УДК 517.55

О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций, заданных на границе области

Александр М. Кытманов*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Симона Г. Мысливец†
Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 01.10.2011, окончательный вариант 15.10.2011, принята к печати 15.12.2011

В работе показано, что множество $\mathfrak{L}_\Gamma$ всех комплексных прямых, проходящих через росток порождающего многообразия Γ, лежащего в области D, является достаточным для того, чтобы непрерывная функция f на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей и обладающей свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из $\mathfrak{L}_\Gamma$, голоморфно продолжалась в D как функция многих комплексных переменных.

Ключевые слова: голоморфное продолжение, вдоль комплексных прямых, порождающее многообразие, интеграл Бохнера-Мартинелли.

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны, поэтому результаты работы существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен М.Л.Аграновским и Р.Е.Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Их исследование основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Е.Л.Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М.Кытмановым в [3], применившим интеграл Бохнера–Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера–Мартинелли, Коши–Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения

*AKytmanov@sfu-kras.ru
†sMyslivets@sfu-kras.ru

вдоль комплексных прямых и кривых [4, 5]. Обзор результатов, относящихся к данной теме, можно найти в [6].

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D (класса $\mathcal{C}^2$). Сформулируем результат Е.Л. Стаута [2].

Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\zeta : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \ldots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \varnothing$).

Дадим следующее определение. Функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой* l $(l \cap \partial D \neq \varnothing)$, если существует функция f_l со следующими свойствами:

a) $f_l \in \mathcal{C}(\overline{D} \cap l)$,

b) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$,

c) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 ([2]). *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то f голоморфно продолжается в D.*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, было рассмотрено М.Л. Аграновским и А.М. Семеновым [7].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство $\mathfrak{L}_V$ комплексных прямых, пересекающих это множество.

Теорема 2 ([7]). *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства $\mathfrak{L}_V$ для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

В работе [8] рассматривалось семейство комплексных прямых, проходящих через росток порождающего многообразия, лежащий вне области D. Напомним, что гладкое (класса $\mathcal{C}^\infty$) многообразие Γ называется порождающим, если для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\Gamma)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\Gamma$ семейство всех комплексных прямых, пересекающих Γ.

Теорема 3 ([8]). *Пусть Γ — росток порождающего многообразия в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_\Gamma$, тогда существует функция $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D.*

В данной статье будет рассматриваться случай, когда росток порождающего многообразия лежит в области D. Для этого докажем вначале ряд лемм.

Рассмотрим интеграл Бохнера-Мартинелли от функции $f \in \mathcal{C}(\partial D)$:

$$F(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U(\zeta, z), \qquad z \notin \partial D, \tag{2}$$

где $U(\zeta, z)$ — ядро Бохнера-Мартинелли, т. е.

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} \, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

и $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

Будем считать, что $0 \in D$ и порождающее многообразие Γ лежит в некоторой окрестности нуля $W \subset D$, а также $0 \in \Gamma$.

Порождающее многообразие Γ локальным биголоморфным преобразованием можно привести к виду (см., например, [9])

$$\begin{cases} v_1 = h_1(z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m = h_m(z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_m), \end{cases} \tag{3}$$

где $k + m = n$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, k$, $w_s = u_s + iv_s$, $s = 1, \dots, m$. Причем вещественнозначная вектор-функция $h = (h_1, \dots, h_m)$ класса $\mathcal{C}^\infty$ в окрестности W точки 0 и выполнены условия

$$h_p(0) = 0, \ \frac{\partial h_p}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial y_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial u_s}(0), \quad j, p = 1, \dots, m, \ s = 1, \dots k.$$

Лемма 1. *Если вещественно-аналитическая функция F, заданная в W, удовлетворяет условиям*

$$F|_\Gamma = 0, \quad \left. \frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial \bar{z}^\alpha \partial \bar{w}^\beta} \right|_\Gamma = 0 \quad \text{для всех мультииндексов} \quad \alpha, \ \beta, \tag{4}$$

то она равна нулю в W.

