

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт
Электротехнологии и электротехники

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ В.Н. Тимофеев
подпись инициалы, фамилия
« ____ » _____ 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИНДУКЦИОННАЯ ТИГЕЛЬНАЯ ПЕЧЬ С МГД-ВРАЩАТЕЛЕМ РАСПЛАВА

13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

13.04.02.07 Электротехнологии в металлургии

Научный руководитель	_____	<u>проф., д-р тех. наук</u>	<u>В.Н. Тимофеев</u>
	подпись, дата	должность, ученая степень	инициалы, фамилия
Выпускник	_____		<u>И.А. Фрейман</u>
	подпись, дата		инициалы, фамилия
Рецензент	_____	<u>канд.тех.наук</u>	<u>П.А. Хоменков</u>
	подпись, дата	ученая степень	инициалы, фамилия

Красноярск 2016

Консультанты по разделам:

2 Математическое моделирование
физических процессов в индукционной
тигельной печи

подпись, дата

М.Ю. Хацаюк
инициалы, фамилия

3 Экспериментальное исследование
физических процессов в индукционной
тигельной печи

подпись, дата

В.Д. Раков
инициалы, фамилия

Нормоконтролёр

подпись, дата

М.В. Первухин
инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация по теме «Индукционная тигельная печь с МГД-вращателем расплава» содержит 53 страниц текстового документа, 38 иллюстраций, 35 использованных источников.

ИНДУКЦИОННАЯ ТИГЕЛЬНАЯ ПЕЧЬ, АЛЮМИНИЕВЫЙ СПЛАВ, МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА, ИНДУКТОР, МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА, ЛИГАТУРА, ЛИТЕЙНАЯ УСТАНОВКА.

Цель работы:

- разработка МГД-вращателя расплава для индукционной тигельной печи.

В результате исследования была разработана математическая модель ИТП с МГД-вращателем на которой проведены эксперименты. Выявлено, что скорость течения увеличивается в несколько раз, если используется МГД-вращатель. Проведены эксперименты на лабораторной физической модели ИТП с МГД-вращателем.

В итоге разработана литейная установка на основе МГД-вращателя расплава, которая отправлена на завод для дальнейших испытаний.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Обзор литературы по индукционным тигельным печам	7
1.1 Конструкция и принцип работы	7
1.2 Способы изменения циркуляции расплава и повышения интенсивности течений	9
1.3 Выводы по разделу	20
2 Математическое моделирование физических процессов в индукционной тигельной печи	21
2.1 Общие замечания	21
2.2 Электромагнитная задача.....	22
2.3 Гидродинамическая задача	27
2.4 Результаты численного моделирования	31
2.5 Выводы по разделу	35
3 Экспериментальное исследование физических процессов в индукционной тигельной печи с МГД-вращателем	36
3.1 Описание физической модели и результаты эксперимента	36
3.2 Литейная установка на основе ИТП с МГД-вращателем	38
3.3. Сборка опытно-промышленной литейной установки с МГД-вращателем расплава	38
3.4 Выводы по разделу	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	41

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность настоящей работы обусловлена высоким ростом применения алюминиевых сплавов в различных отраслях промышленности. Различные легирующие добавки позволяют добиваться требуемых механических свойств, приготовляемого сплава. Для их приготовления используют различные технологические схемы и оборудование. В большинстве случаев алюминиевые сплавы приготавливают в печах-миксерах и индукционных тигельных печах (ИТП).

Не маловажную роль в приготовлении качественного сплава играет перемешивание всех компонентов сплава. Для перемешивания металла уже давно используются электромагнитные перемешиватели. Такие перемешиватели не имеют прямого контакта с расплавом и это их главное достоинство. Их принцип основан на воздействии электромагнитных сил на металл. Замешивание различных лигатур в твердом и жидком виде в алюминии не простой процесс и требует эффективного перемешивания расплава.

Целью работы является разработка магнитогидродинамического (МГД) вращателя расплава для индукционной тигельной печи.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Провести анализ способов и устройств повышенной циркуляции расплава в ИТП;
2. Разработать параметрическую математическую модель ИТП с МГД-вращателем;
3. Разработать и создать физическую модель ИТП с МГД-вращателем;
4. Исследовать электромагнитные и гидродинамические процессы в ИТП с МГД-вращателем
5. Сопоставить полученные результаты теоретических расчетов и экспериментов на физической модели.
6. Полученные результаты использовать при проектировании и изготовлении опытно-промышленной литейной установки.

Объектом исследования является индукционная тигельная печь с МГД-вращателем расплава.

Предмет исследования - тепловые, гидродинамические и электромагнитные процессы, протекающие в расплаве в ИПТ с МГД-вращателем.

Научная новизна исследования состоит в том, что предложена параметрическая математическая модель, позволяющая одновременно проводить анализ тепловых, электромагнитных и гидродинамических процессов, протекающих в ИПТ с МГД-вращателем.

Практическая значимость работы заключается в том, что исследование было завершено внедрением опытно-промышленной литейной установки, которая была изготовлена по ТЗ заказчика.

1 Обзор литературы по индукционным тигельным печам

1.1 Конструкция и принцип работы

Индукционные тигельные печи работают по принципу трансформаторной передачи энергии от первичной катушки к вторичной. В первичную обмотку трансформатора подается переменный ток, электрическая энергия которого преобразуется в электромагнитную, которая во вторичной обмотке снова переходит в электрическую, далее в тепловую [1].

Индукционные тигельные печи еще называют индукционными печами без сердечника. На рисунке 1.1 представлен эскиз ИТП. ИТП представляет собой тигель 3, чаще всего он цилиндрической формы, изготовленный из огнеупорного материала и помещенный внутрь индуктора 1, который подключен к сети переменного тока. Металлическая шихта 2 загружается в тигель и плавится, потребляя электрическую энергию индуктора. В ИТП первичной обмоткой является индуктор, а вторичной обмоткой и также нагрузкой – расплавляемый металл.

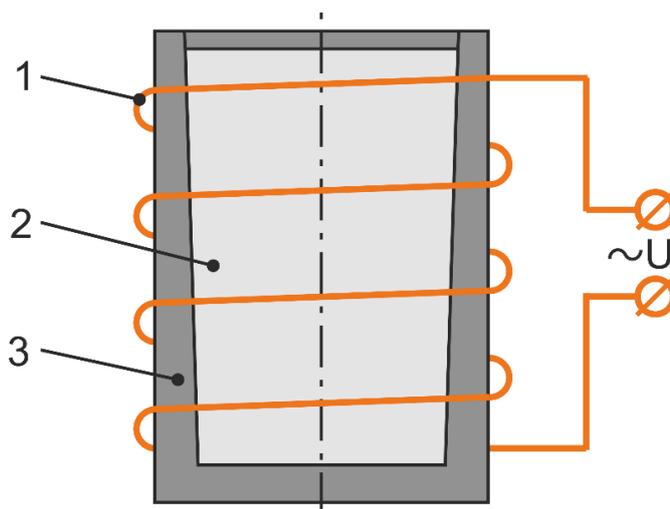


Рисунок 1.1 – Индукционная тигельная печь

Магнитный поток в тигельной печи проходит в какой-то степени по самой загрузке. Поэтому для работы индукционной печи большое значение имеют магнитные свойства и габаритные размеры расплавляемой шихты.

