

УДК 539.4.011, 539.4.015

Влияние температуры на прочность линейно-армированных боропластиков при сложном нагружении

Сергей Ф. Пятаев*

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,

Россия

Получена 18.11.2011, окончательный вариант 25.12.2011, принята к печати 10.02.2012

В работе разработана модель композиционного материала (КМ), с помощью которой изучено влияние температуры на прочность линейно-армированной системы "эпоксидная матрица – борные волокна". Предполагается выполнение условий осреднения микронапряжений по микрообъему (представительному элементу). В частном случае, при соответствующем выборе микрообъема, выполняются условия непрерывности перемещений на границах раздела между ними.

Ключевые слова: поверхность прочности, композиционный материал, температура.

Введение

Линейно-армированные (однонаправленные) волокнистые КМ, имеющие высокую прочность и жесткость в направлении волокон, являются одним из основных объектов изучения в механике волокнистых композитов, поскольку эти слои составляют элементы более сложных по структуре КМ. Для повышения механических характеристик в поперечном направлении однонаправленные слои комбинируются под различными по отношению к направлению армирования одного слоя относительно другого углами, что приводит к слоистым КМ, свойства которых уже достаточно высоки в необходимых для эксплуатации направлениях [1].

Наиболее ответственные конструкции, изготовленные с применением КМ, эксплуатируются, как правило, в экстремальных условиях, при которых прочность и жесткость являются одними из важнейших механических характеристик, при этом желательно, чтобы напряженно-деформированное состояние (НДС) не выходило за рамки упругой области. Эпоксидные связующие, обладающие комплексом благоприятных свойств, определили их широкое применение в производстве конструкций из КМ. К таким свойствам относятся высокие механические и адгезионные характеристики, позволяющие достаточно полно использовать свойства армирующих волокон. Отвержденные эпоксидные связующие стойки к действию многих агрессивных сред и могут эксплуатироваться до температур порядка 200 °С [2].

Борные волокна хорошо совмещаются со многими полимерными связующими, в том числе и с эпоксидной смолой. Их достоинством является также высокая прочность и жесткость, недостатком — высокая стоимость и хрупкость.

Композиты на основе борных волокон и полимерной матрицы применяются в основном для изготовления стержневых элементов и панелей, а также для усиления профилей и элементов конструкций с целью повышения их жесткости и прочности [3]: из боропластика

*psf@icm.krasn.ru

изготовлен предкрылок, установленный на самолете «Боинг-707», экономия массы составляет 25 % по сравнению с цельнометаллической аналогичной конструкцией, выполненной из алюминия; применение эпоксидного боропластика для изготовления подкоса стойки шасси отделением Commercial Airplane фирмы Boeing дало экономию массы 28 %; из боропластика изготавливаются также полноразмерные (по размаху) обшивки крыла самолета F-100.

Эффективные упругие характеристики (жесткости) КМ определяются, как правило, из сравнения дополнительных или потенциальных энергий неоднородного представительного элемента и однородного элемента аналогичных размеров с эффективными модулями податливости или жесткости соответственно. В силу интегральности энергий высокая концентрация микронапряжений, сосредоточенная в малой по сравнению со всем представительным элементом области, незначительно влияет на величину энергии и, как следствие, на эффективные модули [4–6].

Прочностные свойства КМ (начало разрушения) обуславливаются локальными концентрациями микронапряжений; вследствие этого модели по определению прочности КМ должны достаточно точно описывать концентрацию микронапряжений, возникающую на границе раздела волокно-матрица.

1. Постановка задачи

Исследуем поведение поверхности прочности при сложном нагружении в зависимости от температуры. В качестве представительного элемента КМ выбирается произвольный неоднородный цилиндр V (рис. 1), внутри которого расположен круговой цилиндр V_p , моделирующий волокно (наполнитель); область $V_m = V \setminus V_p$ заполнена связующим (матрица).

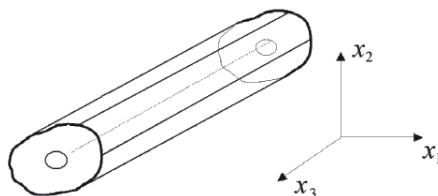


Рис. 1. Представительный элемент линейно-армированной среды

Вводится требование выполнения классических условий осреднения микронапряжений

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

где σ_{ij} — микронапряжения КМ, которые необходимо определить, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ — заданные макронапряжения, являющиеся решениями какой-либо упругой задачи для тела с известными эффективными модулями упругости.

