Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(2), 276–282

УДК 517.55

О циклах, разделяющих систему m гиперповерхностей в окрестности точки из $\mathbb{C}^n$

Роман В. Ульверт*

Институт информатики и телекоммуникаций,
Сибирский аэрокосмический университет,
Красноярский рабочий, 31, Красноярск, 660014,
Россия

Получена 05.11.2011, окончательный вариант 05.12.2011, принята к печати 20.01.2012

Известно, что на штейновом многообразии размерности n всякий n-мерный цикл, топологически разделяющий n гиперповерхностей, гомологичен линейной комбинации локальных циклов в дискретных пересечениях гиперповерхностей. В статье изучаются циклы, разделяющие набор $m > n$ гиперповерхностей. В частности, доказывается, что в локальной ситуации, при условии $m = n + 1$, такие циклы также связаны с дискретными пересечениями n-поднаборов системы гиперповерхностей.

Ключевые слова: разделяющий цикл, локальный вычет, локальный цикл.

Введение

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, и $F_1, \dots, F_m$ — аналитические подмножества в X чистой коразмерности 1 (гиперповерхности, положительные дивизоры), $F = F_1 \cup \ldots \cup F_m$. Везде далее будем считать, что $m \geqslant n \geqslant 2$.

Понятия и результаты, обсуждаемые в данной работе, связаны со следующей задачей. Пусть ω — мероморфная n-форма в X, полярное множество F которой представляет собой объединение гиперповерхностей $F_1, \dots, F_m$. В окрестности U_a каждой точки $a \in X$ имеет место представление $\omega = h\,dz/f_1 \ldots f_m$, где f_j — определяющие функции дивизоров F_j, $j = 1, \dots, m$, и функция h голоморфна в U_a. Разобьем множители $f_1, \dots, f_m$ в знаменателе формы ω на n групп: $f_1 \ldots f_m = h_1 \ldots h_n$ (при $m = n$ имеется, с точностью до переобозначения, лишь одно такое разбиение: $h_k = f_k$, $k = 1, \dots, n$). *Локальный вычет* формы ω, ассоциированный с голоморфным отображением $f = (h_1, \dots, h_n)$, имеющим в точке a изолированный нуль, определяется [1, 2] интегралом

$$\operatorname*{res}_{a}{}_f\, \omega = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_a} \frac{h\,dz}{h_1 \ldots h_n}, \tag{1}$$

где $\Gamma_a = \{z \in U_a \colon |h_1(z)| = \varepsilon_1, \dots, |h_n(z)| = \varepsilon_n\}$. Локальный вычет является естественным многомерным обобщением вычета Коши. Он служит удобным и полезным инструментом для изучения идеалов в кольцах голоморфных функций, а также для исследования голоморфных векторных полей [1–3]. К вычислению локальных вычетов также может быть сведена задача о нахождении периодов многообразий Калаби–Яу с несколькими модулями [4].

Заметим, что могут быть определены различные локальные вычеты формы ω, соответствующие различным способам разбиения множителей $f_1, \dots, f_m$ (при $m > n$) и различным изолированным нулям a соответствующих голоморфных отображений.

*ulvertrom@yandex.ru

Пусть теперь Γ — произвольный компактный цикл в $X \setminus F$. Требуется найти топологическое условие на цикл Γ, при котором интеграл $\int_\Gamma \omega$ представляется в виде линейной комбинации локальных вычетов (1) по всевозможным голоморфным отображениям $f = (h_1, \ldots, h_n)$, соответствующим группировке функций $f_1, \ldots, f_m$, и их изолированным нулям $a \in f^{-1}(0)$. Уточним задачу. Пусть $\mathcal{J} = (J_1, \ldots, J_n)$ — разбиение множества $\{1, \ldots, m\}$ на n непустых непересекающихся подмножеств. Каждому такому разбиению соответствует набор n гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$, где $T_k = \bigcup_{j \in J_k} F_j$. Обозначим через $Z_{\mathcal{J}}$ дискретную часть пересечения гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$. Тогда для каждой точки $a \in Z_{\mathcal{J}}$ цикл интегрирования в (1) запишется в виде

$$\Gamma_{\mathcal{J},a} = \left\{ z \in U_a \colon \left| \prod\nolimits_{j \in J_k} f_j(z) \right| = \varepsilon_k,\ k = 1, \ldots, n \right\}, \tag{2}$$

