Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(2), 239–245

УДК 517.98

Задачи управления для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором при наличии возмущений

Дмитрий К. Потапов*
Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики — процессов управления,
Университетский пр., 35, Санкт-Петербург, 198504
Россия

Получена 17.07.2011, окончательный вариант 01.10.2011, принята к печати 10.01.2012

В банаховых пространствах рассматриваются задачи управления системами со спектральным параметром, внешним возмущением и разрывным оператором. Получена теорема о разрешимости для исследуемых задач. Общие результаты применяются к задачам управления распределенными системами эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью при наличии внешнего возмущения. Устанавливаются предложения о разрешимости для таких задач. В качестве приложения рассматривается задача управления с возмущением в математической модели М.А.Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: задачи управления, спектральный параметр, разрывный оператор, внешнее возмущение, тройка "возмущение – управление – состояние", вариационный метод, модель Гольдштика.

1. Постановка задачи. Общие результаты

В работах [1–5] исследовались спектральные задачи для уравнений с разрывными операторами в банаховых пространствах. В работе [6] изучалась задача оптимального управления нелинейной системой со спектральным параметром и разрывным оператором в банаховом пространстве. В данной работе, являющейся продолжением этих исследований, рассмотрим вопрос управления такими системами при наличии внешнего возмущения.

Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* — сопряженное с E пространство. Управляемая система в пространстве E описывается уравнением состояния, содержащим возмущение, вида

$$Au - \lambda Tu = Bv + Dw, \tag{1}$$

где A — линейный самосопряженный оператор из E в E^*, λ — положительный параметр, $T : E \to E^*$ разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E, оператор $B : U \to E^*$ линейный и ограниченный, U — банахово пространство управлений, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (1), оператор $D : W \to E^*$ линейный и ограниченный, W — банахово пространство возмущений, возмущение $w \in W$. Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$, дадим определения, используемые в данной работе.

Определение 1. *Отображение $T : E \to E^*$ называется ограниченным на E, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $||Tx|| \leqslant M \ \ \forall\, x \in E$.*

*potapov@apmath.spbu.ru, dkpotapov@mail.ru

Определение 2. *Отображение* $T : E \to E^*$ *называется компактным на* E, *если оно ограниченные множества из* E *переводит в предкомпактные в* E^*.

Определение 3. *Отображение* $T : E \to E^*$ *называется монотонным на* E, *если* $(Tx - Ty, x - y) \geqslant 0 \ \ \forall\, x, y \in E$. *Отображение* $T : E \to E^*$ *называют антимонотонным, если отображение* $-T$ *монотонно.*

Определение 4. *Отображение* $T : E \to E^*$ *называется квазипотенциальным, если существует функционал* $f : E \to \mathbf{R}$, *для которого верно равенство* $f(x + h) - f(x) = \int\limits_0^1 (T(x + th), h)\, dt \ \ \forall\, x, h \in E$ *(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом* f *называют квазипотенциалом оператора* T.

Определение 5. *Элемент* $x \in E$ *называется точкой разрыва оператора* $T : E \to E^*$, *если найдется* $h \in E$, *для которого либо* $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h)$ *не существует, либо* $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h) \neq (Tx, h)$.

Определение 6. *Элемент* $x \in E$ *называется регулярной точкой для оператора* $T : E \to E^*$, *если для некоторого* $h \in E$ *справедливо* $\overline{\lim\limits_{t\to +0}}(T(h + t(x - h)), x - h) < 0$.

Определение 7. *Отображение* $T : E \to E^*$ *называется радиально непрерывным в точке* $x \in E$, *если для любого* $h \in E$ *выполнено* $\lim\limits_{t\to 0}(T(x + th), h) = (Tx, h)$.

Определение 8. *Секвенциальным замыканием локально ограниченного отображения* $T : E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 — *банаховы пространства) называется отображение* ST *из* E_1 *в* E_2 *(вообще говоря, многозначное), значение* STx ($x \in E_1$) *которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в* E_2 *последовательностей вида* (Tx_n), *где* $x_n \to x$ *в* E_1.

