Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(2), 283–288

УДК 517.55

Инвариантный оператор Лапласа в матричном шаре

Гулмирза Х. Худайберганов*
Аскар М. Халкназаров
Механико-математический факультет,
Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, Ташкент 100174
Узбекистан

Получена 29.11.2011, окончательный вариант 29.12.2011, принята к печати 20.01.2012

В статье найден инвариантный оператор Лапласа в матричном шаре и решена задача Дирихле.

Ключевые слова: оператор Лапласа, матричный шар, задача Дирихле.

Пусть $\mathbb{C}[m\times m]$ — пространство $[m\times m]$-матриц с комплексными элементами. Обозначим через $\mathbb{C}^n[m\times m]$ декартово произведение n экземпляров $\mathbb{C}[m\times m]$:

$$\mathbb{C}^n[m\times m] = \underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times ...\times \mathbb{C}[m\times m]}_{n\text{-}раз}.$$

Множество $B = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathbb{C}^n[m\times m] : I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle > 0\}$, где $\langle Z, Z\rangle = Z_1{Z_1}^* + Z_2{Z_2}^* + ... + Z_n{Z_n}^*$ — "скалярное" произведение, $I^{(m)}$ — единичная $[m\times m]$-матрица, ${Z_\nu}^* = \bar{Z}_\nu'$ — матрица, сопряженная и транспонированная к Z_ν, $\nu = 1, 2, ..., n$, называется ***матричным шаром***. Здесь $I - \langle Z, Z\rangle > 0$ означает, что эрмитова матрица $I - \langle Z, Z\rangle$ положительно определена, т.е. все собственные значения положительны.

Остовом B является множество

$$X = \{Z \in \mathbb{C}^n[m\times m] : \langle Z, Z\rangle = I\}.$$

Пусть

$$H = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & -I^{(m)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -I^{(m)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & ... & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & ... & A_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n0} & A_{n1} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

— блочные квадратные матрицы порядка $n+1$, $A_{i\,j}$ — квадратные матрицы порядка m.

Рассмотрим линейное преобразование, порожденное матрицей A, вида

$$\omega_0 = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j A_{0j}, \quad \omega_k = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j A_{kj}, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

удовлетворяющее соотношению

$$AHA^* = H, \tag{2}$$

где ω_j , ζ_j — квадратные матрицы порядка m и матрица ζ_0 не вырождена.

*gkhudaiberg@mail.ru

Очевидно, что (2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} A_{00}A_{00}^* - \sum_{s=1}^{n} A_{0s}A_{0s}^* = I^{(m)}, \\ A_{j0}A_{k0}^* = \sum_{s=1}^{n} A_{js}A_{ks}^*\,, \;\; j \neq k \;\;, \\ A_{j0}A_{j0}^* - \sum_{s=1}^{n} A_{js}A_{js}^* = -I^{(m)}, \;\; j \geqslant 1 \;\; . \end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь матрицы $Z_k = \zeta_0^{-1}\zeta_k$, $k = 1, 2, ...n$. Тогда преобразование (1) перейдет в дробно-линейное преобразование

$$W_k = \omega_0^{-1}\omega_k = \left(A_{00} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{0j}\right)^{-1} \left(A_{k0} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{kj}\right), \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Известно [1], что отображение (4) является автоморфизмом матричного шара B тогда и только тогда, когда коэффициенты $A_{i\,j}$, $,i,j = 0,1,...,n$, удовлетворяют соотношениям (3). Автоморфизм матричного шара вида (4), переводящий точку $P = (P_1, ..., P_n)$ в 0, имеет вид

$$W_k = R^{-1}(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (Z_s - P_s)Q_{sk} \;\;, \;\;\; k = 1, ..., n. \tag{5}$$

Из равенств (3) получается, что матрицы R и Q_{sk}, $s,k = 1,...,n$, порядка m должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{gathered} R^*(I^{(m)} - \langle P, P\rangle)R = I^{(m)} \\ Q^*(I^{(mn)} - P^*P)Q = I^{(mn)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь Q — блочная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & ... & Q_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ Q_{n1} & Q_{n2} & ... & Q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь введем дифференциальный оператор

$$D = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z_{11}^{(\nu)}} & ... & \dfrac{\partial}{\partial z_{1m}^{(\nu)}} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial}{\partial z_{m1}^{(\nu)}} & ... & \dfrac{\partial}{\partial z_{mm}^{(\nu)}} \end{pmatrix}$$