где f_j — определяющие функции для дивизоров F_j в окрестности U_a точки a. Ориентация цикла $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ задается условием $d\,(\arg h_1) \wedge \ldots \wedge d\,(\arg h_n) \geqslant 0$, где $h_k = \prod_{j \in J_k} f_j$. Цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ является *локальным циклом* в точке a (см. [3]). Это означает, что класс гомологий цикла $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ имеет представителя с носителем, лежащим в сколь угодно малой окрестности точки a. Из формулы логарифмического вычета (см. [2,5]) следует, что для любого разбиения $\mathcal{J}$ и любой точки $a \in Z_{\mathcal{J}}$ локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ не гомологичен нулю. Подгруппу группы сингулярных (компактных) гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденную циклами $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ для всевозможных разбиений $\mathcal{J}$ и точек $a \in Z_{\mathcal{J}}$, обозначим $H_n^*(X \setminus F)$ (локально разделяющая подгруппа в [6]). Таким образом, класс гомологий цикла Γ в $X \setminus F$ принадлежит указанной подгруппе, если в $X \setminus F$ имеет место гомология

$$\Gamma \sim \sum_{\mathcal{J},a} n_{\mathcal{J},a} \Gamma_{\mathcal{J},a}. \tag{3}$$

В частном случае при $m = n$ разбиение $\mathcal{J}$ единственно, локальный цикл сопоставляется изолированной точке a пересечения гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_n$ и имеет вид $\Gamma_a = \{z \in U_a \colon |f_j(z)| = \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, n\}$. Соответственно, класс гомологий цикла Γ в $X \setminus F$ принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$, если $\Gamma \sim \sum_a n_a \Gamma_a$ в $X \setminus F$.

Таким образом, интеграл $\int_\Gamma \omega$ выражается через локальные вычеты (1), если $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$, то есть если имеет место представление (3) цикла Γ в виде линейной комбинации локальных циклов (2). Следуя статье А.П. Южакова [6], опишем необходимое условие для существования такого представления. Вещественно n-мерный цикл Γ называется *разделяющим гиперповерхности* $F_1, \ldots, F_m$, если

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus F_{\alpha_1} \cup \ldots \cup F_{\alpha_{n-1}} \text{ для любого поднабора } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}. \tag{4}$$

При $m = n$ условие (4) говорит о том, что каждая гиперповерхность F_k создает препятствие для тривиальности цикла Γ, поскольку требование $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus F_1 \cup \ldots [k] \ldots \cup F_n$ означает, что на цикл Γ можно натянуть $(n+1)$-цепь, пересекающую гиперповерхность F_k, но не пересекающую остальные гиперповерхности. (Здесь и далее обозначение вида $\alpha_1, \ldots [j,k] \ldots, \alpha_n$ употребляется в случае, когда элементы с индексами j и k пропущены.)

Покажем, что если $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$, то Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_m$. Достаточно показать, что каждый локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ является разделяющим. Зафиксируем произвольный набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}$. Хотя бы один элемент J_t любого разбиения $\mathcal{J}$ не содержит ни один из индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Тогда $\Gamma_{\mathcal{J},a} = \pm \partial c^{(t)}_{\mathcal{J},a}$, где цепь $c^{(t)}_{\mathcal{J},a} = \{z \in U_a \colon |h_k(z)| = \varepsilon_k, k \neq t,\ |h_t(z)| \leqslant \varepsilon_t\}$ лежит в $X \setminus (T_1 \cup \ldots [t] \ldots \cup T_n) \subset X \setminus F_{\alpha_1} \cup \ldots \cup F_{\alpha_{n-1}}$, то есть $\Gamma_{\mathcal{J},a} \sim 0$ в $X \setminus F_{\alpha_1} \cup \ldots \cup F_{\alpha_{n-1}}$.

В случае $m = n$ в довольно общих ситуациях А.К.Цихом и А.П.Южаковым [2,7–9] было показано, что условие разделения оказывается не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы класс гомологий цикла принадлежал $H_n^*(X \setminus F)$. Приведем один из упомянутых критериев.

