УДК 517.9

Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением

Насриддин М. Жabборов*
Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
Вузгородок, Ташкент, 100174,
Узбекистан

Пётр В. Коробов
Холматжон Х. Имомназаров†
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
академика Лаврентьева 6, Новосибирск, 630090,
Россия

Получена 29.11.2011, окончательный вариант 29.12.2011, принята к печати 10.01.2012

Найден ряд дифференциальных тождеств, связывающих скорости, давление и массовую силу в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению. Некоторые из этих тождеств имеют дивергентный вид и могут рассматриваться как некоторые законы сохранения. Обнаружено, что функции только для плоского движения удовлетворяют системе уравнений Монжа-Ампера.

Ключевые слова: двухскоростная гидродинамика, гиперболическая система.

Введение

В векторном анализе, теории поля и математической физике важную роль играют дифференциальные тождества классического вида. В работе [1] получено обобщение ряда тождеств теории обратных задач для кинетических уравнений. В работе [2] получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств второго и третьего порядков, связывающих лапласиан произвольной гладкой скалярной функции $u(x, y)$ двух независимых переменных, модуль градиента этой функции, угловую величину и направление градиента. Найдено представление гауссовой кривизны поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с графиком $z = u(x, y)$. Даны некоторое его обобщения и аналогичные формулы для поверхности в псевдоевклидовом пространстве. Результаты работы [2] обобщене в работе [3] по двум направлениям: на трехмерный случай и для произвольного (не обязательно потенциального) гладкого векторного поля v. Получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств, которые, с одной стороны, связывают модуль $|\mathrm{v}|$ и направление τ произвольного гладкого векторного поля $\mathrm{v} = |\mathrm{v}|\,\tau$ в трехмерном ($\mathrm{v} = \mathrm{v}(x, y, z)$) и в двумерном ($\mathrm{v} = \mathrm{v}(x, y)$) случаях. С другой стороны, найденные формулы в определенном смысле разделяют модуль $|\mathrm{v}|$ и направление τ векторного поля $\mathrm{v} = |\mathrm{v}|\,\tau$. А именно, основное тождество любому гладкому векторному полю v сопоставляет в явном виде векторное поле $Q = P + S$, где P определяется только модулем $|\mathrm{v}|$ поля v и является потенциальным как в двумерном, так и в трехмерном случаях, а поле S определяется только

*jabborov61@mail.ru
†imom@omzg.sscc.ru

направлением τ поля v и является соленоидальным в двумерном случае. Даны приложения полученных тождеств к гидродинамическому уравнению Эйлера.

В данной работе даны приложения полученных тождеств из [3] к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

1. Дифференциальные тождества Меграбова, связывающие модуль и направление векторного поля

В работе [3] Меграбов получил следующее утверждение

Теорема 1. *Для любого векторного поля* $\mathrm{v} = \mathrm{v}\,(x, y, z) = |\mathrm{v}|\,\tau$ *с компонентами* $v_k\,(x, y, z) \in C^1\,(D)\,, k = 1, 2, 3$ *модулем* $|\mathrm{v}| \neq 0$ *в* D *и направлением* τ *справедливо тождество*

$$Q = Q(\mathrm{v}) = P(|\mathrm{v}|) + S(\tau), \tag{1}$$

где

$$Q(\mathrm{v}) \overset{def}{=} \frac{\mathrm{v}\ \mathrm{div}\ \mathrm{v} + \mathrm{v} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2},\ P(|\mathrm{v}|) \overset{def}{=} \nabla \ln{(\mathrm{v})} = \frac{\nabla\,|\mathrm{v}|^2}{|\mathrm{v}|^2} \tag{2}$$

$$S = S\,(\tau) \overset{def}{=} \tau\ \mathrm{div}\ \tau + \tau \times \mathrm{rot}\ \tau = Q\,(\mathrm{v}) - P\,(|\mathrm{v}|)\,. \tag{3}$$

Для векторного поля S справедливо любое из представлений

$$S = S\,(\tau) = \tau\ \mathrm{div}\ \tau - \tau_s = -\left\{(\tau \times \nabla) \times \tau + (\tau \cdot \nabla)\,\tau\right\} = -\frac{(\mathrm{v} \times \nabla) \times \mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2} \tag{4}$$

$(\tau_s = (\tau \cdot \nabla)\,\tau = \mathrm{rot}\ \tau \times \tau$ — производная вектора τ по направлению $\tau)\,,$

$$S = \mathrm{rot}\ \ (\alpha k) - \cos^2\theta \mathrm{rot}\ \ (\alpha k - tg\theta\lambda) = \mathrm{rot}\ \ (\alpha k + \cos\theta\psi) - 2\cos\theta\ \mathrm{rot}\ \psi, \tag{5}$$