Принимаются следующие предположения:

1) в элементе V действуют только макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$, $\langle \sigma_{22} \rangle$, $\langle \sigma_{33} \rangle$, а остальные компоненты тензора макронапряжений равны нулю;

2) составляющие фазы КМ однородны и изотропны; адгезия между фазами идеальна; микронапряженное состояние и смещения u_1 , u_2 в элементе V не зависят от осевой координаты x_3 , при этом $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а остальные микронапряжения отличны от нуля; массовые силы отсутствуют;

3) на боковой поверхности заданы смещения; на торцах действуют неизвестные микро-напряжения σ_{33} ;

4) осуществляется предварительный (до начала деформирования внешними усилиями) нагрев или охлаждение тела разностью температур $\Delta T = T - T_0$, зависящей в общем случае от координат x_1 и x_2 , при этом при температуре T_0 в теле отсутствуют напряжения и деформации.

2. Решение задачи

Из предположения 2 непосредственно следует, что условия осреднения (1) упрощаются и принимают вид

$$\frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} dS = \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

При изменении температуры и действии механических нагрузок связь между напряжениями и деформациями для изотропного тела описывается законом Дюамеля-Неймана $\vec{\sigma} = \vec{\varepsilon}D - K\alpha\Delta T\vec{e}$. Здесь $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}; \sigma_{33})$ — вектор микронапряжений; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \gamma_{12}; \varepsilon_{33})$ — вектор деформаций, где $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ — полная сдвиговая деформация; α — коэффициент теплового линейного расширения; $\vec{e} = (1, 1, 0, 1)$ — вектор, отвечающий за изменение микронапряжений $\vec{\sigma}$ от действия разности температур ΔT ; D — тензор жесткости

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & G & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix},$$

записанный в соответствии с порядком следования компонент векторов $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\sigma}$; λ — постоянная Ляме; G — модуль сдвига; $K = 3\lambda + 2G = E/(1 - 2\nu)$ — объемный модуль упругости; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Компоненты тензора D и коэффициент α являются кусочно-постоянными функциями координат x_1 и x_2 , при этом упругие и прочностные характеристики фаз дополнительно зависят и от температуры, т.е. $E = E(T, x_1, x_2)$, $\nu = \nu(T, x_1, x_2)$.

Случай, когда действует только напряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$, ниже рассматривается отдельно.

С помощью предположения 2 можно показать, что деформация ε_{33} является постоянной в области V , а перемещение $u_3 = \varepsilon_{33}x_3$, т.е. оно, в отличие от u_1, u_2 , не зависит от x_1, x_2 .

При введенных выше предположениях и полученного следствия функционал Лагранжа для элемента V можно записать в виде

$$L = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\varepsilon}D - K\alpha\Delta T\vec{e}) \vec{\varepsilon}^* dV - \int_{S_1} \vec{u}\vec{p}_1^* dS - \int_{S_2} \vec{u}\vec{p}_2^* dS, \quad (3)$$

где S_1 и S_2 — торцы элемента V при $x_3 = -l$ и $x_3 = l$ соответственно; $\vec{p}_1 = (0; 0; -\sigma_{33})$, $\vec{p}_2 = (0; 0; \sigma_{33})$ — векторы нагрузок на этих торцах; $\vec{u} = (u_1, u_2, \varepsilon_{33}x_3)$ — вектор смещений; символ * обозначает транспонирование вектор-строки.