Теорема 1 (Цих, [2]). *Пусть X — многообразие Штейна комплексной размерности n, и $F_1, \ldots, F_n$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда класс гомологий n-цикла Γ из $X \setminus F$*

принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$ *в том, и только том случае, когда* Γ *разделяет гиперповерхности* $F_1, \dots, F_n$. *В частности, если дискретная часть пересечения гиперповерхностей* $F_1, \dots, F_n$ *пуста, то любой цикл* Γ, *разделяющий эти гиперповерхности, гомологичен нулю.*

А.П.Южаковым и А.К.Цихом была сформулирована гипотеза о справедливости теоремы 1 в случае любого числа $m \geqslant n$ гиперповерхностей. В статье А.П.Южакова [6] были рассмотрены два подтверждающих эту гипотезу случая. Один из них имеет отношение к локальной ситуации и отражен в теореме 2, приводимой ниже (см. раздел 1). Основной результат настоящей работы заключается в ослаблении условия теоремы 2 и формулируется в виде теоремы 3. Из доказанной теоремы 3 вытекает справедливость обсуждаемой гипотезы при $m = n + 1$ (теорема 4). Теоремы 3 и 4 приводятся в разделе 1. Теорема 4 доказывается в разделе 1. Доказательству теоремы 4 посвящен раздел 2.

1. Разделяющие циклы в локальном случае. Основные результаты

В случае, когда $X = U_a$ — достаточно малая окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$, наборы $F_1, \dots, F_m$ являются *центрированными*, то есть $a \in F_1 \cap \ldots \cap F_m$. Для разбиения $\mathcal{J} = (J_1, \dots, J_n)$ множества $\{1, \dots, m\}$ возможны две ситуации: либо $Z_{\mathcal{J}} = \{a\}$, либо $Z_{\mathcal{J}} \neq \{a\}$ (т. е. $Z_{\mathcal{J}} = \varnothing$). При $Z_{\mathcal{J}} = \{a\}$ разбиению $\mathcal{J}$ соответствует локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$. В этом случае будем говорить, что разбиение $\mathcal{J}$ *определяет* локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$. Таким образом, разбиение $\mathcal{J}$ определяет локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$, если $T_1 \cap \ldots \cap T_n = \{a\}$, где $T_k = \bigcup_{j \in J_k} F_j$. Последнее означает, что $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} = \{a\}$ для всех $\alpha_1 \in J_1, \dots, \alpha_n \in J_n$. При $Z_{\mathcal{J}} = \varnothing$ будем говорить, что локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ *не определен.*

Пусть $m > n$. Если $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} = \{a\}$ для любого поднабора $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{1, \dots, m\}$, то локальные циклы $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ определены для всех возможных разбиений $\mathcal{J} = (J_1, \dots, J_n)$ множества $\{1, \dots, m\}$. В этом случае А.П.Южаковым была доказана следующая теорема, обобщающая в локальном случае теорему 1 А.К.Циха:

Теорема 2 (Южаков, [6]). *Пусть* $X = U_a$ *— достаточно малая штейнова окрестность точки* $a \in \mathbb{C}^n$. *Если* $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} = \{a\}$ *для любого поднабора* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{1, \dots, m\}$, *то цикл* Γ *разделяет гиперповерхности* $F_1, \dots, F_m$ *в том и только том случае, когда* $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$.

Следующая теорема обобщает теорему 2 и является основным результатом данной статьи.

Теорема 3. *Пусть* $X = U_a$ *— достаточно малая штейнова окрестность точки* $a \in \mathbb{C}^n$. *Пусть среди гиперповерхностей* $F_1, \dots, F_m$ *в* X *найдется такая гиперповерхность* F_q, *что для любого поднабора* $\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots [q] \dots, m\}$ *выполняется одно из двух условий:*

(i) либо $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_{n-1}} \cap F_q \neq \{a\}$,

(ii) либо $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_{n-1}} \cap F_{\alpha_n} = \{a\}$ *для всех* $\alpha_n \in \{1, \dots [\alpha'] \dots, m\}$.

Тогда цикл Γ *разделяет гиперповерхности* $F_1, \dots, F_m$ *в том и только том случае, когда* $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$. *Если при этом для всех поднаборов* α' *выполняется условие (i), то любой цикл, разделяющий гиперповерхности* $F_1, \dots, F_m$, *гомологичен нулю.*

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие условия применимости теорем 2 и 3. Заметим, что примеры, полностью раскрывающие суть задачи, должны рассматриваться при условии $n > 2$, так как в случае $n = 2$ не возникает так называемых неполных пересечений.