и $Z_\nu = \left(z_{ij}^{(\nu)}\right)$, $\;i,j = 1,2,...,m\,,\;\; \nu = 1,2,...,n.$

Пусть Ω — открытое подмножество B, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ — автоморфизм шара, который точку 0 переводит в $P \in \Omega$, а $f \in C^2(\Omega)$. Если

$$f(P) = (f \circ \varphi)(0),$$

то, дважды применяя цепное правило (см. [2]) к $(f \circ \varphi)(0)$, получим, что

$$\Delta f(P) = \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (D_s\varphi_i)(0) D_i (D_s\varphi_i)(0)^* (D_k^* f)(P),$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} D_\nu D_\nu{}^*$. Теперь вычислим $(D\varphi)(0)$. Дифференцируя (5) в точке P, в силу условия (6) имеем

$$dW = R^{-1}(I^{(m)} - \langle P, P\rangle)^{-1} dZ \otimes Q = R^* dZ \otimes Q.$$

Отсюда получается, что

$$dZ = R^{*-1} dW \otimes Q^{-1},$$

где знак $\otimes$ означает кронекеровское произведение. Тогда $(D\varphi)(0) = R^{*-1} \otimes Q^{-1}$ и $(D\varphi)(0)^* = R^{-1} \otimes Q^{*-1}$.

Подставим полученные выражения в $\Delta f(P)$. Используя свойства кронекеровского произведения (см. [3]) и соотношения (6), имеем:

$$\Delta f(P) = (I^{(m)} - PP^*)D \cdot (I^{(mn)} - P^*P)D^* f(P).$$

Оператор $Sp\Delta$ назовем ***инвариантным оператором Лапласа*** области B. Более подробная запись оператора $Sp\Delta$ выглядит следующим образом:

$$Sp\Delta = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{m} z_{i\alpha}^{(\nu)} \bar{z}_{j\alpha}^{(\nu)}\right) \left(\delta_{\beta\gamma} - \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_{k\beta}^{(\nu)} z_{k\gamma}^{(\nu)}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{i\gamma}^{(\nu)} \partial z_{j\beta}^{(\nu)}}. \tag{7}$$

Оператор $Sp\Delta$ при $n = 1$ есть оператор Лапласа для матричного круга [4], а при $m = 1$ совпадает с инвариантным оператором Лапласа для единичного шара [2].

Определение 1. *Вещественную функцию $U(Z) \in C^2(B)$ будем называть $\mathcal{A}$-гармонической в B, если она удовлетворяет условию*

$$(Sp\Delta)U(Z) = 0$$

в каждой точке матричного шара B.

Через $\bar{B}$ обозначим замыкание B. Множество точек $Z = (Z_1, ..., Z_n)$ из $\bar{B}$ таких, что матрица $I - \langle Z, Z\rangle$ имеет ранг r, обозначим через $\sigma^{(r)}$, $r = 0, 1, ..., m$. Ясно, что $\sigma^{(0)} = X$, $\sigma^{(m)} = B$ и $\bar{B}$ равно сумме всех $\sigma^{(r)}$, $r = 0, 1, ..., m$.

Определение 2. *Множество точек:*

$$Z = U \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z^0[r, mn - m + r] \end{pmatrix} V, \quad I^{(r)} - Z^0 Z^{0*} > 0, \tag{8}$$

назовем r-накрывающей. Здесь U и V — две фиксированные унитарные матрицы соответственно порядков m и mn.

Отметим, что при $n = 1$ определение 2 совпадает с соответствующим определением для квадратных матриц (см. [4]).

Каждая точка из $\sigma^{(r)}$ содержится в некоторой r-накрывающей, но две различные накрывающие могут иметь общие точки.

Теперь определим оператор Лапласа на границе B. Пусть $Z \in \sigma^r$ и любая из ее r-накрывающих определена в виде (8). Поскольку оператор Лапласа инвариантен относительно преобразований $Z_1 = UZV$, то точку Z можно написать в форме

$$Z = \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z^0[r, mn - m + r] \end{pmatrix}, \quad I^{(r)} - Z^0 Z^{0*} > 0. \tag{9}$$

Для точек r-накрывающей (9) оператор $Sp\Delta$ приводится к виду

$$Sp\Delta = Sp\{(I - Z^0 Z^{0*})D \cdot (I - Z^{0*} Z^0) \cdot D^*\}.$$

Определение 3. *Вещественную функцию $U(Z) \in C^2(\bar{B}\backslash X)$ будем называть $\mathcal{A}$-гармонической в $\bar{B}$, если она удовлетворяет условию*

$$(Sp\Delta)U(Z) = 0 \tag{10}$$

в каждой точке $\bar{B}\backslash X$.