Определение 9. *Обобщенным решением уравнения (1) при фиксированных управлении* v *и возмущении* w *называется элемент* $u \in E$, *удовлетворяющий включению* $Au - Bv - Dw \in \lambda STu$, *где* ST — *секвенциальное замыкание оператора* T.

Определение 10. *Классическим решением уравнения (1) при фиксированных управлении* v *и возмущении* w *называется элемент* $u \in E$ *такой, что* $Au - Bv - Dw = \lambda Tu$.

Допускается, что для некоторых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ система (1) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. возможен сингулярный случай [7].

Определение 11. *Упорядоченная тройка* $(\hat{w}, \hat{v}, \hat{u})$ *называется допустимой тройкой "возмущение – управление – состояние" для системы (1), если* $\hat{w} \in W$, $\hat{v} \in U_{ad}$, *а* $\hat{u}$ — *решение уравнения (1) при* $w = \hat{w}$ *и* $v = \hat{v}$.

Основным результатом данного раздела является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) A — *линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства* E *в сопряженное пространство* E^*; *пространство* E *представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств* $E_1 = \ker A$ *и* E_2, *причем существует положительная постоянная* α *такая, что* $(Au, u) \geqslant \alpha ||u||^2$ *для каждого* $u \in E_2$;

2) отображение T *компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом* f*) и ограниченное на* E; $f(0) = 0$ *и для некоторого* $u_0 \in E$ *значение* $f(u_0) > 0$; *если* $E_1 \neq \{0\}$, *то дополнительно предполагается, что* $\lim\limits_{u\in E_1,\ ||u||\to +\infty} f(u) = -\infty$;

3) если отображение T компактное, то предполагается, что $\lim\limits_{t\to+0}(T(u+th)-Tu,h)\geqslant 0$ *для всех* $u,h\in E$*;*

4) если отображение T антимонотонное, то предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda>\lambda_0>0$ регулярная для $Au-\lambda Tu$ (λ_0 — величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима);

5) оператор $B:U\to E^*$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad}\subset U$ непусто;

6) оператор $D:W\to E^*$ линейный и ограниченный, пространство возмущений W банахово.

Тогда для любых $v\in U_{ad}$, $w\in W$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой радиальной непрерывности оператора T.

Доказательство. Как и в работе [4], при сделанных предположениях и любых фиксированных управлении v, возмущении w устанавливается, что

$$0\in S(Au-\lambda Tu-Bv-Dw)=Au-Bv-Dw-\lambda STu,$$

что равносильно $Au-Bv-Dw\in\lambda STu$. Данное включение означает, что найдется $u\in E$, которое является обобщенным решением уравнения (1). Таким образом, для любых $v\in U_{ad}$, $w\in W$ существует обобщенное решение уравнения (1).

В силу результатов из [8] условие 3) теоремы 1 влечет регулярность точек разрыва оператора $A-\lambda T$ ($\lambda>0$), а в силу условия 4) теоремы 1 любая точка разрыва оператора T при $\lambda>\lambda_0>0$ также регулярная для $Au-\lambda Tu$. Поэтому согласно теореме 1 из работы [1] при любых фиксированных управлении v, возмущении w получаем, что u – точка радиальной непрерывности оператора T и $Au-Bv-Dw=\lambda Tu$.

Итак, для любых управления $v\in U_{ad}$ и возмущения $w\in W$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой радиальной непрерывности оператора T. Достаточное условие непустоты множества всех допустимых троек "возмущение – управление – состояние" установлено. □

2. Приложения

В ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ ($0<\alpha\leqslant 1$) рассматривается управляемая распределенная система с внешним возмущением вида

$$Lu(x)\equiv-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}+c(x)u(x)=\lambda g(x,u(x))+Bv(x)+Dw(x),\ \ x\in\Omega, \qquad (2)$$

