-1}^{\infty}\sum_{y=m}^{\infty} \frac{f(x,y)}{z^x w^y} -$$

$$-z^n w^{m-1} \sum_{x=n}^{\infty}\sum_{y=m-1}^{\infty} \frac{f(x,y)}{z^x w^y} - \ldots - z^0 w^1 \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{f(x,y)}{z^x w^y} - F(z,w) = 0,$$

$$z^n w^m \left(F(z,w) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_{i,y}(i,w)}{z^i} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F_{x,i}(z,i)}{w^i} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\phi(i,j)}{z^i w^j} \right) -$$

$$-z^{n-1} w^m \left(F(z,w) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{F_{i,y}(i,w)}{z^i} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F_{x,i}(z,i)}{w^i} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\phi(i,j)}{z^i w^j} \right) -$$

$$-z^n w^{m-1} \left(F(z,w) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_{i,y}(i,w)}{z^i} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F_{x,i}(z,i)}{w^i} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{\phi(i,j)}{z^i w^j} \right) -$$

$$- \ldots - z^0 w^1 \left(F(z,w) - F_{x,0}(z,0) \right) - F(z,w) = 0.$$

Сгруппируем значения при $F(z,w), F(i,w), F(z,i), \phi(i,j)$ и выразим $F(z,w)$

$$F(z,w) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} z^i w^j V_{ij} \left(\sum\limits_{k=0}^{i-1} D_i \frac{F_{k,y}(k,w)}{z^k} + \sum\limits_{l=0}^{j-1} D_j \frac{F_{x,l}(z,l)}{w^l} \right)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} B_{ij} z^i w^j} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} z^i w^j K_{ij} \sum\limits_{k=0}^{i-1} \sum\limits_{l=0}^{j-1} \phi(k,l) z^k w^l}{\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} B_{ij} z^i w^j},$$

где

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, j = m, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$V_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, j = m, \\ 0, & \text{если } i = 0, j = 0, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$D_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$K_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, j = m, \\ 0, & \text{если } i = 0 \text{ или } j = 0, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.5 Алгоритм нахождения производящей функции

Для простоты понимания задачи легче использовать формулу

$$\sum_{\hat{\beta}=0}^{m}\sum_{\hat{\alpha}=0}^{n} c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} f(x-\hat{\alpha}, y-\hat{\beta}) = 0, \tag{3.2}$$

вместо

$$\sum_{\beta=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{n} c_{\alpha\beta} f(x+\alpha, y+\beta) = 0. \tag{3.3}$$

Тогда задачу можно трактовать так: сколькими способами из точки $(0,0)$ можно попасть в точку (x,y), используя шаги $c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{\alpha},\hat{\beta})$, при которых $c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \neq 0$. Эти значения понадобятся нам для рассчетов начальных значений ϕ.

- По формуле (3.3) рассчитываем размер многогранника Ньютона, то есть находим α_{max} и β_{max}.
- По формуле (3.2) рассчитываем начальные значения $\phi(x,y)$, учитывая, что $\phi(0,0) = 1$, так как из этой точки мы ведем отсчет, следовательно, в неё можно попасть одним способом в начале задачи.
- Делим все на z^x и суммируем по $x = 0, 1, 2, \ldots, +\infty$.
- Для каждого элемента суммы по α и β у которых $c_{\alpha\beta} \neq 0$ делаем замену $x = x - \alpha$, $y = y - \beta$.
- Выносим степени z^α и w^β за индекс суммирования.
- Выражаем $F(z,w)$ и находим одномерные производящие функции.
- Собираем все многочлены при $F(z,w)$ в левую часть, остальное переносим в правую часть.
- Делим левую часть на многочлены, стоящие при $F(z,w)$, и получаем компактный вид производящей функции.

С реализацией алгоритма с помощью системы компьютерной алгебры Maple можно ознакомиться в приложении А.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача поиска производящей функции решения задачи о числе путей на целочисленной решетке для одномерного и двумерного случая.

Представлен и запрограммирован алгоритм нахождения производящей функции в двумерном и одномерном случае.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я.Виленкин, А.Н.Виленкин, П.А.Виленкин — Москва : ФИМА МЦНМО, 2006. — 399 с.

2. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд — Москва : ГИФМЛ, 1959. — 400 с.

3. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику / С.К. Ландо — Москва : МЦНМО, 2014. — 224 с.

4. Лейнартас, Е.К. Многомерные разностные уравнения / Е.К. Лейнартас, Д.Е. Лейнартас — Красноярск : СФУ, 2010. — 152 с.

5. Лейнартас, Е. К. Я. О. Тесленко Двумерные разностные уравнения в некоторых за- дачах комбинаторного анализа / Е.К. Лейнартас, Я.О. Тесленко // Вестник Красноярского госуниверситета — 2004. — № 1. — С. 121–123.