В функционале (3) интегралы по торцам S_1 и S_2 из-за независимости σ_{33} от x_3 можно переписать как

$$\int_S \varepsilon_{33} l \sigma_{33} dS,$$

где S — произвольное сечение элемента V в трансверсальной плоскости. С учетом $\varepsilon_{33} = \text{const}$ и $\langle \sigma_{33} \rangle = 0$ последний интеграл равен нулю; т.о., в L остается только объемный интеграл, который сводится с точностью до положительного множителя l к интегралу

$$L = \int_S (\bar{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \bar{\varepsilon}) \bar{\varepsilon}^* dS.$$

Перепишем L в виде

$$L = \int_S \left[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} \right] dS - \int_S K \alpha (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \Delta T dS. \quad (4)$$

Из закона Дюамеля-Неймана для σ_{33} после умножения на ε_{33} следует $\sigma_{33}\varepsilon_{33} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} - K \alpha \Delta T \varepsilon_{33}$. Интегрируя это равенство по S и учитывая $\varepsilon_{33} = \text{const}$ и $\langle \sigma_{33} \rangle = 0$, получим

$$\int_S \left[(\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} \right] dS = \varepsilon_{33} \int_S K \alpha \Delta T dS.$$

С учетом этого соотношения функционал Лагранжа L преобразуется к виду

$$L = \int_S \left[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 \right] dS + \varepsilon_{33} \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS. \quad (5)$$

Для выражения ε_{33} через ε_{11} и ε_{22} проинтегрируем соотношение для σ_{33} закона Дюамеля-Неймана, откуда с учетом $\langle \sigma_{33} \rangle = 0$ и $\varepsilon_{33} = \text{const}$ следует

$$\varepsilon_{33} \int_S (\lambda + 2G) dS + \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T dS = 0. \quad (6)$$

Так как упругие модули являются кусочно-постоянными функциями на S , то

$$\langle \lambda + 2G \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\lambda + 2G) dS = (\lambda_m + 2G_m)c_m + (\lambda_p + 2G_p)c_p,$$

где c_m, c_p — концентрации материала матрицы и волокна; $\lambda_m, G_m, \lambda_p, G_p$ — коэффициенты Ламе и модули сдвига матрицы и волокна соответственно. Тогда из (6) определяется ε_{33}

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[\int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T dS \right]. \quad (7)$$

Подстановка (7) в (5) приводит функционал L к виду, в котором присутствуют только $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ и ε_{12} :

$$L = L_q + L_l, \quad (8)$$

где $L_q = L_{q1} - L_{q2}$, L_l — соответственно квадратичная и линейная части функционала L :

$$L_{q1} = \int_S [(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2] dS ,$$

$$L_{q2} = \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[\int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS \right]^2 ,$$

$$L_l = \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \int_S K\alpha\Delta T dS \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K\alpha\Delta T(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS .$$

В работе [7] доказано, что квадратичная часть L_q функционала L в пространстве обобщенных функций $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$, квадратично интегрируемых вместе со своими первыми производными и имеющих на ∂S нулевой след, положительно определена, откуда следует существование и единственность элемента $\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}$, доставляющего минимум функционалу L_q .

При решении задачи минимизации функционала (8) методом конечных элементов функционал L_{q2} порождает полностью заполненную глобальную матрицу жесткости. Во избежание этого преобразуем L_{q2} . Поскольку

$$\int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS = \lambda_m \int_{S_m} \operatorname{div} \vec{u} dS + \lambda_p \int_{S_p} \operatorname{div} \vec{u} dS ,$$

где S_m , S_p — области, занимаемые материалами матрицы и волокна соответственно, $S = S_m \cup S_p$; $\vec{u} = (u_1; u_2)$ — вектор перемещений, то по формуле Гаусса–Остроградского эти два интеграла переписываются в виде

$$\int_{S_p} \operatorname{div} \vec{u} dS = \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma , \quad \int_{S_m} \operatorname{div} \vec{u} dS = \int_{\partial S_m} \vec{u} \vec{n}_m^* d\gamma - \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma . \quad (9)$$

Здесь \vec{n}_m — внешняя нормаль к внешней границе ∂S_m области S_m ; \vec{n}_p — внешняя нормаль к границе ∂S_p области S_p .