Доказательство. Покажем, что все коэффициенты разложения функции F в ряд Тейлора в окрестности нуля равны нулю.

Обозначим полные частные производные вдоль многообразия Γ по переменным x_j, y_j, u_s через D_{x_j}, D_{y_j}, D_{u_s}, $j = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, m$.

Так как

$$0 = D_{x_j} F = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial v_l} \cdot \frac{\partial h_l}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(0) = 0,$$

то $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(0) = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}(0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_s}(0) = 0$, $j = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, m$.

Поскольку

$$0 = \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{w}_s} \right|_\Gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_s} + i \frac{\partial F}{\partial v_s} \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial u_s}(0) = 0,$$

то $\dfrac{\partial F}{\partial v_s}(0) = 0$, $s = 1, \dots, m$. Так что все первые производные функции F в точке 0 равны нулю.

Покажем, что все вторые производные в нуле также равны нулю. Имеем

$$0 = D^2_{x_j x_l} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial v_p} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial x_l} +$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial x_l}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j}+\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial v_q}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial h_q}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial F}{\partial v_p}\cdot\frac{\partial^2 h_p}{\partial x_j \partial x_l}\right).$$

Так как $\dfrac{\partial h_p}{\partial x_l}(0)=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial v_p}(0)=0$, то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l}(0)=0$.

Аналогично, все вторые производные функции F по переменным y_j, u_s равны нулю в точке 0.

Рассмотрим

$$0=D_{x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar w_s}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j}+\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial v_p}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial h_p}{\partial x_j}(0)=0$, то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j}(0)=0$. Так как

$$0=\frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j}(0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0)+i\frac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial x_j}(0)\right)\quad \text{и}\quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0)=0,$$

то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial x_j}(0)=0$.

Аналогично, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial y_j}(0)=0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial u_l}(0)=0$.

Далее,

$$0=\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_l \partial \bar w_s}\right|_{\Gamma}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial u_s}+i\frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial v_s}+i\frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial u_s}-\frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial v_s}\right),$$

поэтому $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial v_s}(0)=0$.

Применяя индукцию, точно так же показывается, что все старшие производные функции F в точке 0 равны нулю. Тем самым ряд Тейлора в точке 0 функции равен нулю, поэтому сама функция равна нулю в W. □

Ясно, что лемма 1 верна и для старых переменных z (до приведения многообразия Γ к виду (3).

Определим функции

$$F_j(z)=\int_{\partial D} f(\zeta)(\zeta_j-z_j)U(\zeta,z),\quad z\in D,\quad j=1,\ldots,n.$$

Они являются вещественно-аналитическими в области D.

Лемма 2. *Если для вещественно-аналитических функций F_j выполнены условия*

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}F}{\partial \bar z^{\alpha}\partial \bar w^{\beta}}\right|_{\Gamma}=0 \tag{5}$$

для всех мультииндексов α, β при $\|\alpha\|+\|\beta\|>0$, то F_j голоморфны в D.

Доказательство. Применим лемму 1 к функциям $\dfrac{\partial F_j}{\partial \bar z_p}$, $\dfrac{\partial F_j}{\partial \bar w_s}$, $p=1,\ldots,k$, $s=1,\ldots,m$. Тогда получим, что данные функции равны 0 в W, т. е. функции F_j голоморфны в W, а следовательно, и в D. □

В дальнейшем нам понадобится понятие области со свойством Неванлинны (см. [10]). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $t = k(\tau)$ — конформное отображение единичного круга $\Delta = \{\tau : |\tau| < 1\}$ на G.

Область G является *областью со свойством Неванлинны*, если существуют две ограниченные голоморфные функции u и v в G такие, что почти всюду на $S = \partial\Delta$ выполняется равенство

$$\bar{k}(\tau) = \frac{u(k(\tau))}{v(k(\tau))}$$

в смысле угловых граничных значений.

