УДК 517.55, 517.588

Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений

Евгений Н. Михалкин*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 15.09.2011, окончательный вариант 30.10.2011, принята к печати 30.12.2011

Рассматриваются алгебраические уравнения с одним или двумя параметрами. Их решения представляются в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов. Используя этот факт, решения уравнений третьей и четвертой степеней выражаются нелинейным образом через гипергеометрический ряд Гаусса.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд Гаусса, обобщенный гипергеометрический ряд.

Введение

Общее алгебраическое уравнение степени n простым преобразованием сводится к виду

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \dots + x_p y^{n_p} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \dots > n_p > 0. \tag{1}$$

Обозначим через $y(x) = y(x_1, \dots x_p)$ алгебраическую функцию, определяемую уравнением (1). Главным решением уравнения (1) называется ветвь $y(x)$ вблизи $x = 0$ с условием $y(0) = 1$.

В настоящей работе рассматривается алгебраическое уравнение (1) при $p = 1$, т.е. триномиальное уравнение

$$y^n + xy^m - 1 = 0. \tag{2}$$

Доказывается формула для его решения в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов. Напомним, что обобщенным гипергеометрическим (неконфлуэнтным) рядом называется степенной ряд

$${}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\end{matrix}\middle| z\right) = \frac{\Gamma(\beta_1)\dots\Gamma(\beta_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha_1)\dots\Gamma(k+\alpha_n)}{k!\Gamma(k+\beta_1)\dots\Gamma(k+\beta_{n-1})} z^k. \tag{3}$$

Следует отметить, что в [1] было найдено интегральное представление для решения (1) в виде интегрирования элементарной функции по компакту. В случае уравнения (2) была описана монодромия решения.

*mikhalkin@bk.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

Теорема 1. *Ветвь решения уравнения (2) с условием* $y(0) = 1$ *допускает представление в виде суммы рядов*

$$y(x) = -\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\Gamma(s-\frac{1+ms}{n})}{s!\Gamma(1-\frac{1+ms}{n})}x^s\times$$

$$\times{}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix} a_s, a_s+\frac{1}{m}, \ldots, a_s+\frac{m-1}{m}, b_s, b_s+\frac{1}{n-m}, \ldots, b_s+\frac{n-m-1}{n-m} \\ c_s, c_s+\frac{1}{n}, \ldots, \hat{1}, \ldots, c_s+\frac{n-1}{n}\end{matrix}\middle|(-1)^m\zeta(x)\right), \tag{4}$$

где

$$a_s = \frac{s}{n}+\frac{1}{mn}, \quad b_s = \frac{s}{n}-\frac{1}{n(n-m)}, \quad c_s = \frac{s}{n}+\frac{1}{n}, \quad \zeta(x) = \frac{m^m(n-m)^{n-m}}{n^n}x^n, \tag{5}$$

а символ $\hat{1}$ *означает пропуск единицы.*

Указанные ряды сходятся в круге $|x| < \dfrac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$.

Аналогичная формула была доказана Биркеланом [2]. Он опирался на формулу Лагранжа для неявной функции, и вид его решения несколько отличается от нашего.

Отметим также, что в статье [3] было найдено решение $\omega(t)$ уравнения

$$\omega^n - \omega + t = 0 \tag{6}$$

в указанном классе функций.

Теорема 2([3]). *Решение уравнения (6) с условием* $\omega(0) = 0$ *представляется рядом*

$$\omega^\mu(t) = t^\mu\ {}_{n-1}F_{n-2}\left(\begin{matrix}\frac{\mu}{n}, \frac{\mu+1}{n}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{n} \\ \frac{\mu+1}{n-1}, \frac{\mu+2}{n-1}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{n-1}\end{matrix}\middle|\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}t^{n-1}\right), \tag{7}$$

сходящимся в круге $|t| < \dfrac{n-1}{n^{\frac{n}{n-1}}}$.