Таким образом, функционал L_{q2} в окончательном варианте принимает следующий вид:

$$L_{q2} = \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[(\lambda_p - \lambda_m) \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma + \lambda_m \int_{\partial S_m} \vec{u} \vec{n}_m^* d\gamma \right]^2 . \quad (10)$$

В случае, если ΔT является кусочно-постоянной функцией на S , то линейную часть L_l функционала L также можно упростить, применяя формулы (9) для 2-го слагаемого в L_l . Учитывая, что $\int_{\partial S} K\alpha\Delta T dS = S \langle K\alpha\Delta T \rangle$ и группируя слагаемые при криволинейных интегралах, получим

$$L_l = q_p \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma + q_m \int_{\partial S_m} \vec{u} \vec{n}_m^* d\gamma , \quad (11)$$

где $q_p = \frac{\langle K\alpha\Delta T \rangle}{\langle \lambda + 2G \rangle} (\lambda_p - \lambda_m) - (K\alpha\Delta T)_p + (K\alpha\Delta T)_m$, $q_m = \frac{\langle K\alpha\Delta T \rangle}{\langle \lambda + 2G \rangle} \lambda_m - (K\alpha\Delta T)_m$. Таким образом, для поиска микронапряжений в области S будем использовать функционал L с представлениями L_{q2} и L_l в виде (10) и (11) соответственно и соотношения (2), задающие связь между микро- и макронапряжениями.

Для получения алгебраической системы уравнений по определению неизвестных узловых перемещений осуществим вариацию функционала L

$$\delta \vec{U} A \vec{U}^* - \delta \vec{U}_p \beta_p \vec{a}_p \otimes \vec{a}_p \vec{U}_p^* + \delta \vec{U}_p [0.5 q_p \vec{a}_p^* - \beta_m \vec{a}_p \otimes \vec{a}_m \vec{U}_m^*] = 0 , \quad (12)$$

где $\beta_p = \frac{(\lambda_p - \lambda_m)^2}{2S \langle \lambda + 2G \rangle}$, $\beta_m = \frac{\lambda_m(\lambda_p - \lambda_m)}{2S \langle \lambda + 2G \rangle}$; A — глобальная матрица жесткости, порожденная функционалом L_{q1} ; \vec{U} — глобальный вектор перемещений; \vec{U}_p, \vec{U}_m — векторы перемещений соответственно на ∂S_p и ∂S_m с компонентами:

$$\begin{aligned} (\vec{U}_p)_{2i-1} &= u_1(\vec{x}_{k_i}), & (\vec{U}_p)_{2i} &= u_2(\vec{x}_{k_i}), & k_i & \text{— номера узлов на } \partial S_p, & i = 1, \dots, n_p, \\ (\vec{U}_m)_{2j-1} &= u_1(\vec{x}_{l_j}), & (\vec{U}_m)_{2j} &= u_2(\vec{x}_{l_j}), & l_j & \text{— номера узлов на } \partial S_m, & j = 1, \dots, n_m; \end{aligned}$$

координаты векторов \vec{a}_p, \vec{a}_m вычисляются через координаты узлов на ∂S_p и ∂S_m по однотипным формулам (n — число узлов на соответствующей границе γ ; k_i — номера узлов на γ , $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} (\vec{a}_\gamma)_1 &= y_{k_2} - y_{k_n}, & (\vec{a}_\gamma)_2 &= x_{k_n} - x_{k_2}, & (\vec{a}_\gamma)_{2n-1} &= y_{k_1} - y_{k_{n-1}}, & (\vec{a}_\gamma)_{2n} &= x_{k_{n-1}} - x_{k_1}, \\ (\vec{a}_\gamma)_{2i-1} &= y_{k_{i+1}} - y_{k_{i-1}}, & (\vec{a}_\gamma)_{2i} &= x_{k_{i-1}} - x_{k_{i+1}}, & i &= 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Тогда систему алгебраических уравнений условно можно записать в виде

$$A\vec{U}^* - \beta_p \vec{a}_p \otimes \vec{a}_p \vec{U}_p^* = -0.5 q_p \vec{a}_p^* + \beta_m \vec{a}_p \otimes \vec{a}_m \vec{U}_m^*. \quad (13)$$

Здесь необходимо учитывать, что второй вектор в левой части, имеющий меньшую размерность по сравнению с первым, вносится в него в соответствии с номерами узлов на ∂S_p . Аналогичным образом разносятся координаты векторов правой части размерности $2n_p$ по глобальному вектору правой части размерности $2N$ (N — общее число узлов).