где $\lambda = -\sin\alpha i + \cos\alpha j,\ \ \psi = -\sin\theta\lambda + \alpha\cos\theta k,$

$$S = -\nabla\alpha \times (\cos\theta\tau - k) + \nabla\theta \times \lambda,\ \mathrm{S} = \tau \mathrm{div}\ \tau \text{ - } \kappa \mathrm{v}, \tag{6}$$

где κ — кривизна векторной линии поля v, ν — ее главная нормаль. Справедлива формула $\kappa^2 = \sin^2\theta\ \alpha_s^2 + \theta_s^2,$ где $\alpha_s = (\nabla\alpha \cdot \tau)\,,\ \theta_s = (\nabla\theta \cdot \tau)$ — производные углов α, θ по направлению τ. Основное тождество (1) может быть представлено также в любой из форм

$$Q + H_i = \nabla \ln{(\mathrm{v})} + \mathrm{rot}\ F_i,\ i = 1{,}2,$$

где $H_1 = \cos^2\theta\ \mathrm{rot}\,(\alpha k - \mathrm{tg}\,\theta\lambda)\,,\ H_2 = 2\cos\theta\ \mathrm{rot}\ \psi,\ F_1 = \alpha k, F_2 = \alpha k + \cos\theta\psi,$ так что векторы $H_i, F_i,$ как и S, определяются только углами $\alpha, \theta,$ т.е. направлением τ поля. Если не предполагать наличие свойства $|\mathrm{v}| \neq 0$ в D, то (1) принимает вид

$$W = \mathrm{v}\ \mathrm{div}\ \mathrm{v} + \mathrm{v} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{v} = \nabla\,|\mathrm{v}|^2 - \mathrm{V},$$

где $\mathrm{V} \overset{def}{=} -\,|\mathrm{v}|^2\,S = \frac{1}{2}\nabla\,|\mathrm{v}|^2 - \mathrm{v}\ \mathrm{div}\ \mathrm{v} - \mathrm{v} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{v} = -\,|\mathrm{v}|^2\left\{\tau\ \mathrm{div}\ \tau + \tau \times \mathrm{rot}\ \tau\right\} = \mathrm{v} \times \nabla \times \mathrm{v}.$

Другие формулы для W, V получаются подстановкой любого выражения для S из (4)–(6) в последние равенства.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 и* $v_k\,(x, y, z) \in C^2\,(D)\,(k = 1, 2, 3)$ *справедливы формулы*

$$\mathrm{div}S = -2\sin\theta\,(\tau \cdot B) = -\frac{2\sin\theta\,(\mathrm{v} \cdot B)}{|\mathrm{v}|},$$

где $B = \nabla\alpha \times \nabla\theta = \mathrm{rot}\,(\alpha\nabla\theta) = -\mathrm{rot}\,(\theta\nabla\alpha)$. *Кроме того, имеет место тождество*

$$\mathrm{div}\,(Q - P + H_i) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\left\{\frac{\mathrm{v\ div\ v} + \mathrm{v} \times \mathrm{rot\ v}}{|\mathrm{v}|^2} - \nabla \ln|\mathrm{v}| + H_i\right\} = 0, \quad (i = 1, 2),$$

которое можно рассматривать как закон сохранения (его дифференциальную форму) с интегральной формой для потока $\iint_S ([Q - P + H_i] \cdot \eta)\, dS = 0$, *где* S *— кусочно-гладкая граница области* D *с нормалью* η.

В теоремах 1 и 2 приняты следующие обозначения: символы $(a \cdot b)$ и $a \times b$ обозначают скалярное и векторное произведения векторов a и b; ∇ — оператор Лапласа; D — некоторая область в пространстве $x, y, z; i, j, k$ орты по осям $x, y, z; \mathrm{v} = \mathrm{v}\,(x, y, z) = \upsilon_1 i + \upsilon_2 j + \upsilon_3 k$ — векторное поле, определенное в $D, \upsilon_k = \upsilon_k\,(x, y, z)$ – скалярные функции, $k = 1, 2, 3, |\mathrm{v}|^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2; \alpha = \alpha\,(x, y, z)$ — угол наклона вектора $(\upsilon_1 i + \upsilon_2 j)$ к оси Ox, так что $\cos\alpha = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{g}}, \sin\alpha = \frac{\upsilon_2}{g}$, где $g = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2$, т.е. $\alpha\,(x, y, z)$ — полярный угол точки $(\xi = \upsilon_1, \varsigma = \upsilon_2)$ на плоскости ξ, ς или аргумент $Argw$ комплексного числа $w = \xi + i\varsigma$ (i – мнимая единица):

$$\alpha \overset{def}{=} \arctan\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} + (2k + \delta)\,\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \tag{7}$$