Отметим и тот факт, что уравнение (6) сводится к уравнению

$$y^n + xy - 1 = 0 \tag{8}$$

(т.е. к уравнению (2) при $m = 1$) с помощью замены $y = \dfrac{\omega}{t^{\frac{1}{n}}}e^{\frac{\pi i}{n}}$, $x = \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}$. Таким образом, ряд (7), представляющий решение (6) в подходящем круге с центром в точке $t = 0$, посредством зависимости $x = \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}$ является решением (8) вне круга $|x| < \dfrac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$. А ряды, о которых идет речь в теореме 1, являются аналитическим продолжением (7) из внешности указанного круга в сам круг.

Напомним, что похожая ситуация возникает и в случае гипергеометрического ряда Гаусса. Ряд ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|z\right)$, сходящийся в круге $|z| < 1$, аналитически продолжается в его внешность суммой двух рядов Гаусса (см. [4]).

В статье также приводится применение теоремы 1 к уравнениям степеней 3 и 4. А именно, в разделе 2 корень кубического уравнения представляется в виде суммы двух рядов Гаусса. Показывается, что каждый из этих рядов совпадает с кубическим радикалом, участвующим в формуле Кардано.

В разделе 3 рассматривается уравнение четвертой степени. Решение этого уравнения линейным образом выражается через обобщенный гипергеометрический ряд. Однако это решение представляется и нелинейным образом посредством функции Гаусса.

В разделе 4 приводится случай, когда уравнение с двумя параметрами сводится к уравнению, содержащему один параметр. Решение этого уравнения представляется в виде суммы функций Гаусса, но аргументом является рациональная функция переменных (x_1, x_2), которая принимает значение 1 в точности на дискриминантном множестве уравнения.

1. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся интегральным представлением Меллина-Барнса (см. [5]), которое в случае уравнения (2) примет вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_{Re\ z = \frac{1}{2m}} \frac{\Gamma(\frac{1}{n} - \frac{mz}{n})\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n}z + 1)} x^{-z} dz.$$

Следуя статье [6], вычислим последний интеграл как сумму вычетов, расположенных слева от контура интегрирования. Тогда получим следующее разложение для $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n-m}{n}k + 1\right)} x^k.$$

Далее, пользуясь формулой дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, перепишем полученный ряд:

$$y(x) = \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}k - \frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n-m}{n}k + 1\right)}{k!} x^k =$$

$$-\frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}k - \frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right)}{k!} x^k. \tag{9}$$

К каждой из гамма-функций, а также к факториалу применим формулу умножения Гаусса-Лежандра

$$\prod_{r=0}^{p-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-1)} p^{\frac{1}{2} - pz} \Gamma(pz), \quad p = 2, 3, 4, \ldots,$$

согласно которой упомянутые функции перепишутся в следующем виде:

$$k! = \Gamma\left(n\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-\frac{1}{2} - k}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1 + mk}{n}\right) = \Gamma\left(m\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2} - \frac{mk}{n} - \frac{1}{n}}} \prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{k(n-m) - 1}{n}\right) = \Gamma\left((n-m)\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-m-1)} (n-m)^{\frac{1}{2} - k\frac{n-m}{n} + \frac{1}{n}}} \prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right).$$

В результате (9) представится так:

$$y(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (n-m)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) \prod\limits_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right)}{\prod\limits_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right)} \zeta^{\frac{k}{n}} \sin\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right),$$

где $\zeta := \zeta(x) = \dfrac{m^m (n-m)^{n-m}}{n^n} x^n$ определено в (5). Отметим, что в полученном выражении каждая гамма-функция имеет вид $\Gamma(\dfrac{k}{n} + c_j)$, где c_j не зависит от k.