Зададим на границе ∂S краевые условия в виде

$$u_1 \Big|_{\partial S} = c_1 x_1 + c_3 x_2, \quad u_2 \Big|_{\partial S} = c_2 x_2, \quad (14)$$

где c_1, c_2, c_3 — пока произвольные постоянные. Линейность перемещений на ∂S обосновывается тем, что в трансверсально-изотропном теле при действии в плоскости изотропии однородных макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$, $\langle \sigma_{22} \rangle$, $\langle \sigma_{12} \rangle$ перемещения с точностью до трансляции и вращения тела как жесткого целого будут $u_1 = \langle \varepsilon_{11} \rangle x_1 + 2 \langle \varepsilon_{12} \rangle x_2$, $u_2 = \langle \varepsilon_{22} \rangle x_2$.

Для того чтобы подобрать константы c_i в (14) так, что решение упругой задачи удовлетворяло условиям осреднения (2), разобьем эту задачу на четыре со следующими краевыми и температурными условиями

$$\begin{aligned} \text{задача 1:} & \quad u_1 \Big|_{\partial S} = x_1, & u_2 \Big|_{\partial S} &= 0, & \Delta T &= 0, \\ \text{задача 2:} & \quad u_1 \Big|_{\partial S} = 0, & u_2 \Big|_{\partial S} &= x_2, & \Delta T &= 0, \\ \text{задача 3:} & \quad u_1 \Big|_{\partial S} = x_2, & u_2 \Big|_{\partial S} &= 0, & \Delta T &= 0, \\ \text{задача 4:} & \quad u_1 \Big|_{\partial S} = 0, & u_2 \Big|_{\partial S} &= 0, & \Delta T &\neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через $\sigma_{ij}^{(k)}$ микронапряжения k -й упругой задачи ($k = 1, 2, 3, 4$) и воспользуемся тем, что линейная комбинация решений

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ij}^{(4)}, \quad i, j = 1, 2; \quad \sigma_{33} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{33}^{(4)} \quad (16)$$

будет решением задачи с краевыми условиями (14). Интегрируя соотношения (16) по области S и используя условия (2), получим систему трех уравнений для определения констант c_k :

$$\sum_{k=1}^3 c_k \langle \sigma_{ij}^{(k)} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{(4)} \rangle, \quad i, j = 1, 2. \quad (17)$$

Отметим, что условие осреднения для σ_{33} (последнее соотношение в (16)) выполнено, т.к. функционал L построен так, что $\langle \sigma_{33}^{(k)} \rangle = 0$.

После решения этой системы линейная комбинация (16) представима в форме

$$\vec{\sigma} = (\langle \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle) A^{-1} B + \vec{\sigma}^{(4)}, \quad (18)$$

где

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}), \quad \langle \vec{\sigma} \rangle = (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle),$$

$$\vec{\sigma}^{(4)} = (\sigma_{11}^{(4)}, \sigma_{22}^{(4)}, 0, \sigma_{33}^{(4)}), \quad \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle = (\langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0),$$

$$A = \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(3)} \rangle \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{33}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} & \sigma_{22}^{(3)} & \sigma_{12}^{(3)} & \sigma_{33}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Полученная зависимость (18) выражает вектор микронапряжений $\vec{\sigma}$ через заданные макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и вычисленные из четырех упругих задач микронапряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$.

Наиболее интересными являются поверхности прочности КМ в пространстве главных напряжений $\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle$. Однако связь (18) не отражает зависимости микронапряжений $\vec{\sigma}$ от макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$. Для получения такой зависимости необходимо решить еще одну упругую задачу, когда в КМ действует только $\langle \sigma_{33} \rangle$ при $\Delta T = 0$. Можно показать [8], что если в КМ реализуется это макронапряженное состояние, то все микронапряжения, отличные от σ_{33} , равны или близки к нулю, а микронапряжение σ_{33} постоянно в пределах каждой фазы и вследствие этого связано с $\langle \sigma_{33} \rangle$ правилом смеси; деформация ε_{33} постоянна во всем КМ, все остальные деформации или нулевые, или близкие к нулевым. Из-за малости всех деформаций по сравнению с ε_{33} отличие $\sigma_{33}(\vec{x})$ от $E(\vec{x})\varepsilon_{33}$ весьма незначительно, и тогда с большой степенью точности можно положить $\sigma_{33}(\vec{x}) = E(\vec{x})\varepsilon_{33}$. Интегрируя это соотношение по области S , получим $\varepsilon_{33} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{\langle E \rangle}$, где $\langle E \rangle = (1-c)E_m + cE_p$, откуда следует зависимость σ_{33} от $\langle \sigma_{33} \rangle$:

$$\sigma_{33}(\vec{x}) = \frac{E(\vec{x})}{\langle E \rangle} \langle \sigma_{33} \rangle. \quad (19)$$

Таким образом, суммируя решение (19) при равных нулю других напряжениях с решением (18), определим искомую связь микронапряжений $\vec{\sigma}$ с макронапряжениями $\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle$, которую можно записать в матричном виде

$$\vec{\sigma} = (\langle \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle) M + \vec{\sigma}^{(4)}, \quad (20)$$

если к векторам $\langle \vec{\sigma} \rangle$ и $\langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle$ добавить четвертую компоненту, а к матрице $A^{-1}B$, имеющей размеры 3×4 , — четвертую строку

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle), \quad \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle = (\langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0, 0),$$

$$M = \begin{bmatrix} A^{-1}B \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(\vec{x})}{\langle E \rangle} \end{bmatrix}.$$

Построим в пространстве главных напряжений $\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle$ поверхность прочности, основываясь на методике, предложенной в работе [8]. Для этого разобьем область S на конечные элементы и методом конечных элементов решим четыре упругих задачи с краевыми условиями (15), определив тем самым матрицу M . Задавая однопараметрический закон нагружения $\langle \vec{\sigma} \rangle = t\vec{k}$ при $|\vec{k}| = 1$, $\langle \sigma_{12} \rangle = 0$, вычислим через соотношение

(20) микронапряжения σ_{ij} на каждом элементе. Далее, выбирая какое-либо условие прочности, вычислим для каждого элемента критическое значение параметра t , при котором элемент выходит на стадию разрушения, и затем из всех этих значений выберем минимальное значение t_* , которое и будет являться критическим для всего композиционного материала в направлении нагружения \vec{k} . Изменяя вектор \vec{k} в пространстве макронапряжений, можно построить поверхность прочности КМ.

При численных расчетах для определенности в качестве области S был принят ромб, изображенный на рис. 2(a), отвечающий за двоякопериодический трансверсально-изотропный КМ. Здесь угол $\alpha = \pi/3$, а векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ по модулю равны и отвечают за трансляционную симметрию, согласно которой при параллельных переносах вдоль этих базисных векторов на расстояния, кратные $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2|$, структура повторяется. В качестве КМ

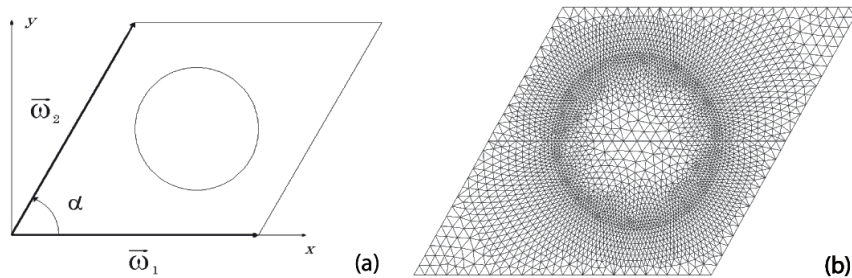


Рис. 2. (a) — ячейка периодичности КМ; (b) — триангуляция ячейки: 3313 узла, 6504 элемента

рассматривается система "эпоксидная матрица – борные волокна" с объемной концентрацией волокон $c = 0,3$. Составляющие фазы имели характеристики: $E_m = 3$ ГПа, $E_p = 72$ ГПа; $\nu_m = 0,3$, $\nu_p = 0,2$; $\sigma_m = 60$ МПа, $\sigma_p = 3,5$ ГПа — пределы прочности матрицы и волокна соответственно. Коэффициенты линейного расширения при различных температурах имеют значения: $T_0 = 20^\circ\text{C}$: $\alpha_m^0 = 1,92 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_p^0 = 0,414 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $T_1 = 180^\circ\text{C}$: $\alpha_m^1 = 3,54 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_p^1 = 0,538 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Из-за отсутствия дополнительных данных зависимость коэффициентов линейного расширения от температуры предполагалась линейной, а в качестве условия прочности для каждой фазы выбиралось условие Мизеса. Расчеты проводили на ячейке периодичности, разбитой на 6504 элемента и имеющей 3313 узлов с помощью алгоритма, разработанного в работе [9]. Результаты триангуляции изображены на рис. 2(b).