Пусть $W = \varphi_P(Z)$ — автоморфизм матричного шара B, который точку $P \in B$ переводит в 0. Тогда справедливы следующие утверждения (см. [1]):

А. Верно равенство (при $Z, W \in B$)

$$I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle =$$

$$= R^{-1}\Big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\Big)^{-1}\Big(I^{(m)} - \langle Z, W\rangle\Big)\Big(I^{(m)} - \langle P, W\rangle\Big)^{-1} R^{*-1}.$$

Б. Для любой функции f, голоморфной в B и непрерывной на $\bar{B}$, имеет место интегральная формула

$$F(Z) = \int\limits_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U), \quad Z \in B, \tag{11}$$

где $P(Z,U)$ — ядро Пуассона, имеющее вид

$$P(Z,U) = \left(\frac{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle\right)}{\left|\det\left(I^{(m)} - \langle Z, U\rangle\right)\right|^2}\right)^{mn}.$$

Предложение 1. *Если $V, U \in X$ и $V = \varphi_P(U)$, то*

$$P(W,V) = P(Z,U) \cdot \frac{\left|\det\left(I^{(m)} - \langle P, U\rangle\right)\right|^{2mn}}{\left[\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right)\right]^{mn}}.$$

Доказательство. Из а) следует, что

$$\begin{gathered}
\left(I^{(m)} - \langle W, V\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle W, W\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle V, W\rangle\right)^{-1} = \\
= R^*\left(I^{(m)} - \langle P, U\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle Z, U\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)R \times \\
\times R^{-1}\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle P, Z\rangle\right)^{-1}R^{*-1} \times \\
\times R^*\left(I^{(m)} - \langle P, Z\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle U, Z\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle U, P\rangle\right)R = \\
= R^*\left(I^{(m)} - \langle P, U\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle Z, U\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle\right)\left(I^{(m)} - \langle U, Z\rangle\right)^{-1}\left(I^{(m)} - \langle U, P\rangle\right)R
\end{gathered} \tag{12}$$

Поэтому

$$\frac{\left[\det(I^{(m)} - \langle W, W\rangle)\right]^{mn}}{\left|\det(I^{(m)} - \langle W, V\rangle)\right|^{2mn}} = \frac{\left[\det(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle)\right]^{mn}}{\left|\det(I^{(m)} - \langle Z, U\rangle)\right|^{2mn}} \cdot \frac{\left|\det(I^{(m)} - \langle P, U\rangle)\right|^{2mn}}{\left[\det(I^{(m)} - \langle P, P\rangle)\right]^{mn}}.$$

□

Для $m = 1$ это предложение совпадает с теоремой 3.3.5 в [2] для ядра Пуассона в единичном шаре.

Предложение 2. *Ядро Пуассона $P(Z,U)$ является функцией, $\mathcal{A}$-гармонической в матричном шаре $\bar{B}\backslash X$.*

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(Sp\Delta)\,P\,(Z,U)=0$$

при $Z=0$. Имеем

$$\begin{gathered}(Sp\Delta)\;P(Z,U)|_{Z=0}=Sp\,(DD^{*})\cdot P(Z,U)|_{Z=0}=\left[\sum_{j,\alpha=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^{(\nu)}_{j\alpha}\partial z^{(\nu)}_{j\alpha}}P(Z,U)\right]_{Z=0}=\\ =\sum_{j,\alpha=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^{(\nu)}_{j\alpha}\partial z^{(\nu)}_{j\alpha}}\left.\frac{\left[\det(I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle)\right]^{mn}}{\left[\det(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle)(I^{(m)}-\langle U,Z\rangle)\right]^{mn}}\right|_{Z=0}=\\ =\sum_{j,\alpha=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\{\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^{(\nu)}_{j\alpha}\partial z^{(\nu)}_{j\alpha}}\left[\det(I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle)\right]^{mn}+\frac{\partial}{\partial z^{(\nu)}_{j\alpha}}\left[\det(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle)\right]^{-mn}\times\\ \times\frac{\partial}{\partial\overline{z}^{(\nu)}_{j\alpha}}\left[\det(I^{(m)}-\langle U,Z\rangle)\right]^{-mn}\}|_{Z=0}=0.\end{gathered}\tag{13}$$

В силу однородности области B и из предложения 1 получаем утверждение предложения 2 для любой точки области B. □

Совокупность $\mathcal{A}$-гармонических в $\overline{B}$ функций, непрерывных на X, обозначим через σ.