Под действием магнитного поля возникают электромагнитные силы, которые направлены в центр тигля и сдавливают расплавленный металл. В средней по высоте части тигля, где не сказывается краевой эффект, силы электродинамического взаимодействия индуцированного тока и магнитного поля индуктора направлены радиально к оси цилиндра и убывают от максимального значения на поверхности до нуля на оси. Создаваемое этими силами давление сжатия возрастает от поверхности к оси [2].

Тигельная печь представляет собой относительно короткую электромагнитную систему (отношение высоты загрузки к диаметру редко превосходит 1,5), поэтому электродинамические силы F направлены строго радиально только в средней по высоте части тигля. Ближе к верхнему и нижнему краям тигля, где магнитное поле искажается и линии его не идут параллельно оси, радиальная составляющая электродинамических сил уменьшается, как показано горизонтальными стрелками на рисунке 1.2.

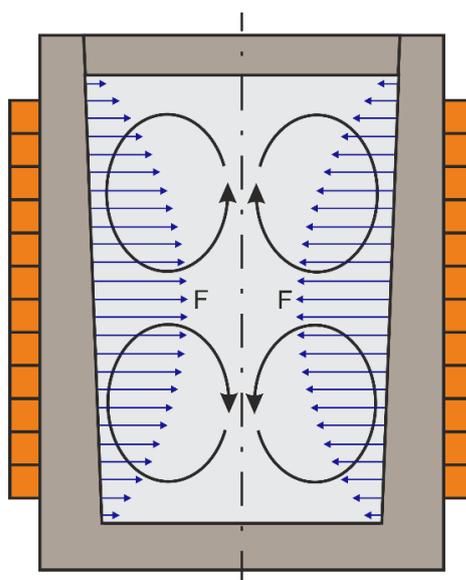


Рисунок 1.2 – Двухконтурная циркуляция металла в индукционной тигельной печи

Под действием таких электромагнитных сил возникает двухконтурная циркуляция расплава. В средней части тигля металл выталкивается от стенок к оси, далее он движется по оси в верхнюю и нижние части тигля. Внизу расплав завихряется по дну и выталкивается на боковые стенки тигля. Данный процесс протекает пока присутствуют электромагнитные силы.

Естественная электродинамическая циркуляция в ИПТ может протекать довольно интенсивно, что можно отнести к достоинствам тигельных печей. Движение расплава в тигле, значительно уменьшает время плавки, выравнивает температурное поле, а также химический состав приготавливаемого сплава.

Но у двухконтурной циркуляции есть и свои недостатки. Первое, это слабое перемешивание между нижней и верхней частями тигля, так как расплав в них циркулирует раздельно друг от друга. Второе, то, что на зеркале металла образуется выпуклый мениск, который увеличивается со временем. Для его уменьшения приходится увеличивать количество шлака для полного закрытия поверхности металла. При этом шлак взаимодействует с огнеупором тигля, разъедая его и загрязняя тигель. Кроме того, при увеличении количества шлака он становится холодным, потому что в индукционной печи шлак нагревается только за счет теплопередачи от металла. Понижение температуры шлака замедляет протекание химических реакций и увеличивает продолжительность плавки [3].

1.2 Способы изменения циркуляции расплава и повышения интенсивности течений

Трехфазное питание индуктора. Авторами [3,4] предложено одно из решений проблемы электродинамического перемешивания расплава в тигельной печи. Однако схема питания индуктора значительно усложняется. В итоге возникает одноконтурная циркуляция, которая осуществляется при помощи бегущего магнитного поля, создаваемое двух- или трехфазным индуктором.

В отличие от обычных однофазных индукторов обмотка трехфазного состоит из шести секций, которые соединяются между собой по правилам формирования обмоточной зоны индуктора многофазной индукционной машины [6], схема трехфазного индуктора представлена на рисунке 1.3.

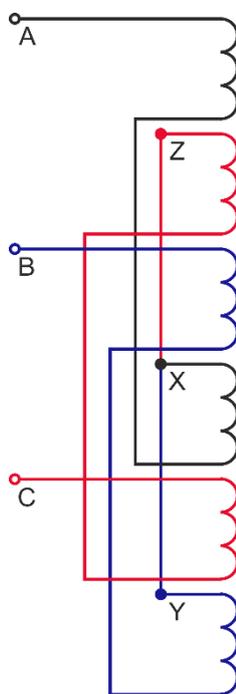


Рисунок 1.3 – Распределение секций фаз по высоте обмотки индуктора

Число витков секции является известным числом «пазов» на полюс и фазу. Фазы такого индуктора соединяются по схеме звезды или треугольника и подключаются к трехфазной сети. При симметричной системе токов трехфазный индуктор создает в нагрузке бегущее магнитное поле с длиной полюсного деления τ , длина которого равна длине трех секций A, Z, B индуктора. В металле кроме нормальных возникают тангенциальные усилия, под действием которых появляется одноконтурное движение расплава. В зависимости от чередования фаз питающих напряжений возможно изменение направления движения расплава. Главным достоинством многофазного индуктора является возможность более гибкого управления силовым воздействием на металл в тигле путем изменения токов и чередования фаз. При этом можно вводить искусственную несимметрию токов фаз и тем самым

менять соотношение между тяговым и нормальным усилиями, а также между мощностями, идущими на нагрев металла и на его перемещение.

Главный минус такого индуктора то, что бегущая волна электромагнитного поля может затухать в слое футеровки.

На рисунке 1.4 показана картина распределения скоростей жидкого металла при установке индуктора с трехфазным питанием. Катушки индуктора создают бегущее вниз магнитное поле. Слева расположен тигель, справа показан индуктор.

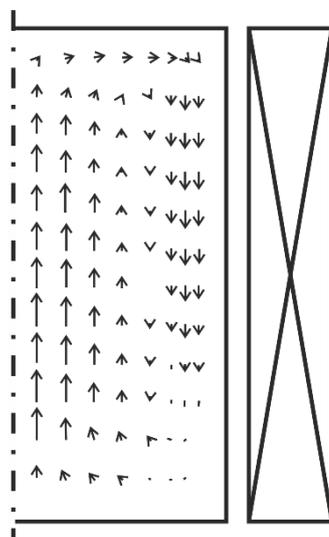


Рисунок 1.4 – Распределение скоростей движения металла в тигле от воздействия индуктора

Трехфазный индуктор позволяет увеличить диапазон управления движением расплава в тигле, но тепловое воздействие на загрузку значительно снижается.

Перераспределение и фокусирование мощности. В работах авторов [1,5,7,8] также используются индукторы, которые разделяются на несколько секций. Когда в тигель загружается шихта и начинается процесс плавки задействованы все секции сразу. Это обеспечивает максимально быстрое расплавление металла за счет равномерного распределения мощности. В момент рафинирования сплава отключается верхняя секция индуктора поэтому

в верхней части тигля циркуляция заметно ослабевает в следствии чего уменьшается мениск.

В [1] представлена многоконтурная схема питания индуктора печи, изображенная на рисунке 1.5. Такая схема также позволяет управлять мощностью и электродинамическими силами во всем объеме тигля. Регулирование происходит путем изменения емкости конденсаторных батарей С1 и С2, включенных параллельно верхней и нижней половинам индуктора.