Примеры. Пусть $X = \mathbb{C}^3$ и гиперповерхности F_j заданы глобально.

1. $F_1 = \{z\colon z_1 = 0\}$, $F_2 = \{z\colon z_2 = 0\}$, $F_3 = \{z\colon z_3 = 0\}$, $F_4 = \{z\colon z_3^2 - z_1 z_2 = 0\}$. Имеем $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 = \{0\}$, то есть рассматривается центрированный набор гиперповерхностей, $a = 0$. Условия теоремы 2 не выполняются, так как, например, для поднабора $\{1,3,4\} \subset \{1,2,3,4\}$ пересечение $F_1 \cap F_3 \cap F_4$ не дискретно. Покажем, что, тем не менее, теорема 3 может быть применена. Положим $q = 4$. Тогда нетрудно видеть, что для поднаборов $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ выполняется условие (i), а для поднабора $\{1,2\}$ выполняется условие(ii).

2. Рассмотрим другой пример. Пусть гиперповерхности F_1, F_2 и F_3 определяются как в предыдущем примере, а $F_4 = \{z\colon z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 0\}$. Тогда $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 = \{0\}$. Так как, например, пересечение $F_1 \cap F_3 \cap F_4$ не дискретно, то условия теоремы 2 не выполняются. Проверим выполнение условий теоремы 3. Положим снова $q = 4$. Тогда для всех возможных 2-поднаборов $\alpha' \subset \{1,2,3\}$ выполняется условие (i). Из теоремы 3 можно заключить, что в этом случае каждый цикл, разделяющий гиперповерхности F_1, F_2, F_3, F_4, гомологичен нулю. В частности, отсюда следует, что $H_n^*(X \setminus F) = 0$.

Приведенные примеры относятся к случаю, когда число гиперповерхностей на единицу больше размерности пространства, то есть $m = n+1$. Оказывается, что в локальном случае при таком ограничении условия теоремы 3 выполняются всегда. Тем самым удается доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда цикл Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_{n+1}$ в том и только том случае, когда $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})$.*

Доказательство. Обозначим $F^{[k]} = F_1 \cap \ldots [k] \ldots \cap F_{n+1}$, $k = 1, \ldots, n+1$. Предположим вначале, что найдутся отличные друг от друга $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ такие, что $F^{[i]} = \{a\}$ и $F^{[j]} = \{a\}$. С точностью до перенумерации гиперповерхностей можно считать, что $i = n$, $j = n+1$. Покажем, что в этом случае выполняются условия теоремы 3. Действительно, положим $q = n+1$ и проверим, что для любого поднабора $\alpha' = \{1, \ldots [k] \ldots, n\}$, $k = 1, \ldots, n$, выполняется одно из условий (i) или (ii). Для $\alpha' = \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется условие (ii), так как $F^{[n]} = \{a\}$ и $F^{[n+1]} = \{a\}$. Пусть $\alpha' = \{1, \ldots [k] \ldots, n\}$ при $k < n$. Если $F^{[k]} \neq \{a\}$, то выполняется условие (i). Если же $F^{[k]} = \{a\}$, то, учитывая, что $F^{[n+1]} = \{a\}$, выполняется условие (ii).

Пусть теперь дискретно лишь одно пересечение $F^{[q]}$. Тогда для любого поднабора $\alpha' = \{1, \ldots [j,q] \ldots, n+1\}$, $j \neq q$, выполняется условие (i). Действительно, $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_{n-1}} \cap F_q = F^{[j]} \neq \{a\}$.

Осталось рассмотреть случай, когда для всех $k = 1, \ldots, n+1$ пересечения $F^{[k]}$ недискретны. Выбирая $q \in \{1, \ldots, n+1\}$ произвольным образом, получим, что условие (i) выполняется для любых $(n-1)$-поднаборов α' из $\{1, \ldots [q] \ldots, n+1\}$.

Таким образом, было показано, что условия теоремы 3 выполняются в каждом случае. Следовательно, n-мерный цикл Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})$.

2. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются некоторые вспомогательные результаты.