6. Лейнартас, Д.Е. О задаче Коши для многомерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами / Д.Е. Лейнартас // Красноярский Государственный Университет — Известия высших учебных заведений — 2002. — № 1. — С. 79-80.

7. Ляпин, А.П. Последовательности Риордана и двумерные разностные уравнения / А.П. Ляпин // Красноярск : СФУ. —2009. — Т. 2, № 2. — С. 210-220.

8. Некрасова, Т.И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Изв. Иркутского гос. ун- та. — Сер. Математика, — 2014, — Т. 9. — С. 91–102.

9. Некрасова, Т.И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки /Т. И. Некрасова // Красноярск : СФУ. — 2012. — Т. 5, № 4. — С. 576-580.

10. Риордан, Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан — Москва : Наука, 1982. — 255 с.

11. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский — Москва : Наука, 1977. — 552 с.

12. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика. / Стенли Р. — Москва : Мир, 1990. — 440 с.

13. Leinartas, E.K. On the Rationality of Multidimentional Recusive Series / E.K. Leinartas, A.P. Lyapin // Journal of Siberian Federal University. — Mathematics & Physics. —2009. — Vol. 2, № 4. — С. 449-455.

14. Lipshitz, L. D-Finite Power Series / L.Lipshitz // Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana. — 1987. — Vol. 122. — С. 353-373.

15. Merlini, D. On Some Alternative Characterizations of Riordan Arrays / Donatella Merlini,Douglas G. Rogers, Renzo Sprugnoli, M. Cecilia Verri // Canadian Journal of Mathematics —1997. — Vol. 49. — С. 301-320.

16. Moivre A. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus / A. de Moivre // Philosophical transactions —Vol. 32 — 1722. — С. 162-178.

17. Информация о числах Каталана [Электронный ресурс] — режим доступа : https://oeis.org/A000108