По сути это означает, что

$$\bar{t} = \frac{u(t)}{v(t)} \quad \text{на} \quad \partial G.$$

Приведем характеризацию областей со свойством Неванлинны (предложение 3.1 в [10]). Область G есть область со свойством Неванлинны тогда и только тогда, когда $k(\tau)$ допускает голоморфное псевдопродолжение через S в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}$, т.е. существуют ограниченные голоморфные функции u_1 и v_1 в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}$ такие, что функция $\tilde{k}(\tau) = \dfrac{u_1(\tau)}{v_1(\tau)}$ совпадает почти всюду на S с функцией $k(\tau)$.

Данные определение и утверждение будут применяться для ограниченных областей G с границей класса $\mathcal{C}^2$, поэтому (по принципу соответствия границ) функция $k(\tau)$ продолжается на $\bar{\Delta}$ как функция класса $\mathcal{C}^1(\overline{\Delta})$. То же самое можно сказать и о функции $\tilde{k}$.

Различные примеры областей со свойством Неванлинны приведены в [10]. Так, например, если ∂G вещественно аналитическая, то $k(\tau)$ является рациональной функцией, не имеющей полюсов на замыкании Δ.

В дальнейшем нам понадобится, чтобы область G обладала *усиленным свойством Неванлинны*, т.е. чтобы функция $u_1(\tau) \neq 0$ в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ и $\tilde{k}(\infty) \neq 0$.

Например, такими областями будут области, для которых $k(\tau)$ является рациональной функцией, не имеющей полюсов на $\overline{\Delta}$ и не имеющая нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

Лемма 3. *Если область G обладает усиленным свойством Неванлинны, то функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается с ∂G в область G.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{\bar{t}}$ на ∂G и $\tau \in S$

$$\frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{\bar{k}(\tau)} = \frac{1}{\bar{\tilde{k}}(\tau)} = \frac{\bar{v}_1(\tau)}{\bar{u}_1(\tau)} = \frac{\bar{v}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}{\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}.$$

Тогда функция $h(\tau) = \dfrac{\bar{v}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}{\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}$ голоморфна в круге Δ, поскольку знаменатель $\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right) \neq 0$ при $|\tau| > 1$ и $h(0) = \dfrac{1}{\bar{\tilde{k}}(\infty)} \neq \infty$.

Поэтому функция $h(\tau)$ дает голоморфное продолжение функции $\dfrac{1}{\bar{k}(\tau)}$ в круг Δ, следовательно, функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в G. □

Рассмотрим комплексные прямые l вида (1), проходящие через z в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Хорошо известно представление ядра Бохнера–Мартинелли в координатах t и b

(см., например, [6], [11, гл.4]):

$$U(\zeta, z) = \lambda(b) \wedge \frac{dt}{t},$$

где

$$\lambda(b) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{b}_k d\bar{b}[k] \wedge \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k db[k]}{|b|^{2n}}$$

— дифференциальная форма типа $(n-1, n-1)$ в $\mathbb{CP}^{n-1}$, не зависящая от t.

Лемма 4. *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$ и связные компоненты пересечения $D \cap l$ являются областями с усиленным свойством Неванлинны, то справедливы равенства (5) для всех мультииндексов α с $\|\alpha\| > 0$ и для всех $j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Поскольку

$$U(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial g}{\partial \zeta_j} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

где $g(\zeta, z) = -\dfrac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \cdot \dfrac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, то

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = (-1)^{\|\alpha\|}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\left(\frac{\partial^\alpha g}{\partial \bar{\zeta}^\alpha}\right) d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

Так как

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial \bar{\zeta}^\alpha} = \frac{(-1)^{\|\alpha\|+1}}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+2\|\alpha\|-2}},$$