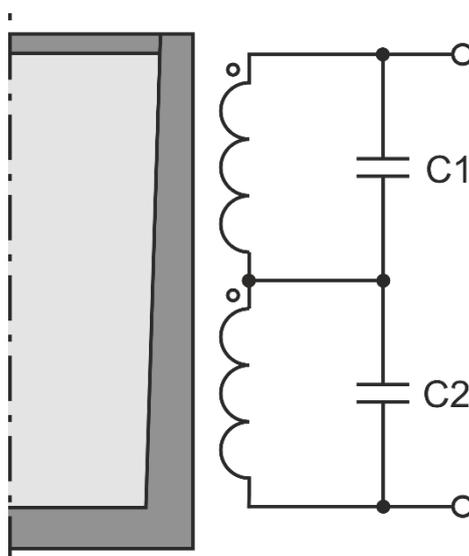


Рисунок 1.5 – Двухконтурная схема питания индуктора тигельной печи

Фокусирование мощности происходит за счет управления величинами реактивной составляющей тока, падением напряжения на секциях, а значит и активной мощностью во вторичном элементе каждой секции при неравномерной компенсации секций индуктора.

В зарубежной практике также используются технологии фокусирования мощности. Например, фирмой Junker (Германия) [9,10] предложена технология «Power-focus», осуществляющая свободное управление распределением мощности по высоте тигля печи, принцип которой в литературе не раскрывается из коммерческих соображений. Однако, данная технология при плавке чугуна позволяет на 10% увеличить производительность по сравнению с аналогичными установками, работающими по классической

технологии выплавки металла. Данная технология также имеет свои преимущества:

- отсутствие окисления стружек (незначительный угар);
- устранение опасности образования зависаний;
- редуцирование опасности приплавления шихты к футеровке;
- гомогенизация ванны относительно температуры и химического состава.

Российскими авторами [11,12,13] предложен трехсекционный индуктор с возможностью перераспределения мощности между секциями индуктора, его схема приведена на рисунке 1.6. Данная схема похожа на схему, представленную на рисунке 1.5, но дает возможность более гибко регулировать распределение мощности между секциями индуктора.

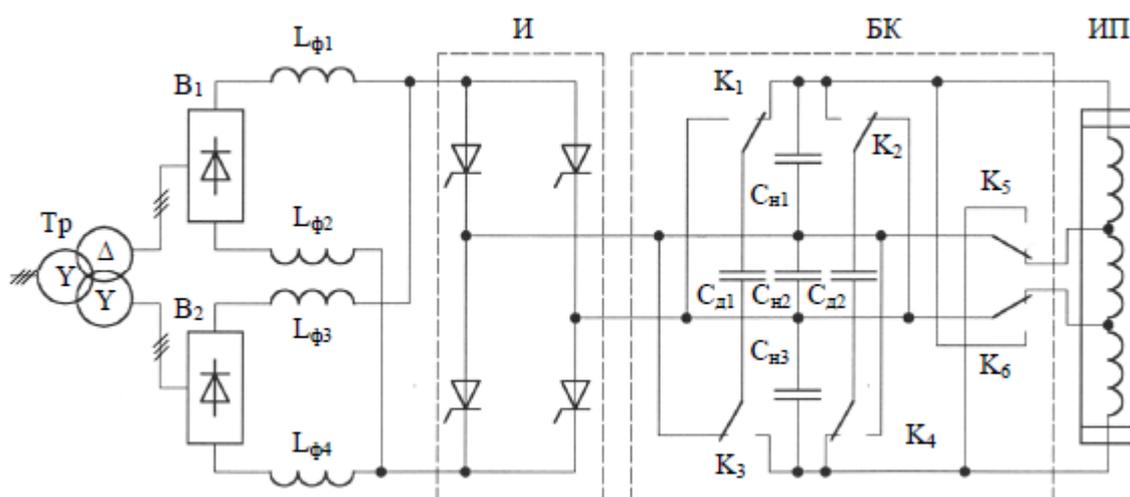


Рисунок 1.6 – Схема питания ИТП с возможностью переключения дополнительных секций конденсаторов

Та же фирма Junker (технология DUOMELT), а также другие зарубежные фирмы, например, Inductoterm (США), предложили технологии TRI-TRAK™ и MULTI-TRAK™ [14,35]. Предполагается использование одного источника питания для более двух печей. Такая технология дает существенное увеличение эффективности использования оборудования по сравнению с комплексами,

построенными по принципу одна печь – один источник питания. Однако в литературе, также в силу коммерческих интересов, не дано описания принципа данных технологий фокусирования мощности.

Подобные технологии фокусирования мощности также разрабатываются и в России. Например, авторами [15] предлагается использование настройки силовых колебательных контуров двух и более печей, включенных последовательно к источнику питания, на различные резонансные частоты. Регулирование же мощности в такой системе осуществляется с помощью регулирования частоты в общей цепи печей резонансным преобразователем частоты, являющимся общим для всех печей источником питания.

Индукторы с двухчастотным питанием. Фирмой Junker [16] была предложена такая технология как «Multi-Frequenz». Предполагающая переключение частоты питающего напряжения на высокую или низкую в зависимости от того происходит плавка или перемешивание металла. Технологии «Multi-Frequenz» имеет следующие достоинства:

- возможность непрерывного введения в ванну мелкокусковых материалов;
- оптимальные условия для корректировки химического состава;
- избежание образования завесаний;
- минимизирование степени засасывания газов;
- минимизация угара;
- снижение расхода электроэнергии;
- оптимальное использование мощности.

Эти и другие [15] исследования показали, что двухчастотное питание очень эффективно при получении нержавеющей и инструментальных сталей, а также для сплавов, имеющих состав металлов с резко дифференцированной плотностью.

Поэтому в настоящее время проектируются двухчастотные преобразователи частоты, для более полной реализации данного метода.

Высокочастотная компонента питающего напряжения представляет однофазный сигнал, а низкочастотная – трехфазный [4,6,17].

В многофазных и многосекционных тигельных печах циркуляция расплава одноконтурная, поэтому перемешивание происходит во всем объеме тигля, а на зеркале расплава практически не возникает мениск.

Бегущее поле, оказывающее силовое воздействие на расплав, создается многофазным током низкой частоты (50 Гц и ниже), а энергия для нагрева передается в загрузку на более высокой частоте, т. е. печь является двухчастотной. Нагрев и перемешивание могут производиться одновременно или поочередно. В первом случае используются отдельные индукторы, однофазный для нагрева и многофазный для перемешивания, оборудованные фильтрами для защиты источника одной частоты от проникновения другой частоты. Во втором случае печь имеет один секционированный индуктор, подключаемый поочередно с соответствующими переключениями к двухчастотным источникам питания.

Использование электромагнитного перемешивателя. Для изменения направления течений расплава и увеличения их скорости используются дополнительные индукторы, создающие бегущее магнитное поле. Металл в тигле начинает двигаться в направлении магнитного поля. Возникают течения, которые перемешивают расплав во всем объеме тигля. На рисунке 1.7 представлена модель такой установки.