$\delta = 0$ и $\delta = 1$ соответственно в квадрантах I, IV, II, III плоскости $\xi, \varsigma; \theta = \theta\,(x, y, z)$ — угол между вектором v и осью $Oz : \theta \overset{def}{=} \arccos\dfrac{\upsilon_3}{|\mathrm{v}|}$, так что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ \cos\theta = \dfrac{\upsilon_3}{|\mathrm{v}|},\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{g}}{|\mathrm{v}|}$. То есть α, θ — сферические координаты в пространстве $\xi = \upsilon_1,\ \varsigma = \upsilon_2,\ \zeta = \upsilon_3$. При этом $\mathrm{v} = |\mathrm{v}|\,\tau$, где $\tau = \tau\,(\alpha, \theta) = \cos\alpha\sin\theta i + \sin\alpha\sin\theta j + \cos\theta k$ — направление векторного поля $\mathrm{v}\,(|\tau| = 1)$.

В двумерном случае $\mathrm{v} = \mathrm{v}\,(x, y) = \upsilon_1 i + \upsilon_2 j = \mathrm{v}\,|\tau|,\ \upsilon_3 = 0,\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tau = \tau\,(\alpha) = \cos\alpha i + \sin\alpha j$, угол α определяется формулой (7), $\nabla\theta = B = 0$; $\forall\varphi\,(x, y) \in C^1\,(D)$ имеем $\mathrm{rot}\,(\varphi k) = \varphi_y i - \varphi_x j$ где $\varphi_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Для любого плоского векторного поля* $\mathrm{v}\,(x, y)$ *с компонентами* $\upsilon_k\,(x, y) \in C^1\,(D)\,, k = 1, 2$ *модулем* $|\mathrm{v}| \neq 0$ *в* D *и направлением* $\tau = \tau\,(\alpha)$ *справедливо тождество*

$$Q \overset{def}{=} \frac{\mathrm{vdiv\ v} + \mathrm{v} \times \mathrm{rot\ v}}{|\mathrm{v}|^2} = \nabla \ln|\mathrm{v}| + \mathrm{rot}\ (\alpha k) \Rightarrow \tag{8}$$

$$\mathrm{div\ v} = (\{\nabla \ln|\mathrm{v}| + \mathrm{rot}\ (\alpha k)\} \cdot \mathrm{v})\,, \qquad \mathrm{rot\ v} = \ \{\nabla \ln|\mathrm{v}| + \mathrm{rot}\ (\alpha k)\} \times \mathrm{v}.$$

При этом $S = \mathrm{rot}\ (\alpha k) \Rightarrow (S \cdot \nabla\alpha) = 0$, *т.е. векторные линии векторного поля* S *совпадают с линиями уровня скалярного поля углов* $\alpha\,(x, y)$. *Если* $\upsilon_k\,(x, y) \in C^2\,(D)\,, k = 1, 2$, *то справедливы тождества*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\ S = 0, \qquad \mathrm{rot}\ S = -\,(\Delta\alpha)\ k \Rightarrow \\
&\Delta \ln|\mathrm{v}| = \mathrm{div}\ Q, \qquad (\Delta\alpha)\ k = -\mathrm{rot}\ Q \Rightarrow \\
&\Delta Ln\left\{|\mathrm{v}|\, e^{\pm i\alpha}\right\} = \mathrm{div}\ Q \pm i\,(\mathrm{rot}\ Q \cdot k)\,.
\end{aligned}$$

В законе сохранения теоремы 2 имеем $H_i = 0$.

Как известно [4], любое гладкое векторное поле можно представить в виде суммы градиента некоторого скаляра и ротора некоторого вектора. Тождество (8) дает такое представление для векторного поля Q. При $\mathrm{v} = \nabla u\,(x, y)$ теорема 3 дает тождества работы [2].

2. Уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением

В работах [5, 6] на основе законов сохранения, инвариантности уравнений относительно преобразований Галилея и условия термодинамической согласованности построена нелинейная двухскоростная модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Двухскоростная гидродинамическая теория с условием равновесия фаз по давлению, была построена в работе [7]. Уравнения движения двухскоростной среды с одним давлением в системе в изотермический случай имеет вид [7]

$$\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\tilde\rho\tilde{\mathrm v}+\rho\mathrm v\right)=0,\qquad \frac{\partial\tilde\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\tilde\rho\tilde{\mathrm v}\right)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathrm v}{\partial t}+(\mathrm v,\nabla)\,\mathrm v=-\frac{\nabla p}{\bar\rho}+\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2+f, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm v}}{\partial t}+(\tilde{\mathrm v},\nabla)\,\tilde{\mathrm v}=-\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2+f, \tag{11}$$