Расчеты при различных значениях температуры T показали, что поверхности прочности P_T почти не изменяются по форме и размерам и близки к эллиптическому цилиндру, симметричному относительно плоскости $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$. От оси $\langle \sigma_{33} \rangle$ цилиндр отклоняется примерно на $5-7^\circ$ и ограничен снизу и сверху близкими к эллипсоидам поверхностями с полуосями, много большими значений полуосей цилиндра. Это приводит к тому, что ограничивающие область поверхности близки к плоскостям. Часть поверхности P_{T_0} при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ($\Delta T = 0^\circ\text{C}$) представлена на рис. 3(a), остальные симметричны относительно плоскостью $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ и начала системы координат (на рисунках второй индекс у $\langle \sigma_{ii} \rangle$ не приводится). На рис. 3(b) изображены сечения этой поверхности плоскостями $\langle \sigma_{33} \rangle / \sigma_m = \text{const}$. Кривые $\gamma_4 - \gamma_6$ внутри сечений отражают вышеупомянутую эллипсоидальность ограничивающих поверхностей, а на "пике" в результате пересечения ограничивающей поверхности с цилиндром они совпадают с γ_3 . При изменении T поверхности P_T возникают как результат трансляции поверхности P_{T_0} вдоль плоскости $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$. Сечения поверхностей P_T ($T = 20, 100, 180^\circ\text{C}$) плоскостью $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ представлены на рис. 4, который наглядно демонстрирует перенос поверхности P_{T_0} .

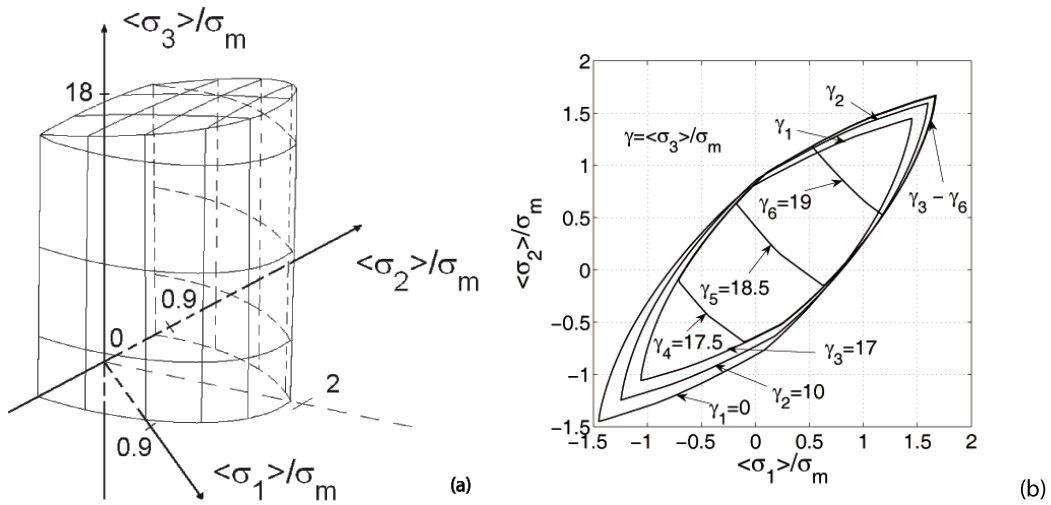


Рис. 3. (а) — поверхность прочности P_{T_0} при $T_0 = 20^\circ\text{C}$; (б) — сечения поверхности P_{T_0} плоскостями $\langle \sigma_{33} \rangle = \text{const}$