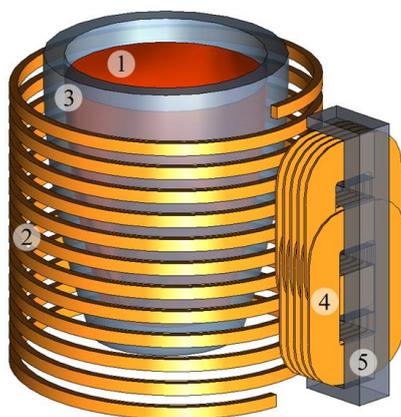


Рисунок 1.7 – Индукционная тигельная печь с индуктором, создающим бегущее магнитное поле

На рисунке 1.7 представлена ИТП с МГД-перемешивателем расплава. Он состоит из тигля 3 с расплавом 1, индуктора 2 и МГД-перемешивателя, состоящего из перекрещивающихся катушек 4 и магнитопровода 5.

При приготовлении расплава в узком диапазоне температур без применения перемешивания, на различных стадиях работы тигельной печи возможен перегрев и застывание металла в тигле, в верхних и нижних слоях соответственно. Применение МГД перемешивателя способствует выравниванию температурного поля во всем объеме тигля, что положительно сказывается на приготовлении сплава. На рисунке 1.8 представлены картины циркуляции расплава.

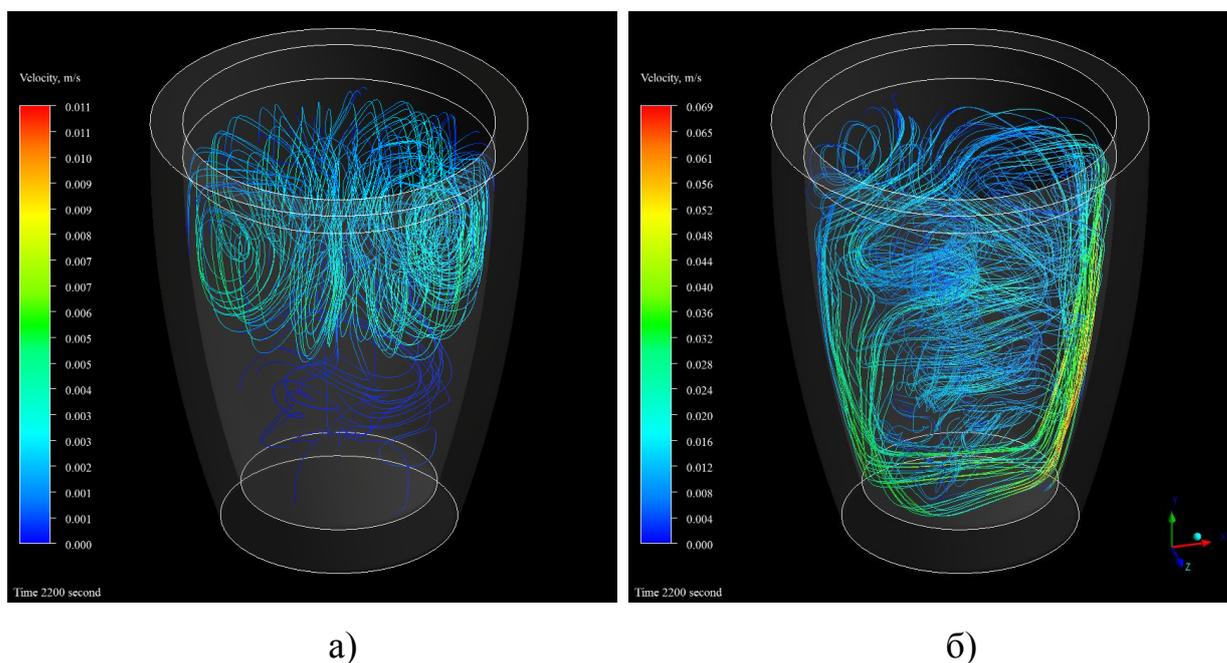


Рисунок 1.8 – Траектория циркуляции расплава: а) – без МГД воздействия; б) – с МГД воздействием

МГД перемешивание в процессе приготовления расплава позволяет повысить качество сплава за счет устранения зон перегрева и застывания

расплава, а также интенсивного массообмена между различными зонами как видно из рисунка 1.8. Это сказывается на химической однородности расплава, от которой в дальнейшем будет зависеть равномерность распределения химических компонентов по длине слитка [18,19].

Также можно использовать донный электромагнитный перемешиватель. По сути это тот же перемешиватель, но расположен он снизу печи. На рисунке 1.9 представлена модель такой печи.

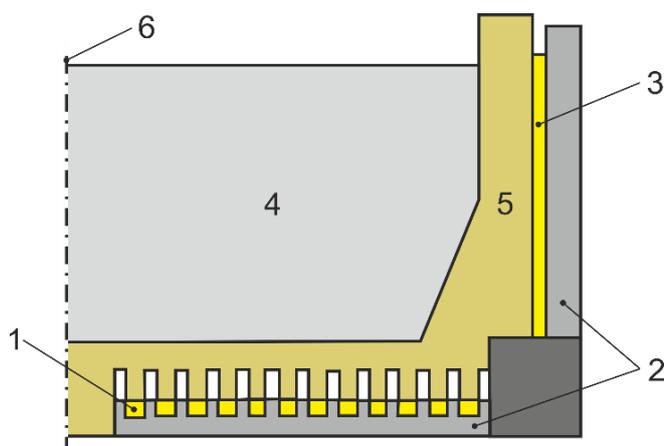


Рисунок 1.9 – Модель тигельной печи с донным электромагнитным перемешивателем

Печь состоит из тигля 5, индуктора печи 3, катушки донного перемешивателя 1 и магнитопроводов 2, в тигле находится металл 4 и указана ось тигля 6. На рисунке 1.10 приведена картина распределения скоростей в расплаве при использовании донного перемешивателя [20].

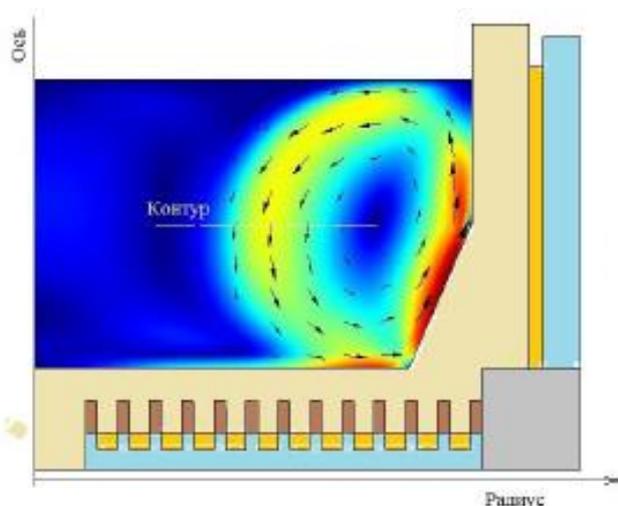


Рисунок 1.10 – Картина распределения скоростей в расплаве

Применение МГД-вращателя расплава. Для изменения направления течений в расплаве и увеличения их интенсивности возможно применение МГД-вращателя. В конструкцию обычной печи добавляется второй индуктор, который состоит из двух катушек(секций). Эти секции между собой соединены встречно, для того, чтобы магнитные потоки, создаваемые ими, были направлены в одну сторону.