то

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \frac{\partial}{\partial \zeta_j}\left(\frac{(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|-2}}\right) d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \left[\frac{\alpha_j(\zeta - z)^{\alpha - e_j}}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|-2}} - \frac{(n + \|\alpha\| - 1)(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|}}\right] d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \frac{\alpha_j(\zeta - z)^{\alpha - e_j}}{|\zeta - z|^{2n+2\|\alpha\|-2}} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta + \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2\|\alpha\|}} \cdot U(\zeta, z).$$

Вычислим эту форму в переменных b и t, т.е. $\zeta_j - z_j = b_j t$, $j = 1, \ldots, n$. При вычислении будем использовать, что $d\bar{t} \wedge dt = 0$ на $\partial D \cap l$ и что $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Получим

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \frac{\alpha_j b^{\alpha - e_j}}{t\bar{t}^{\|\alpha\|}|b|^{2\|\alpha\|}} d\bar{b}[j] \wedge \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}b_s db[s] \wedge dt +$$

$$+ \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{b^\alpha}{t\bar{t}^{\|\alpha\|}|b|^{2\|\alpha\|}}\lambda(b) \wedge dt.$$

Таким образом, получаем, что

$$(\zeta_j - z_j)\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \mu(b) \wedge \frac{dt}{\bar{t}^{\|\alpha\|}}.$$

Осталось показать, что

$$\int\limits_{\partial D\cap l} f(z+bt)\frac{dt}{\bar{t}^{\|\alpha\|}} = 0,$$

а это следует из леммы 3. □

Теорема 4. *Пусть* Γ *— росток порождающего многообразия в области* D*, функция* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых* $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$ *и связные компоненты пересечения* $D\cap l$ *являются областями с усиленным свойством Неванлинны, тогда существует функция* $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$*, голоморфная в* D *и совпадающая с функцией* f *на границе* ∂D*.*

Доказательство. Из лемм 1–4 следует, что $F_j(z)$ голоморфны в D. Поскольку

$$\Delta F_j = -\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

в D, то функция F голоморфна в D. Поэтому ее граничные значения совпадают с f (см. следствие 15.6 из [11]). □

Рассмотрим примеры областей, для которых верна теорема 4.

1. Пусть $D = B$ — шар с центром в нуле с радиусом R, т.е. $D = \{\zeta : |\zeta| < R\}$. Тогда сечение этой области комплексной прямой $l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1, \ldots, n\}$ ($z \in D$, $|b| = 1$), является кругом $G = \{t : |t + \langle z, \bar{b}\rangle|^2 < R^2 - |z|^2 + |\langle z, \bar{b}\rangle|^2\}$, где $\langle z, b\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j b_j$. На границе этого круга

$$\frac{1}{\bar{t}} = \frac{t + \langle z, \bar{b}\rangle}{R^2 - |z|^2 - t\langle \bar{z}, b\rangle}.$$

Легко проверить, что знаменатель этой функции не обращается в 0 в G, поэтому функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ удовлетворяет лемме 3 для всех точек $z \in B$ и для всех комплексных прямых l.

2. Пусть $w_j = \dfrac{L_j(z)}{L(z)}$, $j = 1, \ldots, n$, где $L_j(z)$, $L(z)$ — линейные функции, причем нули функции $L(z)$ не пересекают замыкание шара, тогда образ шара B при данном отображении (если оно биголоморфно на замыкании шара B) является ограниченной областью, для которой справедлива теорема 4. Действительно, как легко проверить, все сечения этой области комплексными прямыми являются кругами.

3. Пусть D — полная круговая область относительно всех точек $z \in \Gamma$, тогда для нее очевидно справедлива теорема 4.

Лемма 3 показывает, что для верности теоремы 4 достаточно, чтобы в сечениях функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжалась с границы сечения в само сечение. Поэтому справедливо утверждение.