Теперь $\dfrac{k}{n}$ представим в виде $\dfrac{k}{n} = \dfrac{s}{n} + l$, $\;0 \leqslant s \leqslant n-1$, тогда $y(x)$ запишется в виде суммы n рядов

$$y(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (n-m)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}} \times \tag{10}$$

$$\times \sum_{s=0}^{n-1} \zeta^{\frac{s}{n}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m} + l\right) \prod\limits_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m} + l\right)}{\prod\limits_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n} + l\right)} \zeta^l \sin\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{ms}{n} + ml\right).$$

Согласно определению гипергеометрического ряда нужно выделить в каждом из полученных рядов выражение

$$\frac{\prod\limits_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right)}{\prod\limits_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) \prod\limits_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right)}.$$

Учитывая тождества

$$\prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2} - \frac{ms}{n} - \frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{ms}{n} + \frac{1}{n}\right),$$

$$\prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-m-1)} (n-m)^{\frac{1}{2} - \frac{n-m}{n}s + \frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{n-m}{n}s - \frac{1}{n}\right),$$

$$\prod_{r=o}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-s-\frac{1}{2}} s!,$$

а также то, что

$$\sin\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{ms}{n} + ml\right) = (-1)^{ml} \sin\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{ms}{n}\right),$$

приходим к следующему представлению для $y(x)$:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{ms}{n} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}s - \frac{1}{n}\right)}{s!} x^s \sin\pi\left(\frac{ms}{n} + \frac{1}{n}\right) \times$$

$$\times {}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix} a, a+\frac{1}{m}, \ldots, a+\frac{m-1}{m}, b, b+\frac{1}{n-m}, \ldots, b+\frac{n-m-1}{n-m} \\ c, c+\frac{1}{n}, \ldots, \hat{1}, \ldots, c+\frac{n-1}{n} \end{matrix} \Big| (-1)^m\zeta\right),$$

где значения a, b, c находятся из (5).

Поясним, что пропуск единицы в последнем выражении появляется из-за того, что при $r = n - s - 1$ гамма-множитель в знаменателе (10) равен $\Gamma(l+1) = l!$, который выделяется отдельным множителем в определении обобщенного гипергеометрического ряда.

Применив к произведению $\Gamma\left(\frac{ms}{n} + \frac{1}{n}\right) \sin\pi\left(\frac{ms}{n} + \frac{1}{n}\right)$ в последнем выражении формулу дополнения, мы убеждаемся в справедливости (4).

Для полного доказательства теоремы осталось найти область сходимости полученных рядов. Известно, что областью сходимости ряда (3) является единичный круг $|z| < 1$ (см. [4]). Отсюда следует, что ряды, о которых идет речь в формулировке теоремы, сходятся при $|x| < \dfrac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$. □

2. Случай кубического уравнения: соотношение с формулой Кардано

Рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 + xy - 1 = 0. \tag{11}$$

Согласно теореме 1 главное решение (11) представляется в виде суммы двух гипергеометрических рядов Гаусса

$$y(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \Big| -\frac{4}{27}x^3\right) - \frac{x}{3}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \Big| -\frac{4}{27}x^3\right). \tag{12}$$

С другой стороны, формула Кардано для корней (11) такая:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}.$$

Для определенности под радикалом $q(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}$ будем рассматривать ветвь, удовлетворяющую условию $q(0) = \frac{1}{2}$. Покажем, что при $|x| < \frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}$ справедливы равенства

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \Big| -\frac{4}{27}x^3\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}, \tag{13}$$

$$-\frac{x}{3}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \Big| -\frac{4}{27}x^3\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}. \tag{14}$$

Здесь под равенством однозначной и многозначной функций понимаем следующее. В радикале $\alpha(x) := \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}$ из (13) рассматриваем ветвь с условием $\alpha(0) = 1$, а в (14) выбирается ветвь радикала $\beta(x) := \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}$, для которой $\beta(-1) > 0$.