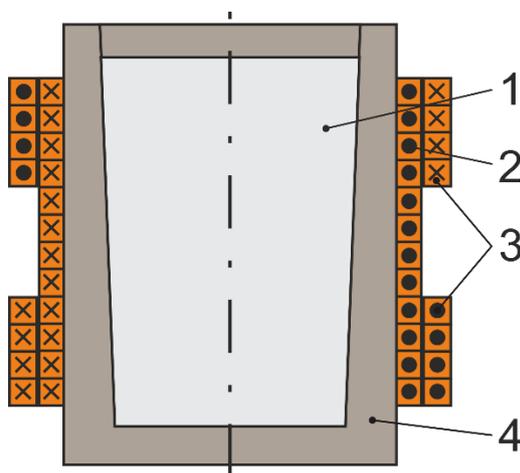


Рисунок 1.11 – Эскиз тигельной печи с МГД-вращателем расплава

На рисунке 1.11 представлен эскиз тигельной печи с МГД-вращателем. Тигель 4 с металлом 1 помещён в основной цилиндрический индуктор 2, выполненный в виде соленоида. На основном индукторе расположен

дополнительный индуктор 3, в виде двух катушек. Запитав основной индуктор 2 синусоидальным током, образуется магнитный поток Φ_1 , направленный параллельно оси симметрии. При питании дополнительных катушек 3 синусоидальным током, сдвинутым по фазе относительно тока основного индуктора, возникает магнитный поток Φ_2 , направленный перпендикулярно оси симметрии. В результате наложения сдвинутых относительно друг друга на 90° в пространстве и по фазе магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 образуется результирующий магнитный поток Φ_{12} , который будет вращаться в области металла с угловой скоростью Ω , приводя жидкий металл в движение [18]. На рисунке 1.12 представлен принцип действия МГД-вращателя.

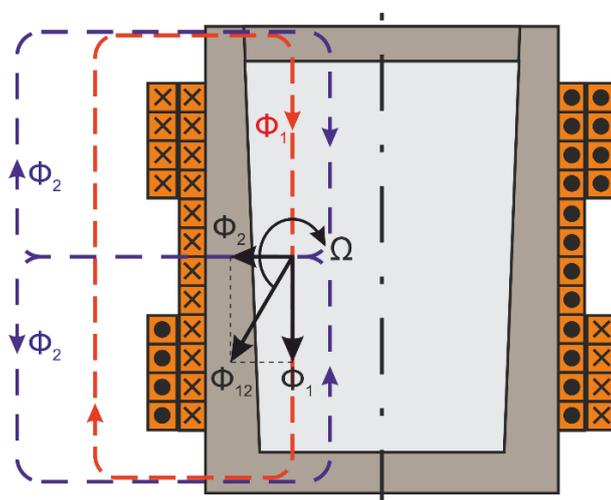


Рисунок 1.12 – Принцип действия МГД-вращателя расплава

В результате вращательного движения возникает однонаправленное движение металла в тигле. На рисунке 1.13 представлена схема движения расплава под действием МГД-вращателя.

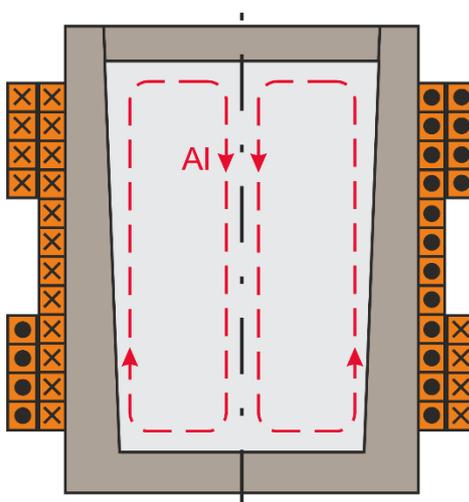


Рисунок 1.13 – Схема движения расплава с МГД-вращателем

Из рисунка 1.13 видно, что за счет такого движения металла происходит интенсивное перемешивание во всем объеме тигля. В центре тигля происходит движение вниз, что хорошо сказывается при добавлении легирующих добавок в расплав.

1.3 Выводы по разделу

1. ИТП имеют ряд достоинств и широко применяются для плавки и приготовления сплавов.
2. В процессе работы ИТП в расплаве присутствует естественная двухконтурная циркуляция, способствующая его перемешиванию.
3. Для интенсификации течений расплава в тигле и управления характером перемешивания используются дополнительные устройства.
4. ИТП с МГД-вращателем позволяет регулировать скорость перемешивания в широком диапазоне и направление течений, имеет простую конструкцию и высокую надежность.

2 Математическое моделирование физических процессов в индукционной тигельной печи

2.1 Общие замечания

В настоящее время на кафедре Электротехнологии и электротехники Политехнического института Сибирского Федерального Университета (СФУ), компьютерное моделирование магнитогидродинамических процессов в промышленных металлургических и подобных устройствах осуществляется с помощью сочетания программных продуктов ANSYS. В СФУ имеется лицензия на версию ANSYS 11.0. Это универсальная программная система в которой используется метод конечных элементов (МКЭ). Эта система очень популярна среди специалистов в сфере автоматизированных инженерных расчетов и конечно-элементного решения линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твердого тела и механики конструкций, задач механики жидкости и газа, теплопередачи и теплообмена, электродинамики, акустики, а также механики связанных полей. Моделирование и анализ в некоторых областях промышленности позволяет избежать дорогостоящих и длительных циклов разработки типа «проектирование — изготовление — испытания».

Суть метода конечных элементов заключается в том, что область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество подобластей (элементов). Точность решения зависит от размеров элементов разбиения, например, там, где точность не важна, можно сетку сделать крупнее. В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения

функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается только возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разреженный вид, что существенно упрощает её решение.

Для выполнения гидродинамического расчета использовался пакет ANSYS CFX. Это программный комплекс, сочетающий уникальные возможности анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков, химической кинетики, горения, радиационного теплообмена и многих других. CFX обеспечивает принципиально новый уровень решения задач вычислительной гидрогазодинамики за счет уникального сочетания технологий, начиная от прямого интерфейса к большинству CAD систем и заканчивая возможностью проводить сопряженный анализ течений и конструкций совместно с ANSYS Multiphysics. Широкий выбор моделей турбулентности в сочетании с линейным решателем и технологией "Algebraic Coupled Multigrid" позволяет добиться высокой точности результатов при решении различного класса задач.

Для создания в ANSYS параметрической модели используется APDL-код. Это параметрический язык ANSYS для автоматизации построения модели с помощью команд. Так можно описав модель, изменять нужные параметры для проведения исследований.

2.2 Электромагнитная задача

Постановка задачи. Моделирование физических процессов, проходящих в тигельной печи начинается с решения электромагнитной задачи. В ходе решения которой, получаем значения электромагнитных сил. На рисунке 2.1 представлен эскиз ИТП с МГД-вращателем.

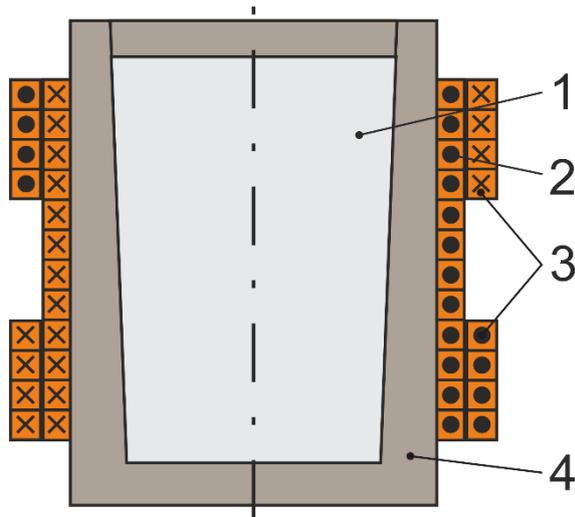


Рисунок 2.1 – Эскиз индукционной тигельной печи с МГД-вращателем

Установка состоит из основного индуктора 2, дополнительных катушек 3, все закреплено на тигле 4, в котором находится расплав 1. Как видно, вся система имеет осевую симметрию, поэтому электромагнитная задача может быть решена в осесимметричной 2D постановке.