$$Gu|_{\Gamma}=0. \qquad (3)$$

Здесь L — равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij}\in\mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega}),c\in\mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; λ — положительный параметр; функция $g:\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x\in\Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u)\in[g_-(x,u),g_+(x,u)]$ $\forall\ u\in\mathbf{R}$, $g_-(x,u)=\varliminf\limits_{\eta\to u}g(x,\eta)$, $g_+(x,u)=\varlimsup\limits_{\eta\to u}g(x,\eta)$, $|g(x,u)|\leqslant a(x)$ $\forall u\in\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{L}_q(\Omega)$, $q\geqslant\dfrac{2n}{n+2}$; оператор $B:U\to\mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, U — банахово пространство управлений, функция $v(x)$ в уравнении (2) играет роль управления, управление $v\in U_{ad}\subset U$, U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (2)–(3); оператор $D:W\to\mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, W — банахово пространство возмущений, функция $w(x)$ в уравнении (2) играет роль возмущения, возмущение $w\in W$. Граничное условие (3) является либо условием Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условием Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(\mathbf{n}, x_j)$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, либо третьим краевым условием $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$ с функцией $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательной и не равной тождественно нулю на Γ.

Определение 12. *Обобщенным решением задачи (2)–(3) при фиксированных управлении v и возмущении w называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ включению*

$$Lu(x) - Bv(x) - Dw(x) \in \lambda[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Определение 13. *Сильным решением задачи (2)–(3) при фиксированных управлении v и возмущении w называется функция $u \in \mathbf{W}_r^2(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (2) и для которой след $Gu(x)$ на Γ равен нулю.*

Определение 14. *Полуправильным решением задачи (2)–(3) при фиксированных управлении v и возмущении w называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.*

Определение 15. *Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Назовем $u \in \mathbf{R}$ прыгающим разрывом функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.*

Как и ранее, допускается, что для некоторых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ задача (2)–(3) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. также возможен сингулярный случай.

Пусть $X = \mathbf{H}_\circ^1(\Omega)$, если (3) — граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (3) — граничное условие Неймана или третье краевое условие.

Положим

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $J_1(u) \geqslant 0 \ \ \forall u \in X$;

2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leqslant a(x) \ \forall u \in \mathbf{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \dfrac{2n}{n+2}$, фиксирована;

3) найдется $u_0 \in X$, для которого имеет место неравенство

$$\int_\Omega dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s)ds > 0;$$

4) если пространство $N(L)$ решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, \ \ x \in \Omega, \\ Gu|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(L), ||u|| \to +\infty} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty;$$

5) оператор $B : U \to \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ непусто;

6) оператор $D : W \to \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, пространство возмущений W банахово.

Тогда для любых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ существует полуправильное решение задачи (2)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1), 3)–6) теоремы 2 и дополнительно условия:*

1′) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ невозрастающая на $\mathbf{R}$ и для некоторой $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q = \dfrac{2n}{n+2}$, справедливо неравенство $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$;

2′) для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x,\cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I – не более чем счетно), и если $g(x,u_i-) > g(x,u_i+)$, то $g(x,u_i-)g(x,u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 2.

Доказательство теорем 2, 3 сводится к проверке выполнения условий теоремы 1 данной работы. Факт выполнения условий 1)–4) теоремы 1 для соответствующих эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями установлен в работах [1, 2, 4]. Условия 5), 6) теоремы 1 идентичны условиям 5), 6) теоремы 2. Тем самым все условия теоремы 1 выполнены, поэтому справедливо утверждение теоремы 1, а, значит, и теорем 2, 3. □

Аналогично получают результаты для задач управления распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью при наличии возмущений.

Положив в уравнении (2) $v(x) \equiv 0$ и $w(x) \equiv 0$, т. е. исключив из рассмотрения управление и возмущение, получим результат о разрешимости задачи (2)–(3) — утверждение теорем 2, 3, что согласуется с результатами работ [1,2,4]. В отсутствие управления и возмущения ($v \equiv 0$, $w \equiv 0$) результат о разрешимости задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью ранее был получен в работе [9].

В заключение рассмотрим приложение полученных результатов к задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости М.А.Гольдштика [10]. Математическая постановка задачи Гольдштика состоит в определении непрерывно дифференцируемой функции тока $\psi = \psi(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geqslant 0, \end{cases}$$

и краевому условию

$$\psi|_\Gamma = \varphi(s).$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\omega > 0$ — завихренность, Γ — кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω, φ — непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция. Данная задача также рассматривалась в работах [4, 11–17].