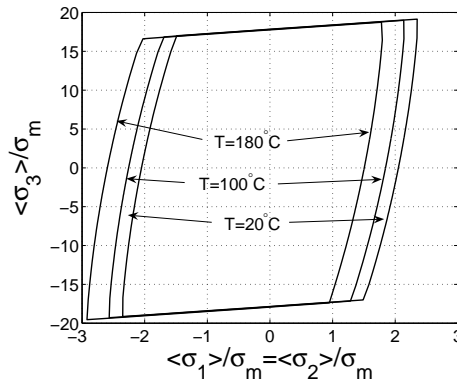


Рис. 4. Сечения поверхностей P_{20} , P_{100} , P_{180} плоскостью $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$

3. Заключение

Разрушение композитов даже при простом нагружении является достаточно сложным процессом, теоретическое описание которого связано с большими трудностями. Поэтому большое распространение получили экспериментальные методы определения пределов прочности на растяжение и сдвиг с последующим использованием этой информации в каком-либо феноменологическом критерии прочности. Однако такие критерии представляют собой аналитическую аппроксимацию экспериментальных результатов, которая может быть осуществлена неоднозначно и, следовательно, степень ее соответствия оценивается субъективно. Предложенная модель построения критерия прочности основана на структурном подходе, при котором прочность композита определяется через анализ микронапряжений. Такой подход позволяет избежать неоднозначности, присущей феноменологическому подходу, указать область в КМ, в которой зарождается начало разрушения, и предоставля-

ет возможность дальнейшего отслеживания процесса разрушения. Сравнение полученных расчетных значений прочности $\sigma_{com(i)}$ ($i = 1, 3$ — нагружение композита осуществляется поперек и вдоль волокон соответственно) с экспериментальными данными [1] при одноосных нагружениях показали их хорошее совпадение. Так, при нагружении вдоль волокон расчетный предел прочности $\sigma_{com(3)} \approx 20\sigma_m = 1,2$ ГПа, экспериментальный — 1,6 ГПа; при нагружении поперек волокон расчетное значение $\sigma_{com(1)} \approx 0,85\sigma_m = 51$ МПа, экспериментальное — 65 МПа. Расчетные данные сопоставимы также и с данными, приведенными в [3]. Отклонение расчетных данных от экспериментальных в сторону уменьшения объясняется тем, что построенная модель описывает начало зарождения разрушения, а экспериментальные данные отражают полное разрушение композитной системы. Таким образом, приемлемое совпадение расчетных данных с экспериментальными и использование структурного подхода приводят к тому, что предложенная модель может быть пригодной для дальнейших исследований поведения КМ, в частности его полного разрушения.

Список литературы

- [1] В.В.Васильев, Механика конструкций из композиционных материалов, М., Машиностроение, 1988.
- [2] А.А.Берлин, Л.К.Пахомова, Полимерные матрицы для высокопрочных армированных композитов, *Высокомолекулярные соединения, (А)***32**(1990), № 7, 37–49.
- [3] Б.Б.Бобович, Неметаллические конструкционные материалы, М., МГИУ, 2009.
- [4] Т.Д.Шермергор, Теория упругости микронеоднородных сред, М., Наука, 1977.
- [5] Р.Кристенсен, Введение в механику композитов, М., Мир, 1982.
- [6] Г.А.Ванин, Микромеханика композиционных материалов, Киев, Наукова думка, 1985.
- [7] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **2**(2009), №4, 470–483.
- [8] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Определение предельного упругого сопротивления композитов при сложном напряженном состоянии, *Проблемы прочности и пластичности*, Нижний Новгород, 2000, 5–18.
- [9] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов, *Вычисл. технологии*, **5**(2000), № 2, 82–91.

Influence of Temperature on the Strength of Linear-reinforced Boronplastics under Complex Loading

Sergey F. Pyataev

We developed a model of a composite material on the base of which the effect of temperature on the strength of the linear-reinforced system of epoxy matrix - boron fibers is studied. The condition of averaging of microstresses on the microscopic volume is assumed to be valid (representative element). In the particular case under an appropriate choice of the microscopic volume, the conditions of continuity of displacements at the interfaces between them are fulfilled.

Keywords: surface strength, composite material, temperature.