В качестве загрузки использовался эвтектический сплав галлия с удельным электрическим сопротивлением $27,2 \cdot 10^{-4}$ Ом · м. Материал индукторов - медь с удельным электрическим сопротивлением $1,72 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Основные допущения электромагнитной задачи:

- электромагнитное поле в расчетной области изменяется по гармоническому закону и в 2D постановке имеет осевую симметрию;
- влияние движения металла в объеме тигля на магнитное поле пренебрегаем.

Математическая модель. Система уравнений, описывающих электромагнитное поле, записанная относительно векторного и скалярного потенциалов (2.1 и 2.2) и уравнения непрерывности (2.3) имеют вид [21,22]:

$$\nabla^2 \cdot A - \nabla \cdot \left(\nabla \cdot A + \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \delta, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \cdot \varphi + \frac{\partial \nabla \cdot A}{\partial t} = -\frac{\rho_q}{\varepsilon_a}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \delta = -\frac{\partial \rho_q}{\partial t}, \quad (2.3)$$

где A – векторный потенциал;

φ – скалярный потенциал неподвижных зарядов;

δ – векторная плотность тока;

ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость;

ρ_q – плотность свободных зарядов;

t – время.

Вектор плотности тока в уравнениях (2.1) и (2.3) определяется выражением:

$$\delta = \gamma \cdot \left(-\nabla \cdot \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A) \right), \quad (2.4)$$

где v – вектор скорости.

Накладывая кулоновскую калибровку ($\nabla \cdot A = 0$) и учитывая отсутствие в расчетной области свободных электрических зарядов ($\rho_q = 0$ и $\varphi = 0$), а также пренебрегая токами смещения, уравнения (2.1 – 2.3) можно записать в следующем виде [23]:

$$\nabla^2 \cdot A = -\mu_a \cdot \delta \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \delta = 0. \quad (2.6)$$

Вектор плотности тока принимает следующий вид:

$$\delta = \gamma \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \cdot A) \right). \quad (2.8)$$

Анализ электромагнитного поля в расчетной области сводится к решению системы уравнений (2.5 – 2.7) в 3D постановке относительно трех компонент векторного потенциала, в 2D постановке относительно азимутальной компоненты векторного потенциала.

С учетом принятых допущений, уравнения можно записать в комплексном виде:

$$\nabla^2 \cdot \dot{A} = -\mu_a \cdot \dot{\delta}; \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \dot{\delta} = 0; \quad (2.10)$$

$$\dot{\delta} = -j \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \dot{A}, \quad (2.11)$$

где $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – циклическая частота электромагнитного поля.

Дополним систему уравнений (2.9 – 2.11) граничными условиями.

Считая, что окружающая среда расчетной области имеет идеальные магнитные свойства ($\mu = 0$), на границах расчетной области будут выполняться условия [39]:

– для касательной составляющей векторного потенциала:

$$\frac{\partial \dot{A}_t}{\partial n} = 0; \quad (2.12)$$

– для нормальной составляющей векторного потенциала:

$$\dot{A}_n = 0, \quad (2.13)$$

где n – нормаль к поверхности расчетной области.

Исходными данными для электромагнитной задачи являются геометрические параметры системы, удельное электрическое сопротивление индуктора, металла загрузки, а также амплитуда и фаза токов, питающих индукторы.

Была создана параметрическая модель в ANSYS. Для лучшей детализации была создана сетка с различным размером элементов в зависимости от области. В расчетной области сетка была более детализированная, чем в области имитации бесконечности. Область имитации бесконечности использовалась для максимального исключения влияния граничных условий на решение задачи и, таким образом, границы расчетной области были значительно удалены от области заготовки и индуктора. Радиус расчетной области равен расстоянию от центральной точки на поверхности области слитка до наиболее удаленной точки области индуктора, увеличенному в 1,5 раза. Радиус области бесконечности равен радиусу расчетной области, увеличенному в 3 раза. При этом размер элементов в области бесконечности увеличивается по мере удаления от расчетной области. Полученная сетка элементов представлена на Рисунок 2.2.

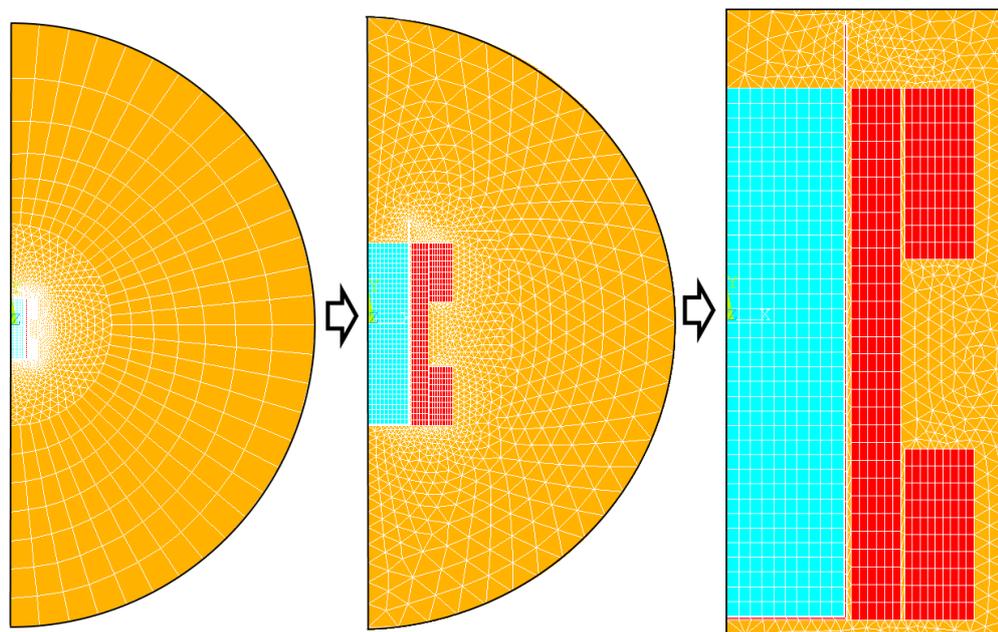


Рисунок 2.2 – Сетка элементов электромагнитной задачи

Для решения электромагнитной задачи в ANSYS использовались элементы PLANE53, предназначенные для расчета магнитного поля относительно векторного магнитного потенциала, записанного в кулоновской калибровке в 2D постановках. Полученный массив сил переводится в гидродинамическую задачу.

2.3 Гидродинамическая задача

Постановка задачи. Следующим этапом математического моделирования является решение гидродинамической задачи на основании результатов, полученных при выполнении электромагнитного расчета. Гидродинамический расчет выполняется только в области заготовки 1 (рисунок 2.1) с заданием требуемых граничных и начальных условий.