Очевидна справедливость равенств

$$\alpha(0) = 1, \quad \beta(0) = 0. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что $\alpha^3(x)$ и $\beta^3(x)$ удовлетворяют квадратному уравнению

$$z^2(x) = z(x) + \frac{x^3}{27}. \tag{16}$$

Вычислим сначала $\beta(x)$. Для этого воспользуемся теоремой 2, согласно которой

$$z^{\frac{1}{3}}(x) = -\frac{x}{3}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}\middle| -\frac{4}{27}x^3\right).$$

В силу выполнения условия $z(-1) > 0$ следует, что

$$\beta(x) = -\frac{x}{3}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}\middle| -\frac{4}{27}x^3\right).$$

Равенство (14) доказано.

Теперь найдем представление в виде ряда для $\alpha(x)$. Для этого воспользуемся формулой Биркелана [2], которая для $z^{\frac{1}{3}}$ принимает следующий вид:

$$z^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{3}-k)}{\Gamma(\frac{4}{3}-2k)k!}\left(\frac{x}{3}\right)^{3k}.$$

Очевидно, что $z^{\frac{1}{3}}(0) = 1$, тогда в силу (15) $\alpha(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{3}-k)}{\Gamma(\frac{4}{3}-2k)k!}\left(\frac{x}{3}\right)^{3k}$.

Представим полученный ряд в виде ряда Гаусса. Для этого к каждой из гамма-функций применим формулу дополнения, в результате $\alpha(x)$ запишется так:

$$\alpha(x) = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2k-\frac{1}{3})}{\Gamma(k+\frac{2}{3})k!}\left(-\frac{x}{3}\right)^{3k}.$$

Теперь к гамма-функции, стоящей в числителе, применим формулу двойного аргумента (которая является частным случаем формулы Гаусса-Лежандра)

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

В результате последний ряд примет вид

$$\alpha(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\\ \frac{2}{3}\end{matrix}\middle| -\frac{4}{27}x^3\right).$$

Равенство (13), а вместе с ним и формула Кардано доказаны.

3. Уравнение четвертой степени: нелинейная связь с функцией Гаусса

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$z^4 + xz - 1 = 0. \tag{17}$$

В этом параграфе будет показано, что решение (17) представимо в классе рядов Гаусса ${}_2F_1$.

Из теоремы 1 следует, что главное решение (17) допускает представление

$$z(x)= {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)-\frac{x}{4}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4},\frac{5}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)-\frac{x^2}{32}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right).$$

Покажем, что каждый из указанных рядов выражается через ${}_2F_1$.

Утверждение. *Для главного решения уравнения (17) справедливо представление*

$$z(x)=\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{7}{24},-\frac{1}{24}\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)\right]^2-\frac{x}{4}\sqrt{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)}-\frac{x^2}{32}\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{24},\frac{13}{24}\\ \frac{5}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)\right]^2.$$

Доказательство. Справедливость соотношений

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)=\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{7}{24},-\frac{1}{24}\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)\right]^2,$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)=\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{24},\frac{13}{24}\\ \frac{5}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)\right]^2$$

следует из тождеств Клаузена ([7] либо см. [4], 186). Докажем равенство

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4},\frac{5}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)=\sqrt{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right)}. \tag{18}$$

Для этого рассмотрим уравнение $8r^3+8r=x^2$, которое перепишем в виде

$$(ir)^3-ir+i\frac{x^2}{8}=0,$$

как указывается в теореме 2. Применяя к нему (7), при $\mu=1$ получаем

$$r(x)=\frac{x^2}{8}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right). \tag{19}$$

А после применения (7) к этому же уравнению при $\mu=\dfrac{1}{2}$ приходим к следующему представлению для $r^{\frac{1}{2}}(x)$:

$$r^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{x\sqrt{2}}{4}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4},\frac{5}{4}\end{matrix}\Big|-\frac{3^3}{4^4}x^4\right). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует (18). □

4. Замечание к тетраномиальному кубическому уравнению

Рассмотрим кубическое уравнение с двумя параметрами

$$z^3+x_1z^2+x_2z-1=0. \tag{21}$$

Известно, что такое уравнение с помощью элементарных преобразований может быть сведено к уравнению с одним параметром. Действительно, с помощью замены переменной $z = w - \frac{x_1}{3}$ сведем уравнение (21) к уравнению

$$w^3 + \left(x_2 - \frac{x_1^2}{3}\right) w + \left(\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 - 1\right) = 0.$$

Далее "растяжением" переменной $w = -\sqrt[3]{\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 - 1}\, y$ последнее уравнение сводится к (11), в котором $x = x(x_1, x_2) = \dfrac{x_2 - \frac{x_1^2}{3}}{\sqrt[3]{(\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 - 1)^2}}$.