Теорема 5. *Пусть* Γ *— росток порождающего многообразия в области* D*, функция* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых* $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$ *и на связных компонентах пересечения* $D \cap l$ *функция* $\dfrac{1}{\bar{t}}$ *голоморфно продолжается с* $\partial D \cap l$ *в* $D \cap l$*, тогда существует функция* $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$*, голоморфная в* D *и совпадающая с функцией* f *на границе* ∂D*.*

Обсудим вопрос, какие области на комплексной плоскости обладают таким свойством (кроме кругов).

Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ открытое множество

$$\{t \in \mathbb{C} : \ R|t|^{k+1} < |P(t)|\}, \quad 0 < R < \infty, \tag{6}$$

где $P(t)$ — полином степени k и $P(0) \neq 0$.

Очевидно, что это множество ограничено и содержит окрестность нуля. Обозначим его связную компоненту, содержащую 0, через G.

По теореме Сарда для почти всех R, $0 < R < \infty$, граница G состоит из конечного числа гладких кривых.

При достаточно малых R область G получается из некоторой области, из которой выброшены окрестности нуля полинома P. При R достаточно больших G является односвязной окрестностью нуля.

Рассмотрим границу G: $S = \{t \in \mathbb{C} : \ R|t|^{k+1} = |P(t)|\} = \{t \in \mathbb{C} : R^2 t^{k+1}\bar{t}^{k+1} = P(t)\overline{P(t)}\}$.

Обозначим $w = \dfrac{1}{\bar{t}}$. Тогда на S имеем равенство $\dfrac{R^2 t^{k+1}}{w^{k+1}} = P(t)\tilde{P}\left(\dfrac{1}{w}\right)$, где $\tilde{P}(t) = \sum\limits_{j=0}^{k} \bar{a}_j t^j$, если $P(t) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j t^j$. Поэтому

$$\overline{P(t)} = \tilde{P}(\bar{t}) = \tilde{P}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^k} P^s(w),$$

где $P^s(w) = \sum\limits_{j=0}^{k} \bar{a}_j w^{k-j}$.

Тогда на S получим равенство

$$\frac{R^2 t^{k+1}}{w^{k+1}} = P(t)P^s(w)\frac{1}{w^k}.$$

Поэтому

$$R^2 t^{k+1} = P(t) w P^s(w)$$

или

$$w P^s(w) = \frac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}. \tag{7}$$

Из вида G также получаем, что в G верно

$$\frac{R|t|^{k+1}}{|P(t)|} < 1. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $\zeta = \varphi(w) = wP^s(w)$, тогда $\varphi'(0) = P^s(0) \neq 0$, так как многочлен P имеет степень k. Поэтому функция φ конформно отображает некоторую окрестность нуля U_w на окрестность нуля V_ζ. Поэтому существует обратная функция $w = \varphi^{-1}(\zeta) : \ V_\zeta \to U_w$.

Из равенства (7) тогда имеем, что $w = \varphi^{-1}\left(\dfrac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}\right)$ на S.

Поскольку в силу неравенства (8) $R\left|\dfrac{Rt^{k+1}}{P(t)}\right| < R$ в G, то для достаточно малых R точка $\dfrac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}$ лежит в U_w и знаменатель $P(t) \neq 0$ в G. Поэтому функция $w = \varphi^{-1}\left(\dfrac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}\right)$ голоморфна в G. Так что $w = \dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в G. Таким образом, справедливо утверждение.

Лемма 5. *Для области G вида (6) при достаточно малых R функция $\frac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается с границы ∂G в G.*

Рассмотрим сдвинутую область

$$G_a = \{t \in \mathbb{C} : \; R|t+a|^{k+1} < |P_1(t)|\}, \tag{9}$$

где $P_1(t) = P(t+a)$. Тогда на $S_a = \partial G_a$ имеем равенство $R^2(t+a)^{k+1}(\bar{t}+\bar{a})^{k+1} = P_1(t)\overline{P_1(t)}$, и если $\bar{t} = \frac{1}{w}$, то $R^2(t+a)^{k+1}(1+\bar{a}w)^{k+1} = P_1(t)wP_1^s(w)$.