В локальном случае через f_k будем обозначать функции, определяющие ростки гиперповерхностей F_k, $k = 1, \ldots, m$. Также, для краткости, будем использовать обозначение $\Gamma_{\mathcal{J}}$ вместо $\Gamma_{\mathcal{J},a}$. Для поднабора $\alpha' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}$ через $\mathcal{J}(\alpha')$ обозначим разбиение $(J_1, \ldots, J_n)$ множества индексов $\{1, \ldots, m\}$, для которого $J_1 = \{\alpha_1\}, \ldots,\ J_{n-1} = \{\alpha_{n-1}\}$, $J_n = \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$. Локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}$, соответствующий разбиению $\mathcal{J}(\alpha')$, будет определен, если $Z_{\mathcal{J}(\alpha')} = \{a\}$, то есть если $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_{n-1}} \cap F_{\alpha_n} = \{a\}$ для всех

$\alpha_n \in \{1, \dots [\alpha'] \dots, m\}$.

Один из ключевых моментов доказательства теоремы 2 основывался на следующем утверждении ([6], предложение 2).

Предложение 1 (Южаков, [6]). *Пусть для разбиения $\mathcal{J}(\alpha') = (J_1, \dots, J_n)$, соответствующего упорядоченному поднабору $\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m\}$, множество $Z_{\mathcal{J}(\alpha')}$ непусто. Тогда для любых $\alpha_n \in J_n$ при достаточно малых $\varepsilon > 0, \delta/\varepsilon > 0$ цикл*

$$\gamma_\alpha = \left\{z \in U_a \colon |f_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |f_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\, |f_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon\right\}$$

лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma_{\alpha'} = \left\{z \in U_a \colon |f_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |f_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\, |f_1(z) \ldots [\alpha'] \ldots f_m(z)| = \varepsilon\right\}.$$

Следующие две леммы (см. [10]) формулируются в достаточно общей ситуации и также играют большую роль в доказательстве теоремы 2.

Лемма 1 (Южаков, [10]). *Если X некомпактно и $X \setminus F_j$, $j = 1, \dots, m$, — многообразия Штейна, то для всякой голоморфной p-формы φ в $X \setminus F$, $p \geqslant 0$, справедливо разложение $\varphi = \sum \varphi_\alpha$, где p-форма $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ голоморфна в $X \setminus F_\alpha$ и суммирование ведется по всем поднаборам $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ таким, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.*

Лемма 2 (Южаков, [10]). *Пусть $F_0, F_1, \dots, F_m$ — набор гиперповерхностей в комплексном аналитическом многообразии X. Если $X \setminus F_0$ — многообразие Штейна и $F_1 \cap \ldots \cap F_m \subset F_0$, то всякую p-форму φ, голоморфную в $X \setminus F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_m$, $p \geqslant 0$, можно представить в виде $\varphi = \sum_{k=1}^m \varphi_k$, где p-форма φ_k голоморфна в $X \setminus F_0 \cup \ldots [k] \ldots \cup F_m$, $j = 1, \dots, m$.*

Применим леммы 1 и 2 в локальном случае. Будем использовать следующие сокращенные обозначения: $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} = F_{\alpha_1} \cup \ldots \cup F_{\alpha_s}$, $F^{\alpha_1, \dots, \alpha_s} = F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_s}$, $\alpha[k] = \{\alpha_1, \dots [k] \dots, \alpha_n\}$. Через $\Omega^n(X)$ обозначим линейное пространство всех голоморфных n-форм на X.

Предложение 2. *Пусть $F_1, \dots, F_m$ — набор гиперповерхностей в достаточно малой окрестности U_a точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда всякую p-форму φ, голоморфную в $U_a \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_m$, $p \geqslant 0$, можно представить в виде*

$$\varphi = \sum \varphi_{\alpha', m} + \sum_{F^\alpha \neq \{a\}} \varphi_\alpha, \tag{5}$$

где $\varphi_{\alpha', m} \in \Omega^n(U_a \setminus F_{\alpha', m})$, $\varphi_\alpha \in \Omega^n(U_a \setminus F_\alpha)$ и суммирование ведется по всевозможным поднаборам $\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} \leqslant m - 1$ и $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leqslant m - 1$.