Решая это уравнение по формуле (12), получим

$$y(x_1, x_2) =$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| \frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27)^2} \right) + \frac{x_1^2 - 3x_2}{\sqrt[3]{(2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27)^2}}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| \frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27)^2} \right).$$

После обратной замены корень уравнения (21) запишется так:

$$z(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{3} - \sqrt[3]{\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 - 1}\; y(x_1, x_2), \tag{22}$$

где выражение для $y(x_1, x_2)$ определено выше.

Ряды Гаусса, участвующие в решении (21), сходятся абсолютно при условии $\left|\frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27)^2}\right| \leqslant 1$. Уровень

$$\frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27)^2} = 1$$

определяет дискриминантное множество уравнения (21):

$$4x_2^3 - x_1^2 x_2^2 - 4x_1^3 + 18x_1 x_2 + 27 = 0.$$

Напомним, что дискриминантным множеством ∇ уравнения (1) называется совокупность тех значений $(x_1, \ldots, x_p)$, при которых (1) имеет кратные корни. (О параметризации дискриминантного множества см. [8].)

Известно значение ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a,b \\ c \end{smallmatrix} \middle| z \right)$ при $z = 1$:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Поэтому ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{1}{3})} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})\Gamma(\frac{2}{3})} = \sqrt[3]{2}$. Подставляя эти значения в (22), выпишем формулу для решения уравнения (21) при $(x_1, x_2) \in \nabla$:

$$z(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27} + \frac{3x_2 - x_1^2}{3\sqrt[3]{2x_1^3 - 9x_1 x_2 - 27}}\sqrt[3]{2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (грант НШ №7347.2010.1).

Список литературы

[1] Е.Н.Михалкин, О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций, *Сиб. матем. журн.*, **47**(2006), №2, 365–371.

[2] R.Birkeland, Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen, *Math. Ztschr.*, **26**(1927), 566–578.

[3] А.М.Переломов, Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений, *Теоретическая и математическая физика*, **140**(2004), №1, 3–13.

[4] Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1973.

[5] H.J.Mellin, Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **172**(1921), 658–661.

[6] А.Ю.Семушева, А.К.Цих, Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений, Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской), КрасГУ, 2000, 134–146.

[7] T.Clausen, Uber die Fälle, wenn die Reihe von der Form $y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta+1}{\gamma \cdot \gamma+1} x^2 +$ etc. ein quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\epsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha'+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta'+1}{\gamma' \cdot \gamma'+1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta'+1}{\epsilon' \cdot \epsilon'+1} x^2 +$etc. hat, *Journ. Reine Ang. Math*, **3**(1828), 89–91.

[8] M.Passare, A.Tsikh, Algebraic equations and hypergeometric series, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004, 653–672.

[9] V.Bârsan, G.A.Nemnes, Physical relevance of the Passare-Tsikh solution of the principal quintic equation, *Journ. of Adv. Research in Phys*, **2(1)**(2011), 1–6.

Certain Formulas for Solutions to Trinomial and Tetranomial Algebraic Equations

Evgeny N. Mikhalkin

Algebraic equations with one and two parameters are considered. We prove that solutions to such equations can be represented as linear combination of generalized hypergeometric series. This result allows to express (nonlinearly) solutions to cubic and quartic equations by Gauss hypergeometric series.

Keywords: algebraic equation, Gauss hypergeometric series, generalized hypergeometric series.