Функция $\zeta = \psi(w) = \dfrac{wP_1^s(w)}{(1+\bar{a}w)^{k+1}}$ отображает конформно окрестность нуля U_w на окрестность нуля V_ζ, поэтому, как и выше, функция

$$w = \psi^{-1}(\zeta) = \psi^{-1}\left(\frac{R^2(t+a)^{k+1}}{P_1(t)}\right)$$

голоморфно продолжается в G_a для достаточно малых R.

Лемма 6. *Для области G_a вида (9) при достаточно малых R функция $\frac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается с границы ∂G в G.*

Легко привести примеры областей на комплексной плоскости, для которых лемма 3 не выполняется. Одной из таких областей является обычный эллипс

$$G = \left\{ t = x+iy \in \mathbb{C} : \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}, \quad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

Нетрудно показать, что из уравнения границы эллипса получаем равенство

$$w = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{t(a^2+b^2) \pm 2ab\sqrt{t^2 - a^2 + b^2}}{4a^2b^2 - t^2(b^2-a^2)}.$$

Данная функция имеет две особые точки (точки ветвления) в эллипсе G и 2 полюса вне $\bar{G}$.

Более того,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{dt}{\bar{t}} = -\left|\frac{a-b}{a+b}\right| \neq 0.$$

Рассмотрим область в $\mathbb{C}^n$ вида

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \; R|z|^{k+1} < |P(z)|\}, \quad 0 < R < \infty, \tag{10}$$

где $P(z)$ — полином степени k и $P(0) \neq 0$.

Ясно, что эта область ограничена и содержит окрестность нуля. Для почти всех R граница D является гладкой.

Сечения этой области комплексными прямыми $l = \{\zeta : \; \zeta_1 = b_1 t, \ldots, \zeta_n = b_n t\}$ образуют области вида (6), а сечения области (10) прямыми $l = \{\zeta : \; \zeta_1 = z_1 + b_1 t, \ldots, \zeta_n = z_n + b_n t\}$ можно привести к областям вида (9), поэтому из теоремы 5 и лемм 5 и 6 получаем утверждение.

Следствие 1. *Пусть Γ — росток порождающего многообразия в области D вида (10) (R достаточно малое), $0 \in \Gamma$, функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$, тогда существует функция $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-0852, НШ, грант 7347.2010.1.

Список литературы

[1] М.Л.Аграновский, Р.Е.Вальский, Максимальность инвариантных алгебр функций, *Сиб. матем. журн.*, **12**(1971), №1, 3–12.

[2] E.L.Stout, The boundary values of holomorphic functions of several complex variables, *Duke Math. J.*, **44**(1977), №1, 105–108.

[3] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[4] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, Об одном граничном аналоге теоремы Морера, *Сиб. матем. журн.*, **36**(1995), №6, 1350–1353.

[5] A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets, On an application of the Bochner–Martinelli operator, *Contemporary Math.*, **212**(1998), 133–136.

[6] A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets, Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions, *J. Math. Sci.*, **120**(2004), №6, 1842-1867.

[7] М.Л.Аграновский, А.М.Семенов, Граничные аналоги теоремы Гартогса, *Сиб. матем. журн.*, **32**(1991), №1, 168-170.

[8] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, *Матем. заметки*, **83**(2008), вып. 4, 545–551.

[9] M.S.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild, Real submanifolds in complex space and their mappings, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.

[10] Х.Х.Кармона, К.Ю.Федоровский, П.В.Парамонов, О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций, *Мат. сб.*, **193**(2002), №10, 1469–1492.

[11] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.

On the Families of Complex Lines which are Sufficient for Holomorphic Continuation of Functions Given on the Boundary of the Domain

Alexander M. Kytmanov
Simona G. Myslivets

The paper is devoted to some results connecting with one-dimensional property of holomorphic continuations of functions given on the boundary of bounded domain in $\mathbb{C}^n$*.*

Keywords: holomorphic continuations, along complex lines, generic manifold, Bochner-Martinelli integral.