Доказательство. Можно считать, что U_a — штейново многообразие. Тогда U_a не компактно и $U_a \setminus F_j$ штейновы для $j = 1, \dots, m$. По лемме 1 форму φ можно представить в виде $\varphi = \sum \psi_{\alpha', m} + \sum \varphi_\alpha$, где $\psi_{\alpha', m} \in \Omega^n(U_a \setminus F_{\alpha'} \cup F_m)$, $\varphi_\alpha \in \Omega^n(U_a \setminus F_\alpha)$. Если $F^\alpha = \{a\}$, то по лемме 2 для формы $\varphi_\alpha \in \Omega^n(U_a \setminus F_\alpha)$ справедливо разложение $\varphi_\alpha = \sum_{k=1}^n \psi^\alpha_{\alpha[k], m}$, где $\psi^\alpha_{\alpha[k], m} \in \Omega^n(U_a \setminus F_{\alpha[k], m})$. Имеем

$$\varphi = \sum \psi_{\alpha', m} + \sum \varphi_\alpha = \sum \psi_{\alpha', m} + \sum_{F^\alpha = \{a\}} \sum_{k=1}^n \psi^\alpha_{\alpha[k], m} + \sum_{F^\alpha \neq \{a\}} \varphi_\alpha,$$

то есть справедливо разложение вида (5). □

Приступим к доказательству теоремы 3.

Предположим для определенности, что условие теоремы выполняется при $q = m$. Это означает, что для любого $\alpha' \subset \{1, \dots, m-1\}$ из дискретности $F^{\alpha', m}$ следует дискретность F^{α', α_n} для всех $\alpha_n \in \{1, \dots [\alpha'] \dots, m\}$.

То, что любой локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J}}$ является разделяющим, было показано в самом общем случае. Покажем, что любой цикл Γ, разделяющий гиперповерхности $F_1, \ldots, F_m$, представляется в виде (3), то есть в данном случае $\Gamma \sim \sum n_{\mathcal{J}} \Gamma_{\mathcal{J}}$. Пусть Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_m$. Тогда для любого $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ Γ разделяет гиперповерхности $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$. Если при этом $F^\alpha = \{a\}$, то по теореме 1 получим $\Gamma \sim n_\alpha \gamma_\alpha$ в $X \setminus F_\alpha$, где $\gamma_\alpha = \{z \in U_a \colon |f_{\alpha_1}(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |f_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon_n\}$. Если же $F^\alpha \neq \{a\}$, то из теоремы 1 следует, что $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus F_\alpha$.

Пусть ω — произвольная замкнутая дифференциальная n-форма в $X \setminus F$. Так как X — штейново многообразие, то по теореме Серра форма ω когомологична некоторой голоморфной n-форме φ в $X \setminus F$. Рассмотрим интеграл $\int_\Gamma \varphi$ и используем разложение (5) из предложения 2:

$$\varphi = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} \varphi_{\alpha',m} + \sum_{F^{\alpha',m} \neq \{a\}} \varphi_{\alpha',m} + \sum_{F^\alpha \neq \{a\}} \varphi_\alpha.$$

При $F^{\alpha',m} = \{a\}$ будем иметь $\Gamma \sim n_{\alpha',m} \gamma_{\alpha',m}$ в $X \setminus F_{\alpha',m}$. Так как по условию теоремы в этом случае определен локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}$, то по предложению 1 можно считать, что $\gamma_{\alpha',m} \sim \Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}$ в $X \setminus F$. Следовательно, $\Gamma \sim n_{\alpha',m} \Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}$ в $X \setminus F_{\alpha',m}$. При $F^{\alpha',m} \neq \{a\}$ будем иметь $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus F_{\alpha',m}$. Аналогично, при $F^\alpha \neq \{a\}$ получим $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus F_\alpha$. Учитывая тривиальность цикла Γ в областях, в которых формы $\varphi_{\alpha',m}$ и φ_α голоморфны, получим

$$\int_\Gamma \varphi = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\alpha',m}.$$

Рассмотрим теперь цикл Γ' в $X \setminus F$, определяемый следующим образом:

$$\Gamma' = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}. \tag{6}$$

Очевидно $[\Gamma'] \in H_n^*(X \setminus F)$. Интеграл $\int_{\Gamma'} \varphi$ представим в виде суммы трех слагаемых: $\int_{\Gamma'} \varphi = I_1 + I_2 + I_3$. Первое слагаемое имеет следующий вид:

$$I_1 = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \sum_{F^{\beta',m} = \{a\}} \int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\beta',m}.$$