где $\tilde{\mathrm v}$ и $\mathrm v$ — вектора скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\tilde\rho$ и ρ, $\bar\rho=\tilde\rho+\rho$ — общая плотность континуума; $p=p\left(\bar\rho,(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v)^2\right)$ — уравнение состояния континуума; f — вектор массовой силы, отнесенной к единице массы. В терминах векторов $W,\mathrm V,S,Q,P,H_i,F_i,\tilde W,\tilde{\mathrm V},\tilde S,\tilde Q,\tilde P,\tilde H_i,\tilde F_i$, определенных в теореме 1, система уравнений (10), (11) может быть записана в любой из следующих форм (символы без тильды и с тильдой относятся к соответствующим подсистемам континуума):

$$\begin{aligned} W&=\frac{\partial \mathrm v}{\partial t}+\mathrm v\;\mathrm{div}\;\mathrm v+\frac12\nabla\upsilon^2+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f,\\ -\mathrm V&=\frac{\partial \mathrm v}{\partial t}+\mathrm v\;\mathrm{div}\;\mathrm v+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &G\overset{def}{=}\frac{1}{\upsilon^2}\left\{\frac{\partial \mathrm v}{\partial t}+\mathrm v\mathrm{div}\;\mathrm v+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f\right\}=S\left(=Q-P\right)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow G+H_i=\mathrm{rot}\;F_i,\qquad i=1,2; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \tilde W&=\frac{\partial \tilde{\mathrm v}}{\partial t}+\tilde{\mathrm v}\;\mathrm{div}\;\tilde{\mathrm v}+\frac12\nabla\tilde\upsilon^2+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f,\\ -\tilde{\mathrm V}&=\frac{\partial \tilde{\mathrm v}}{\partial t}+\tilde{\mathrm v}\;\mathrm{div}\;\tilde{\mathrm v}+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &G\overset{def}{=}\frac{1}{\upsilon^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathrm v}}{\partial t}+\tilde{\mathrm v}\mathrm{div}\;\tilde{\mathrm v}+\frac{\nabla p}{\bar\rho}-\frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2-f\right\}=\tilde S\left(=\tilde Q-\tilde P\right)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \tilde G+\tilde H_i=\mathrm{rot}\;\tilde F_i,\qquad i=1,2. \end{aligned} \tag{15}$$

В случае однородных несжимаемых сред, т.е. при условии $\rho=\mathrm{const},\tilde\rho=\mathrm{const}\Rightarrow\mathrm{div}\;\mathrm v=0$, $\mathrm{div}\;\tilde{\mathrm v}=0\Leftrightarrow\mathrm v=\mathrm{rot}\;A,\;\tilde{\mathrm v}=\mathrm{rot}\;\tilde A$, где $A,\tilde A$ - векторные потенциалы скоростей $\mathrm v,\tilde{\mathrm v}$, уравнения двухскоростной гидродинамики представимы в виде

$$\begin{aligned} W&=\nabla\left\{\frac12\upsilon^2+\frac{p}{\bar\rho}+U-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2\right\}+\mathrm{rot}\;\left\{A_t+M\right\},\\ -\mathrm V&=\nabla\left\{\frac{p}{\bar\rho}+U-\frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2\right\}+\mathrm{rot}\;\left\{A_t+M\right\},\\ \tilde W&=\nabla\left\{\frac12\tilde\upsilon^2+\frac{p}{\bar\rho}+U-\frac{\rho}{2\bar\rho}\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2\right\}+\mathrm{rot}\;\left\{\tilde A_t+M\right\},\\ -\tilde{\mathrm V}&=\nabla\left\{\frac{p}{\bar\rho}+U-\frac{\rho}{2\bar\rho}\left(\tilde{\mathrm v}-\mathrm v\right)^2\right\}+\mathrm{rot}\;\left\{\tilde A_t+M\right\}, \end{aligned}$$

где $f = \nabla U + \mathrm{rot}\, M$; $\tilde{A}_t, A_t$ — временные производные векторов $\tilde{A}, A$. Отсюда при совпадении скоростей и физических плотностей фаз получим $\tilde{W} = W$, $\tilde{\mathrm{V}} = \mathrm{V}$ и, как следствие, формулы для векторных полей W, V из работы [2]. Таким образом, решение $(\mathrm{v}, \tilde{\mathrm{v}}, p)$ системы уравнений двухскоростной гидродинамики для однородных несжимаемых сред дает представление векторных полей $W, \mathrm{V}, \tilde{W}, \tilde{\mathrm{V}}$, определенных в теореме 1 (где $\mathrm{v} = \mathrm{rot}\, A, \tilde{\mathrm{v}} = \mathrm{rot}\, \tilde{A}$) в виде суммы $\nabla\Phi + \mathrm{rot}\, \Psi$. Из (13), (15) и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Для любого движения идеальной двухскоростной системы с одним давлением* $(\mathrm{v} \neq 0, \tilde{\mathrm{v}} \neq 0)$ *справедливы тождества*