Влияние электромагнитного поля на гидродинамику учитывается введением в уравнения движения и энергии, соответствующих источниковых членов, полученных при выполнении электромагнитного расчета.

Гидродинамическая задача, аналогично электромагнитной задаче, может быть решена в осесимметричной 2D постановке. Однако выбор между 2D и 3D постановкой в данном случае будет зависеть не только от геометрии расчетной области, но и от выбора модели турбулентности.

Как показали результаты исследований корректности гидродинамических расчетов, на примере индукционной тигельной печи [24–26], модели турбулентности, основанные на Рейнольдсовом осреднении уравнений Навье-Стокса (RANS), дают результаты достаточной точности с наименьшими затратами вычислительного времени. Наиболее точные результаты, дают модели прямого численного моделирования турбулентности (DNS – Direct Numerical Simulation) [27–29]. Поскольку турбулентность исключительно пространственное явление, использование этих моделей возможно только при

решении переходной задачи в 3D постановке. Использование полной DNS модели в инженерных расчетах неэкономично, так как она требует разрешения даже самых мелких вихрей. В таких случаях применяют прямое численное моделирование с использованием подсеточного моделирования микромасштабной турбулентности (LES – Large Eddy Simulation).

Таким образом, для решения гидродинамической задачи, были приняты следующие допущения:

- модель имеет осевую симметрию и решается в 2D постановке;
- рассчитывается осредненное поле скоростей;
- турбулентность учитывается через решение дополнительных уравнений переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций и удельной скорости диссипации.

Математическая модель. Система уравнений для гидродинамических процессов, состоит из уравнений сохранения массы (2.14), движения (2.15) и энергии (2.16):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot v) = s_m; \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \nabla(\rho \cdot v \cdot v) = -\nabla p + \nabla \tau + \rho \cdot g + s_v; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot H) + \nabla(\rho \cdot v \cdot H) = \nabla(k \cdot \nabla \cdot T) + s_h, \quad (2.16)$$

где s_m , s_v , s_h – источниковые члены уравнения сохранения массы, движения и энергии;

p – давления;

τ – тензор вязких напряжений.

Для учета свободноконвективных движений используется приближение Буссинеска–Обербека [30–33]. В данном приближении зависимость плотности от температуры линеаризуется и учитывается лишь при массовых силах:

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 - \beta \cdot (T - T_0)) \quad (2.17)$$

где ρ_0 – плотность жидкости при температуре T_0 .

Таким образом, жидкость можно рассматривать, как несжимаемую. В качестве источниковых членов уравнений движения и энергии, при решении задач магнитной гидродинамики, служат сила Лоренца $f_{эм}$ и Джоулева энергия $q_{эм}$. С учетом выше сказанного система уравнений (2.14 – 2.16) принимает вид:

$$\nabla v = 0; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \rho \cdot v}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \cdot v \cdot v) = -\nabla p + \nabla \tau + \rho(T) \cdot g + f_{эм}; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho \cdot H}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \cdot v \cdot H) = \nabla(\lambda \cdot \nabla T) + q_{эм}. \quad (2.20)$$

Компоненты тензора вязких напряжений τ определяется как:

$$-\rho_0 \cdot \bar{v}' \cdot \bar{v}' = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\rho_0 \cdot k + \mu_t \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \cdot \delta_{ij}, \quad (2.21)$$

где μ_t – турбулентная вязкость;

k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

Для моделирования турбулентности методом осреднения Рейнольдса использовалась модель переноса касательных напряжений Ментера (SST – Shear Stress Transport) [34,35], эффективно сочетающая надежность и точность описания пристеночных течений от k – ω модели и свободно–сдвиговых течений

от k - ε модели. Это обеспечивается путем суперпозиции этих моделей с введением функции перехода.

Уравнения переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций и удельной скорости диссипации имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_0 \cdot k}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \cdot v \cdot k) = \nabla(\Gamma_k \cdot \nabla \cdot k) + \tilde{G}_k - Y_k + s_k; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \rho_0 \cdot \omega}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \cdot v \cdot \omega) = \nabla(\Gamma_\omega \cdot \nabla \cdot \omega) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + s_\omega, \quad (2.23)$$

где Γ_k , Γ_ω , D_ω , \tilde{G}_k , G_ω , Y_k , Y_ω – эмпирические члены диффузии, генерации и диссипации k и ω модели SST с заложенной функцией переключения набора постоянных, в зависимости от расположения относительно пристеночного течения [34,35];

s_k , s_ω – источниковые члены уравнений переноса k и ω .

В этом случае турбулентная вязкость определяется как:

$$\mu_t = \rho_0 \cdot \frac{k}{\omega} \cdot C, \quad (2.24)$$

где C – эмпирическая постоянная, значение которой также переключается в зависимости от расположения относительно пристеночного течения.

При использовании моделей турбулентности теплопроводность, входящая в выражение (2.16) называется эффективной теплопроводностью и определяется следующим образом:

$$\lambda_{eff} = \lambda + \frac{c \cdot \mu_t}{Pr_t}, \quad (2.25)$$

где Pr_t – турбулентное число Прандтля.

Исходными данными для гидродинамической задачи служат плотность, вязкость и распределение источников членов уравнений движения и энергии. Построение геометрической модели гидродинамической части задачи проводилось в ANSYS CFX.

2.4 Результаты численного моделирования

Расчетная модель была создана в масштабе 1:1 на основе существующей физической модели ИТП с МГД-вращателем. На рисунке 2.3 показана геометрия математической модели.

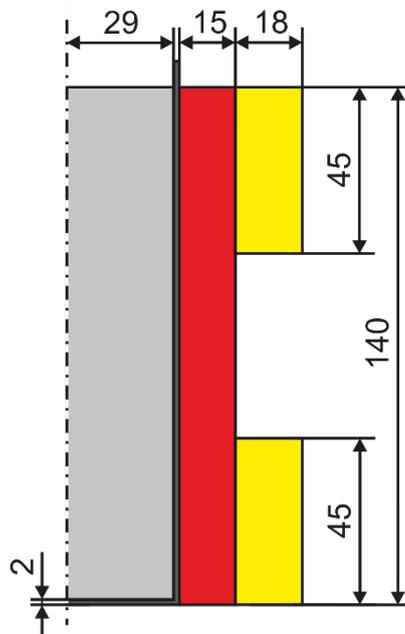


Рисунок 2.3 – Геометрия математической модели

Сначала ток задавался только в основном индукторе, затем постепенно добавлялся и в дополнительных катушках. Прибавка производилась по 25% от тока основного индуктора. В нем значение тока было равно $I_{\text{осн}} = 5$ А. На рисунке 2.4 представлены картины распределения скоростей.