Если $\beta' \neq \alpha'$, то для $t \in \alpha' \setminus \beta'$ будет $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')} \sim \gamma_{\alpha',m} = \pm \partial c$, где носитель цепи

$$c = \{z \in U_a \colon |f_{\alpha_1}(z)| = \delta, \ldots [\alpha_t] \ldots, |f_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta, \, |f_{\alpha_t}(z)| \leqslant \delta, |f_m(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus F_{\beta',m}$. Следовательно, $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')} \sim 0$ в $X \setminus F_{\beta',m}$ и $\int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\beta',m} = 0$ при $\beta' \neq \alpha'$. Таким образом,

$$I_1 = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\alpha',m}.$$

Рассмотрим второе слагаемое для интеграла $\int_{\Gamma'} \varphi$, имеющее следующий вид:

$$I_2 = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \sum_{F^{\beta',m} \neq \{a\}} \int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\beta',m}.$$

Так как для этого случая всегда $\beta' \neq \alpha'$, то, используя те же самые рассуждения, что и в предыдущем случае, получим $I_2 = 0$. Третье слагаемое имеет следующий вид:

$$I_3 = \sum_{F^{\alpha',m} = \{a\}} n_{\alpha',m} \sum_{F^\beta \neq \{a\}} \int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_\beta.$$

Покажем, что для этого слагаемого всегда $\alpha' \setminus \beta \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае $\alpha' = \beta[s]$ для некоторого $s \in \{1, \ldots, m-1\}$. Так как $F^{\alpha',m} = \{a\}$, то $F^\beta = F^{\alpha',s} = \{a\}$, что противоречит условию $F^\beta \neq \{a\}$. Рассуждая как было показано выше, получим, что $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')} \sim 0$ в $X \setminus F_\beta$. Следовательно, $I_3 = 0$.

Таким образом, окончательно получим

$$\int\limits_{\Gamma'} \varphi = I_1 + I_2 + I_3 = \sum_{F^{\alpha',m}=\{a\}} n_{\alpha',m} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha')}} \varphi_{\alpha',m}.$$

Итак, было показано, что $\int_\Gamma = \int_{\Gamma'}$ для любой голоморфной n-формы φ в $X \setminus F$. По теореме де Рама $\Gamma \sim \Gamma'$ в $X \setminus F$. Следовательно, $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$. В частности, равенство (6) позволяет выразить разделяющий цикл Γ через локальные циклы. Если при этом для всех поднаборов α' в (6) выполняется условие $F^{\alpha',m} \neq \{a\}$, то $\Gamma \sim 0$.

Автор поддержан грантом Минобрнауки 1.34.11.

Список литературы

[1] Ф.Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, М., Мир, 1982.

[2] А.К.Цих, Многомерные вычеты и их применение, Новосибирск, Наука, 1988.

[3] А.К.Цих, Локальные вычеты в $\mathbb{C}^n$. Алгебраические применения, *Матем. сб.*, **123(165)** (1984), №2, 230–242.

[4] М.Пассаре, А.К.Цих, А.А.Чешель, Кратные интегралы Меллина–Барнса как периоды многообразий Калаби–Яу с несколькими модулями, *ТМФ*, **109**(1996), №3, 381–394.

[5] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[6] А.П.Южаков, Разделяющая подгруппа и локальные вычеты, *Сиб. мат. журн.*, **29** (1988), №6, 197–203.

[7] А.К.Цих, Критерии представимости интеграла по циклу через вычеты Гротендика. Некоторые приложения, *Докл. АН СССР*, **277**(1984), №5, 1083–1087.

[8] А.К.Цих, О циклах, разделяющих нули аналитических функций в $\mathbb{C}^n$, *Сиб. мат. журн.*, **16**(1975), №11, 1118–1121.

[9] А.П.Южаков, Одно условие кограницы по Лере и его применение к логарифмическому вычету, *Сиб. мат. журн.*, **11**(1970), №3, 708–711.

[10] А.П.Южаков, О разделении аналитических особенностей и разложении на простейшие дроби голоморфных функций n переменных, Многомерный комплексный анализ, Красноярск, ИФ СО СССР, 1986, 210–220.

On the Cycles Separating the System of m Hypersurfaces in the Neighbourhood of the Point in $\mathbb{C}^n$

Roman V. Ulvert

It is known, that any n-cycle on a Stein manifold of dimension n, which topologically separates n hypersurfaces, is homologous to the linear combination of the local cycles in the discrete intersection of the hypersurfaces. In this paper we consider the case when $m > n$. Particulary, we proof that in the local case, if $m = n + 1$, such cycles is also related with discrete intersection of n-subsets of hiperfaces.

Keywords: separating cycle, local residue, local cycle.