$$\mathrm{div}\, \left[\frac{1}{\upsilon^2}\left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{v}\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}\right)^2 - f\right\}\right] = -2\frac{\sin\theta}{\upsilon}\left(\mathrm{v}\cdot\left(\nabla\alpha\times\nabla\theta\right)\right) = \mathrm{div}\, S,$$
$$\mathrm{div}\, \left[\frac{1}{\tilde{\upsilon}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathrm{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathrm{v}}\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{v}} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}\right)^2 - f\right\}\right] = -2\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\upsilon}}\left(\tilde{\mathrm{v}}\cdot\left(\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\theta}\right)\right) = \mathrm{div}\, \tilde{S}.$$

Кроме того, помимо общего закона сохранения теоремы 2, справедливого для любых гладких векторных полей $\mathrm{v}\left(x,y,z,t\right), \tilde{\mathrm{v}}\left(x,y,z,t\right)$, *также выполняются законы сохранения дифференциальных форм*

$$\mathrm{div}\left(G + H_i\right) = 0, \qquad \mathrm{div}\left(\tilde{G} + \tilde{H}_i\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{div}\left[\frac{1}{\upsilon^2}\left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{v}\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}\right)^2 - f\right\} + H_i\right] = 0,$$
$$\mathrm{div}\left[\frac{1}{\tilde{\upsilon}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathrm{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathrm{v}}\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{v}} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}\right)^2 - f\right\} + \tilde{H}_i\right] = 0$$

и интегральных форм для потоков

$$\iint_S \left(\left[G + H_i\right]\cdot\eta\right) dS = 0, \qquad \left(\left[\tilde{G} + \tilde{H}_i\right]\cdot\eta\right) dS = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Здесь векторы $H_i\left(\tilde{H}_i\right)$ определены в теореме 1 и выражаются только через углы $\alpha\left(\tilde{\alpha}\right), \theta\left(\tilde{\theta}\right)$ направлений скоростей $\mathrm{v}\left(x,y,z,t\right), \tilde{\mathrm{v}}\left(x,y,z,t\right)$, S — кусочно-гладкая граница области D, η — нормаль к S. Для безвихревого движения (при $\mathrm{v} = \nabla u$, $\tilde{\mathrm{v}} = \nabla\tilde{u}$) имеем

$$G \overset{def}{=} \frac{1}{\upsilon^2}\left\{\nabla u_t + \nabla u\nabla u + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\nabla\tilde{u} - \nabla u\right)^2 - f\right\},$$
$$\tilde{G} \overset{def}{=} \frac{1}{\tilde{\upsilon}^2}\left\{\nabla \tilde{u}_t + \nabla \tilde{u}\nabla \tilde{u} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\nabla\tilde{u} - \nabla u\right)^2 - f\right\}$$

и справедливы тождества

$$\mathrm{div} G = \frac{2}{\upsilon}\mathrm{div}\left\{u\mathrm{rot}\left(\alpha\cos\theta\right)\right\} = -\frac{2\sin\theta}{\upsilon}\frac{\partial\left(u,\alpha,\theta\right)}{\partial\left(x,y,z\right)},$$
$$\mathrm{div}\tilde{G} = \frac{2}{\tilde{\upsilon}}\mathrm{div}\left\{\tilde{u}\mathrm{rot}\left(\tilde{\alpha}\cos\tilde{\theta}\right)\right\} = -\frac{2\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\upsilon}}\frac{\partial\left(\tilde{u},\tilde{\alpha},\tilde{\theta}\right)}{\partial\left(x,y,z\right)},$$

если выполнено одно из условий:

$$u = u\left(x,y\right)\left(\tilde{u} = \tilde{u}\left(x,y\right)\right) \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}\left(\tilde{\theta} \equiv \tfrac{\pi}{2}\right);\ u\left(\alpha,\theta\right)\left(\tilde{u} = \tilde{u}\left(\alpha,\theta\right)\right);\ \upsilon = \upsilon\left(\alpha,\theta\right)\left(\tilde{\upsilon} = \tilde{\upsilon}\left(\alpha,\theta\right)\right);$$
$$u_z = \varphi\left(u_x,u_y\right)\left(\tilde{u}_z = \tilde{\varphi}\left(\tilde{u}_x,\tilde{u}_y\right)\right),$$