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы для нахождения производящей функции с шагами $(0,1)(1,0),(1,1)$

```
> restart : with(linalg) :
> TwoDimensionalGeneratingFunction :=proc(A)
  #option trace;
  local i, j, k, l, height, lenght, max_y, max_x, phi, Coef, Fzw, Q, P, Fz, Fw, summP, temp_coef,
      tempQ , tempF , tempP , first_flag, right_part, lower_flag, temp_right, coefficiens,
      multiplicator;
  height := rowdim(A);
  lenght=coldim(A);
  max_y := 0;
  max_x := 0;
   for i from 1 to height do
   if A[i, 1] > max_x then max_x := A[i, 1] end if;
   if A[i, 2] > max_y then max_y := A[i, 2]end if;
  od;

      #Определили размерность многогранника Ньютона, начинаем вычислять
      коэффициенты фи
  # fill with zeros
  for i from -max_x to max_x do
  for j from -max_y to max_y do
 phi[i][j] := 0;
  od;
  od;
  phi[0][0] := 1;
  for i from 0 to max_x do
  for j from 0 to max_y do
  for k  from 1 to height do  # calculate coefficients phi
  phi[i][j] := phi[i][j] + phi[i - A[k, 1]][j - A[k, 2]];
  od;
  od;
  od;
  #calculate coefficients alpha and betta
  Coef[0, 1] := max_x;
  Coef[0, 2] := max_y;
  for i from 1 to height  do
  Coef[i, 1] := max_x - A[i, 1];
   Coef[i, 2] := max_y - A[i, 2];
  od;
  # вычислим
  Q := z^Coef[0, 1] w^Coef[0, 2];
   for i from 1 to height do
  Q := Q-z^Coef[i, 1] w^Coef[i, 2];
  od;
  #calculate one dimensional F for x
  # we need to collect steps on y level, so we need to calculate one dimensional steps for same level
   # we take y steps to calculate Fz on different y levels
  for i from -max_y to max_y do
      # generating fucnctions with y or x <0 equals 0; and fill other with zeroes because we will
      neeed it when we will summ P[i] at next steps
  Fz[i] := 0;
  od;
```

```
for i from -max_x to max_x do
Fw[i] := 0;
od;
# i define this coefficients cuz idk why it is calculating wrong inside the cycle
temp_coef := Coef;
for j from 0 to height do
temp_coef[j, 2] := temp_coef[j, 2] - max_y - 1;
od;

# start of calculating one dimensional generating functions
for i from 0 to max_y - 1 do
    # outter cycle for each component in Fz, this cycle will run over every y level and collect each
    component of Fz
 # Q will not change exept it w multiplcitator so we will calculate it once at every i iteration
# now we need to transform steps for calculating generating functions on each level
print("i=", i);
for j from 0 to height do
temp_coef[j, 2] := temp_coef[j, 2] + 1;
od;
tempQ := z^(Coef[0, 1]);
 for j from 1 to height do
if temp_coef[j, 2] = i then tempQ := tempQ - z^(Coef[j, 1]) end if;
od;

    #now we have steps for every level, as we can see all other steps which have their coefficients
     <0 will not change generating function at first step

    # but if we will calculate it on other steps (when y=1,2 etc.) this elements will point at
    generating functions of lower orders

    # so the left part of the equation will not change and the right part will be equal 0 or will
    have generating functions of lower orders.
for j from 0 to height do
 tempP[j] := 0;
od;
for j from 0 to height do # lets calculate Fz
right_part := 0;
first_flag := -1;
lower_flag := 0;
temp_right := 0;
if j = 0 then first_flag := 1 end if;
    # we need this flag for element with higher coefficients because this element is in right part of
    the equation
if temp_coef[j, 2] ≠ i then first_flag := 0 end if;
for k from 0 to temp_coef[j, 1] - 1 do
tempP[j] := tempP[j] + z^(temp_coef[j, 1]) . (first_flag·phi[k][i]) / z^k;
od;
#here we calculated left part
#now lets calculate right part
```

```
if temp_coef[j, 2] ≠ i then lower_flag := 1 end if;
temp_right := lower_flag·z^(temp_coef[j, 1])·Fz[temp_coef[j, 2]];
for k from 0 to temp_coef[j, 1] − 1 do
temp_right := temp_right − (lower_flag·z^(temp_coef[j, 1])phi[k][temp_coef[j, 2]]) / z^k
od;

Fz[i] := Fz[i] + tempP[j] + temp_right;
od;
Fz[i] := Fz[i] / tempQ;
od;


# make some preparations before steps like in Fz
#now we need to find generating functions for z steps (Fwi)




Coef[0, 1] := max_x;
Coef[0, 2] := max_y;
for i from 1 to height do
Coef[i, 1] := max_x - A[i, 1];
 Coef[i, 2] := max_y - A[i, 2];
od;

 coefficiens := Coef;
for j from 0 to height do
coefficiens[j, 1] := coefficiens[j, 1] − max_x − 1;
coefficiens[j, 2] := Coef[j, 2];
od;


 for i from 0 to max_x - 1 do
print("i=", i);
for j from 0 to height do
coefficiens[j, 1] := coefficiens[j, 1] + 1;
od;
tempQ := w^(Coef[0, 2]);
 for j from 1 to height do
if coefficiens[j, 1] = i then tempQ := tempQ − w^(Coef[j, 2]) end if;
od;
for j from 0 to height do
 tempP[j] := 0;
od;
for j from 0 to height do # lets calculate Fw
right_part := 0;
first_flag := -1;
```

```
lower_flag := 0;
temp_right := 0;
if j = 0 then first_flag := 1 end if;
if coefficiens[j, 1] ≠ i then first_flag := 0 end if;
for k from 0 to coefficiens[j, 2] − 1 do
tempP[j] := tempP[j] + w^(coefficiens[j, 2]) · (first_flag·phi[i][k]) / w^k;
od;

if coefficiens[j, 1] ≠ i then lower_flag := 1 end if;
temp_right := lower_flag·w^(coefficiens[j, 2])·Fw[coefficiens[j, 1]];
for k from 0 to coefficiens[j, 2] − 1 do
temp_right := temp_right − (lower_flag·w^(coefficiens[j, 2])phi[coefficiens[j, 1]][k]) / w^k
od;

Fw[i] := Fw[i] + tempP[j] + temp_right;
od;
Fw[i] := Fw[i] / tempQ;
od;

# calculating of one dimensional generating functions is finished
# lets calculate Fzw
Fzw := 0;



Coef[0, 1] := max_x;
Coef[0, 2] := max_y;
for i from 1 to height do
Coef[i, 1] := max_x - A[i, 1];
Coef[i, 2] := max_y - A[i, 2];
od;

for i from 0 to height do #this cycle will collect all steps
P := 0;
first_flag := -1;
if i = 0 then first_flag := 1 end if;
multiplicator := first_flag·z^(Coef[i, 1])w^(Coef[i, 2]);
for j from 0 to Coef[i, 2] - 1 do
P := P + (multiplicator·Fz[j]) / w^j;
od;
for j from 0 to Coef[i, 1] -1 do
P := P + (multiplicator·Fw[j]) / z^j;
od;
for j from 0 to Coef[i, 1] - 1 do
 for k from 0 to Coef[i, 2] -1 do
```

$$P := P - \frac{multiplicator \cdot \mathrm{phi}[j][k]}{z^j w^k};$$

od;
od;
$Fzw := Fzw + P$;
od;
$$Fzw := \frac{Fzw}{Q};$$
$simplify(Fzw)$;
end proc;

> $A := array([[1, 0], [0, 1], [1, 1]])$;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

> $TwoDimensionalGeneratingFunction(A)$;

"i=", 0
"i=", 0

$$\frac{z\,w}{w\,z - w - z - 1} \quad \textbf{(3)}$$