Как показано в работах [4, 14, 15], математическая модель задачи Гольдштика сводится к следующей задаче:

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \quad x \in \Omega,$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x), \end{cases}$$

функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 = 0, \\ \psi_0|_\Gamma = \varphi(s). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу управления с возмущением в такой модели:

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)) + Bv(x) + Dw(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

где оператор $B : U \to \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений, $q > 1$, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (4)–(5) непусто, оператор $D : W \to \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, W – банахово пространство возмущений, возмущение $w \in W$.

В работах [4, 6, 14, 15, 18] проверено выполнение условий 1)–3) теоремы 2 данной работы для задачи Гольдштика. Условие 4) теоремы 2 не требуется [6, 18]. Условия 5), 6) теоремы 2 выполнены согласно сделанным выше предположениям в постановке задачи (4)–(5) относительно пространства управлений U, множества допустимых управлений U_{ad}, оператора B, пространства возмущений W, оператора D. Итак, все условия теоремы 2 для задачи (4)–(5) выполнены. Поэтому для любых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ существует полуправильное решение задачи (4)–(5). Отметим, что в работах [10–13, 16, 17] полуправильные решения не рассматривались.

Таким образом, в работе рассмотрен практический пример (задача Гольдштика), иллюстрирующий общую теорию.

Список литературы

[1] В.Н.Павленко, Д.К.Потапов, О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами, *Сиб. матем. журн.*, **42**(2001), № 4, 911–919.

[2] Д.К.Потапов, О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, (2004), вып. 4, 125–132.

[3] D.K.Potapov, Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators, *J. Math. Sciences*, **144**(2007), № 4, 4232–4233.

[4] Д.К.Потапов, Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью, СПб., Изд-во ИБП, 2008.

[5] Д.К.Потапов, Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами, *Уфимск. матем. журн.*, **3**(2011), № 1, 43–46.

[6] Д.К.Потапов, Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами, *Труды ИММ УрО РАН*, **17**(2011), № 1, 190–200.

[7] Ж.Л.Лионс, Управление сингулярными распределенными системами, М., Наука, 1987.

[8] В.Н.Павленко, Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами, *Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. 3. Математика. Механика*, (1994), № 1(2), 87–95.

[9] Д.К.Потапов, О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями, *Дифференц. уравнения*, **46**(2010), № 1, 150–152.

[10] М.А.Гольдштик, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, *Докл. АН СССР*, **147**(1962), № 6, 1310–1313.

[11] М.А.Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., Изд-во АН СССР, 1962.

[12] И.И.Вайнштейн, В.К.Юровский, Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1976, № 5, 98–100.

[13] О.В.Титов, Вариационный подход к плоским задачам о склейке потенциального и вихревого течения, *Прикл. матем. и мех.*, **41**(1977), вып. 2, 370–372.

[14] Д.К.Потапов, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, *Известия РАЕН. Сер. МММИУ*, **8**(2004), № 3–4, 163–170.

[15] Д.К.Потапов, Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика, *Матем. заметки*, **87**(2010), вып. 2, 262–266.

[16] И.И.Вайнштейн, Дуальная задача к задаче М.А.Гольдштика с произвольной завихренностью, *Журн. СФУ. Сер. матем. физ.*, **3**(2010), № 4, 500–506.

[17] И.И.Вайнштейн, Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М.А.Гольдштика, *Журн. СФУ. Сер. матем. физ.*, **4**(2011), № 3, 320–331.

[18] Д.К.Потапов, Бифуркационные задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями, *Матем. заметки*, **90**(2011), вып. 2, 280–284.

Control Problems for Equations with a Spectral Parameter and a Discontinuous Operator under Perturbations

Dmitry K. Potapov

In Banach spaces control problems for systems with a spectral parameter, an external perturbation and a discontinuous operator are considered. The theorem on resolvability for investigated problems is proved. General results are applied to control problems for distributed systems of the elliptic type with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity under an external perturbation. Propositions on resolvability for such problems are established. Control problem with a perturbation in the Gol'dshtik mathematical model for separated flows of incompressible fluid is considered as an application.

Keywords: control problems, spectral parameter, discontinuous operator, external perturbation, "perturbation – control – state", variational method, Gol'dshtik model.