то $\mathrm{div} G = 0\left(\mathrm{div}\tilde{G} = 0\right)$. В плоском случае $\mathrm{v} = \mathrm{v}\left(x,y,t\right) = \upsilon\tau$, $\tilde{\mathrm{v}} = \tilde{\mathrm{v}}\left(x,y,t\right) = \tilde{\upsilon}\tilde{\tau}$, $\tau = \cos\alpha i + \sin\alpha j$, $\tilde{\tau} = \cos\tilde{\alpha} i + \sin\tilde{\alpha} j$, $\alpha = \alpha\left(x,y,t\right)$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\left(x,y,t\right)$ — угол наклона линии тока (векторной линии поля $\mathrm{v}(\tilde{\mathrm{v}})$ при $t = \mathrm{const}$). Для несжимаемых сред имеем $\mathrm{div}\,\mathrm{v} = 0,\ \mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{v}} = 0,\ \ \mathrm{v} = u_y i - u_x j = \mathrm{rot}\,(uk)\,,\ \tilde{\mathrm{v}} = \tilde{u}_y i - \tilde{u}_x j = \mathrm{rot}\,(\tilde{u}k)\,,\ \upsilon^2 = u_x^2 + u_y^2,\ \tilde{\upsilon}^2 = \tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2$, где $u = u\,(x, y, t)$ и $\tilde{u} = \tilde{u}\,(x, y, t)$ — функция тока. Из уравнения (13), (15) и теоремы 3 следует

Теорема 5. *Система уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (10), (11) для плоского движения* $(\mathrm{v} = \mathrm{v}\,(x, y, t)\,\tilde{\mathrm{v}} = \tilde{\mathrm{v}}\,(x, y, t)\,\upsilon \neq 0,\ \ \tilde{\upsilon} \neq 0)$ *представима в виде тождеств*

$$\begin{array}{lll}
G = \mathrm{rot}\ (\alpha(x,y,t)k), & \tilde{G} = \mathrm{rot}\ (\tilde{\alpha}(x,y,t)k) \ \Rightarrow \mathrm{div}\, G = 0, & \mathrm{div}\, \tilde{G} = 0, \\
\mathrm{rot}\ G = -(\Delta\alpha)k, & \mathrm{rot}\ \tilde{G} = -\ (\Delta\tilde{\alpha})k \Rightarrow \Delta \ln \upsilon = \mathrm{div}\, Q, & \Delta \ln \tilde{\upsilon} = \mathrm{div}\, \tilde{Q}, \\
(\Delta\alpha)k = -\mathrm{rot}\ Q, & (\Delta\tilde{\alpha})k = -\mathrm{rot}\ \tilde{Q}, &
\end{array} \tag{16}$$

где поля $G, Q, \tilde{G}, \tilde{Q}$ определены в (8), (13), (15).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Как в случае* $(\mathrm{v} = \nabla u\,(x, y, t)\,,\ \ \tilde{\mathrm{v}} = \nabla \tilde{u}\,(x, y, t))$ *плоского безвихревого движения с потенциалами* $u = u\,(x, y, t)$, $\tilde{u} = \tilde{u}\,(x, y, t) \in C^3(D)$, *так и в случае плоского движения несжимаемого двухскоростного континуума* $(\mathrm{v} = \mathrm{rot}\ \ (u\,(x, y, t)\,k) = u_y i - u_y j,\ \ \tilde{\mathrm{v}} = \mathrm{rot}\,(u\,(x, y, t)\,k)\ =\ \tilde{u}_y i - \tilde{u}_x j)$ *с функцией тока* $u\,(x, y, t)\,, \tilde{u}\,(x, y, t)\ \in\ C^3\,(D)$ *для величин* $\alpha_x, \alpha_y, \upsilon\ =\ |\mathrm{v}|\,,\ \ Q, S, \mathrm{V}\ =\ -\upsilon^2 S, \mathrm{div}\ \mathrm{V}, \mathrm{rot}\ \mathrm{V}\left(\tilde{\alpha}_x, \tilde{\alpha}_y, \tilde{\upsilon} = |\tilde{\mathrm{v}}|\,,\ \ \tilde{Q}, \tilde{S}, \tilde{\mathrm{V}} = -\upsilon^2 \tilde{S},\ \ \mathrm{div}\ \tilde{\mathrm{V}}, \mathrm{rot}\ \tilde{\mathrm{V}}\right)$ *получаем одни и те же выражения через производные функции $u(\tilde{u})$, при этом* $\upsilon = \sqrt{g},\ g = u_x^2 + u_y^2,\ \ \tilde{\upsilon} = \sqrt{\tilde{g}},\ \tilde{g} = \tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2,\ Q = \dfrac{\Delta u \nabla u}{g},\ \ S = \mathrm{rot}\ (\alpha k),\ \tilde{Q} = \dfrac{\Delta \tilde{u} \nabla \tilde{u}}{\tilde{g}},\ \tilde{S} = \mathrm{rot}\ (\tilde{\alpha} k),$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \frac{1}{2}\nabla\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \Delta u \nabla u = -\left(u_x^2 + u_y^2\right)\mathrm{rot}\ (\alpha k) = \\
&= \left(u_y u_{xy} - u_x u_{yy}\right) i + \left(u_x u_{xy} - u_y u_{xx}\right) j = \left(\nabla u \times \nabla\right) \nabla u,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathrm{div}\mathrm{V} = 2\left(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\right),\quad \mathrm{rot}\mathrm{V} = \Big\{u_y\left(\Delta u\right)_x - u_x\left(\Delta u\right)_y\Big\}k, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{V}} &= \frac{1}{2}\nabla\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right) - \Delta \tilde{u} \nabla \tilde{u} = -\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right)\mathrm{rot}\ (\tilde{\alpha} k) = \\
&= \left(\tilde{u}_y \tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_x \tilde{u}_{yy}\right) i + \left(\tilde{u}_x \tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_y \tilde{u}_{xx}\right) j = \left(\nabla \tilde{u} \times \nabla\right) \nabla \tilde{u},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathrm{div}\ \tilde{\mathrm{v}} = 2\left(\tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}\right),\ \mathrm{rot}\ \tilde{\mathrm{V}} = \Big\{\tilde{u}_y\left(\Delta \tilde{u}\right)_x - \tilde{u}_x\left(\Delta \tilde{u}\right)_y\Big\}_{\tilde{}} \tag{20}$$