Теорема 1. *Для любой непрерывной на X функции $f(U)$ интеграл Пуассона*

$$F(Z)=\int\limits_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U),\quad Z\in B,$$

представляет $\mathcal{A}$-гармоническую функцию класса σ.

Для доказательства этой теоремы дифференцируем интеграл

$$(Sp\Delta)F(Z)=\int\limits_X f(U)(Sp\Delta)P(Z,U)d\sigma(U)=0$$

и получаем для любой точки $\bar{B}\backslash X$ $(Sp\Delta)F(Z)=0$.

Оставшаяся часть теоремы следует из того, что для произвольной непрерывной функции f, заданной на остове X матричного шара B, преобразование Пуассона

$$F(Z)=\int\limits_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U),\quad Z\in B,$$

является непрерывным на $\bar{B}$ и $F=f$ на X [1].

Следствие. *Задача Дирихле для любой функции f, непрерывной на X, единственным образом решается интегралом Пуассона*

$$F(Z)=\int\limits_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U),\quad Z\in B.$$

Теорема 2. *Пусть $\rho(Z)$ — вещественная функция, а $\vartheta(Z)$ — решение уравнения в частных производных*

$$(Sp\Delta)\,\vartheta(Z)=\rho(Z).\tag{14}$$

Если $\rho(Z)>0$, то $\vartheta(Z)$ не может достигать в B максимума, а если $\rho(Z)<0$, то минимума.

Доказательство. Предположим, что $\vartheta(Z)$ достигает своего максимума в точке $Z_0 \in B$, которую без ограничения общности мы можем считать нулем (см. [4]). Тогда (7) и (12) дает нам

$$\sum_{j,\alpha=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_{j\alpha}^{(\nu)}\partial z_{j\alpha}^{(\nu)}}\vartheta(Z)|_{Z=0}=\rho(0)>0. \tag{15}$$

Но поскольку $\vartheta(Z)$ имеет в точке $Z=0$ максимум, то

$$\sum_{j,\alpha=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_{j\alpha}^{(\nu)}\partial z_{j\alpha}^{(\nu)}}\vartheta(Z)|_{Z=0}\leqslant 0,$$

что противоречит (13). А вторая часть утверждения теоремы получается из первой заменой ρ и ϑ на $-\rho$ и $-\vartheta$ соответственно. □

Теорема 3. *$\mathcal{A}$-гармоническая функция класса σ достигает максимума и минимума на многообразии X.*

Доказательство. Обозначим через M точную верхнюю грань $U(Z)\in\sigma$ на границе B. Допустим, что найдется внутри B такая точка W_0, что

$$U(W_0)>M+\varepsilon. \tag{16}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\vartheta(Z)=U(Z)+\eta Sp[(Z-W_0)(Z-W_0)^*],$$

где η выбрано настолько малым, что $\eta Sp[(Z-W_0)(Z-W_0)^*]<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $Z\in B$. Для любой точки P, лежащей на границе B, имеем

$$\vartheta(W_0)=U(W_0)\geqslant U(P)+\varepsilon=\vartheta(P)-\eta Sp[(P-W_0)(P-W_0)^*]+\varepsilon>\vartheta(P)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $\vartheta(Z)$ достигает максимума во внутренней точке B. Но

$$(Sp\Delta)\vartheta(Z)=(Sp\Delta)U(Z)+\eta(Sp\Delta)\{Sp[(Z-W_0)(Z-W_0)^*]\}=$$
$$=\eta Sp(I^{(m)}-ZZ^*)Sp(I^{(mn)}-Z^*Z)\,.$$

Поскольку $Sp(I^{(m)}-ZZ^*)>0$ и $Sp(I^{(mn)}-Z^*Z)>0$, мы пришли к противоречию с теоремой 1. □

Список литературы

[1] С.Косбергенов, О ядре Бергмана в матричном шаре, *Уз. мат. журн.*, 1998, №1, 42–49.

[2] Хуа Локен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях , М., 1959.

[3] У.Рудин, Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, М., Мир, 1984.

[4] П.Ланкастер, Теория матриц, М., Наука, 1982.

Laplacian Invariant Operator in the Matrix Ball

Gulmirza Kh. Khudayberganov,
Askar M. Khalknazarov

In article it is considered Laplacian invariant operator in a matrix ball and it is solved the problem of Dirichlet.

Keywords: Laplace operator, matrix ball, problem of Dirichlet.