и справедливы тождества $(\upsilon \neq 0, \tilde{\upsilon} \neq 0)$

$$Q = \frac{\Delta u \nabla u}{\upsilon^2} = \nabla \ln \upsilon + \mathrm{rot}\,(\alpha k)\,,\quad \tilde{Q} = \frac{\Delta \tilde{u} \nabla \tilde{u}}{\tilde{\upsilon}^2} = \nabla \ln \tilde{\upsilon} + \mathrm{rot}\,(\tilde{\alpha} k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R \stackrel{def}{=} \frac{\Delta u}{\upsilon^2}\mathrm{rot}\,(uk) = -\nabla\alpha + \mathrm{rot}\,(\ln \upsilon k)\,,\quad \tilde{R} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta \tilde{u}}{\tilde{\upsilon}^2}\mathrm{rot}\,(\tilde{u}k) = -\nabla\tilde{\alpha} + \mathrm{rot}\,(\ln \tilde{\upsilon} k) \Rightarrow$$

$$\nabla \ln \upsilon = \mathrm{div}\ Q,\quad \nabla \ln \tilde{\upsilon} = \mathrm{div}\ \tilde{Q},\quad (\Delta\alpha)\,k = -\mathrm{rot}Q,\quad (\Delta\tilde{\alpha})\,k = -\mathrm{rot}\tilde{Q}.$$

Из (12), (14) и (18), (20) следует

Теорема 6. *Система уравнений Монжа-Ампера*

$$u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F,\qquad \tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy} = \tilde{F} \tag{21}$$

(в общем случае $F, \tilde{F}$ — гладкие функции от $x, y, u, \tilde{u}, u_x, \tilde{u}_x, u_y, \tilde{u}_y, u_{xx}, \tilde{u}_{xx}, u_{xy}, \tilde{u}_{xy}, u_{yy}, \tilde{u}_{yy}$, параметра t) и система уравнений для функции тока плоского движения несжимаемых сред

$$\begin{aligned} -\left\{u_y (\Delta u)_x - u_x (\Delta u)_y\right\} &= (\Delta u)_t + (\mathrm{rot}\ f_1^* \cdot k), \\ -\left\{\tilde{u}_y (\Delta \tilde{u})_x - \tilde{u}_x (\Delta \tilde{u})_y\right\} &= (\Delta \tilde{u})_t + (\mathrm{rot}\ f_2^* \cdot k), \end{aligned} \tag{22}$$

где $f_1^* = f - \dfrac{\nabla p}{\bar{\rho}} + \dfrac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla w,\ f_2^* = f - \dfrac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \dfrac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla w,\ w = (\tilde{u}_x - u_x)^2 + (\tilde{u}_y - u_y)^2$, *связаны между собой следующим образом: их левые части выражаются, соответственно, через дивергенцию и ротор одних и тех же векторных полей* $\mathrm{V}, \tilde{\mathrm{V}}$ *вида (17), (19) по формулам (18), (20).*

Пусть функции $\mathrm{v}(x,y,t) = u_y i - u_x j,\ \tilde{\mathrm{v}}(x,y,t) = \tilde{u}_y i - \tilde{u}_x j,\ p(x,y,t)$ в следующей области $\sum : \{(x,y) \in D,\ t \in (t_1, t_2)\}$ удовлетворяют системе уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (10), (11) для плоского движения несжимаемых сред. Тогда в области $\sum$ функции тока $u(x,y,t)$, $\tilde{u}(x,y,t)$ удовлетворяют обоим уравнениям (21) и (22) при

$$F = \frac{\mathrm{div}\ f_1^*}{2},\ \tilde{F} = \frac{\mathrm{div}\ f_2^*}{2}. \tag{23}$$

Обратно, пусть функции $u(x,y,t), \tilde{u}(x,y,t)\, p(x,y,t)$ удовлетворяют в области $\sum$ уравнениям (21) и (22) с правой частью (23) и на границе S области D при $t \in (t_1, t_2)$ выполняется равенство $(\mathrm{V} \cdot \eta) = ([f_1^* - \mathrm{rot}\ (u_t k)] \cdot \eta)$, $\left(\tilde{\mathrm{V}} \cdot \eta\right) = ([f_2^* - \mathrm{rot}\ (\tilde{u}_t k)] \cdot \eta)$, где η — нормаль к S. В частности, последние равенства справедливы, если на S выполняются равенства (10), (11). Тогда функции $\mathrm{v}(x,y,t) = u_y i - u_x j,\ \tilde{\mathrm{v}}(x,y,t) = \tilde{u}_y i - \tilde{u}_x j,\ p(x,y,t)$ в области $\sum$ удовлетворяют системе уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (10), (11) для плоского движения несжимаемых сред.

В частности, для однородных сред $\rho = \mathrm{const}, \tilde{\rho} = \mathrm{const}$ и потенциального поля $f = -\nabla U$ уравнения (21), (22) принимают вид

$$\begin{aligned} (\mathrm{rot}\ \mathrm{V} \cdot k) &= -\left\{u_y (\Delta u)_x - u_x (\Delta u)_y\right\} = (\Delta u)_t, \\ \left(\mathrm{rot}\ \tilde{\mathrm{V}} \cdot k\right) &= -\left\{\tilde{u}_y (\Delta \tilde{u})_x - \tilde{u}_x (\Delta \tilde{u})_y\right\} = (\Delta \tilde{u})_t, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{div}\ \mathrm{V}}{2} = u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F, \quad \frac{\mathrm{div}\ \tilde{\mathrm{V}}}{2} = \tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy} = \tilde{F}, \tag{25}$$

$$F = -\frac{\Delta\left(U + \frac{p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}} w\right)}{2}, \quad \tilde{F} = -\frac{\Delta\left(U + \frac{p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}} w\right)}{2}.$$

Следовательно функции тока $u(x,y,t), \tilde{u}(x,y,t)$, найденные, например, как решение известной системы уравнений (24), при любом фиксированном t дают одновременно решение системы уравнений Монжа-Ампера (25), правую часть которых можно найти из системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (10), (11) при $\mathrm{v} = u_y i - u_x j, \tilde{\mathrm{v}} = \tilde{u}_y i - \tilde{u}_x j$.

В заключение авторы выражают благодарность Ю.В. Перепечко за обсуждение проблемы и за ряд ценных замечаний, которые были учтены при подготовке статьи.

Список литературы

[1] В.М.Нещадим, Обратные задачи для кинетических уравнений. Алгебраические и дифференциальные тождества, *Докл. РАН*, **400**(2005), №3, 315–318.

[2] А.Г.Меграбов, Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления, *Докл. РАН*, **424**(2009), №5, 599–603.

[3] А.Г.Меграбов, Дифференциальные тождества, связывающие модуль и направления векторного поля, гидродинамические уравнения Эйлера, *Докл. РАН*, **433**(2010), №3, 309–313.

[4] Н.Е.Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Л.-М., ГОНТИ, 1938.

[5] В.Н.Доровский, Континуальная теория фильтрации, *Геология и геофизика*, (1989), №7, 39–45.

[6] В.Н.Доровский, Ю.В.Перепечко, Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями, *ПМТФ*, (1992), №3, 94–105.

[7] В.Н.Доровский, Ю.В.Перепечко, Теория частичного плавления, *Геология и геофизика*, (1989), №9, 56–64.

Application of Megrabov's Differential Identities to the Two-velocity Hydrodynamics Equations with One Pressure

Nasriddin M. Zhabborov
Petr V. Korobov
Kholmatzhon Kh. Imomnazarov

A series of the differential identities connecting velocities, pressure and body force in the two-velocity hydrodynamics equations with equilibrium of pressure phases are found. Some of these identities have a divergent form and can be considered as some conservation laws. It is detected that the flow functions for plane motion satisfy the Monge-Ampere system of equations.

Keywords: two-velocity hydrodynamics, hyperbolic system.