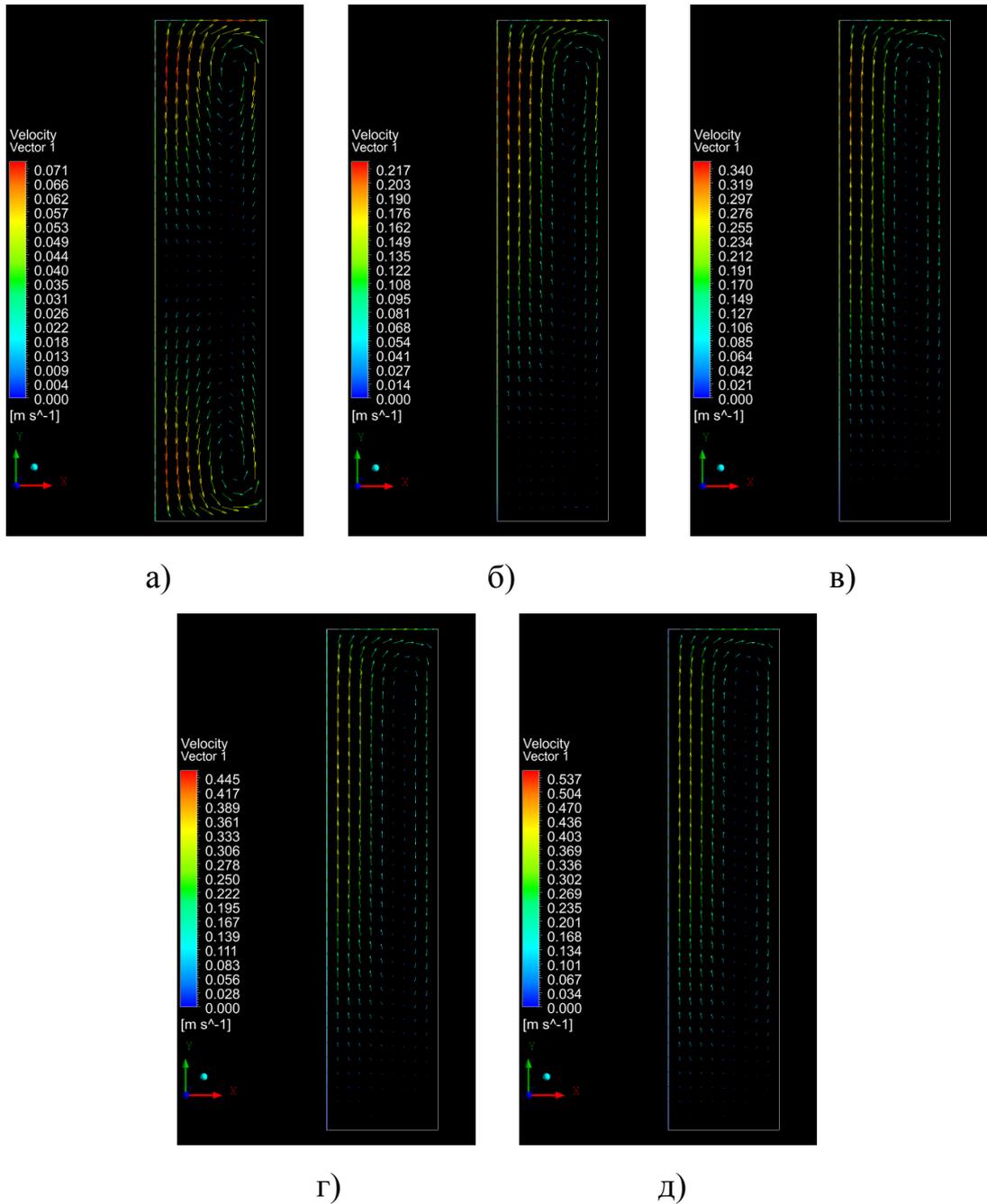


Рисунок 2.4 – Картины распределения скоростей расплава при различных значениях тока в дополнительных катушках: а) 0 А; б) 1.25 А; в) 2.5 А; г) 3.75 А; д) 5 А

Из рисунка 2.4 видно, что с увеличением тока в дополнительных катушках, течение двухконтурной циркуляции постепенно переходит в

одноконтурную циркуляцию, при этом растет скорость течений расплава. Максимальная скорость при использовании дополнительных катушек равна 0.537 м/с, что в 7.5 раз больше, если включен только основной индуктор.

Проведён численный эксперимент по определению скоростей расплава с различной величиной сдвига фаз между током в основном индукторе и током в дополнительной катушке. Картины распределения скоростей представлены на рисунке 2.5.

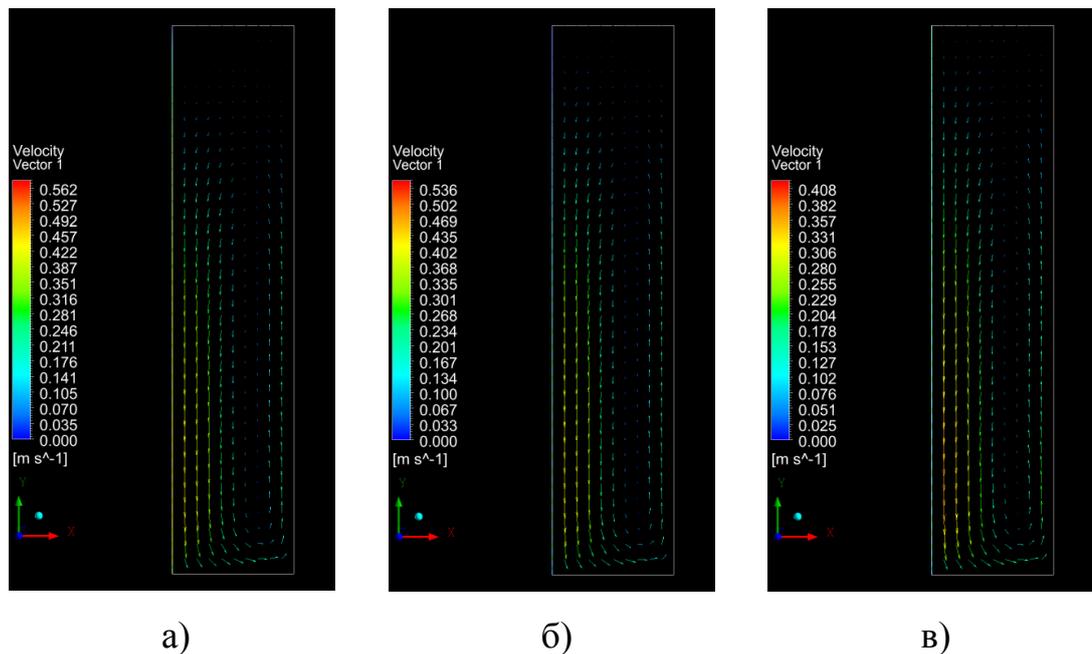
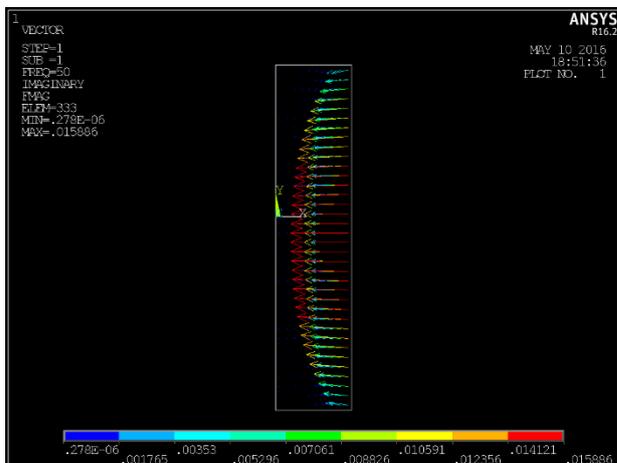


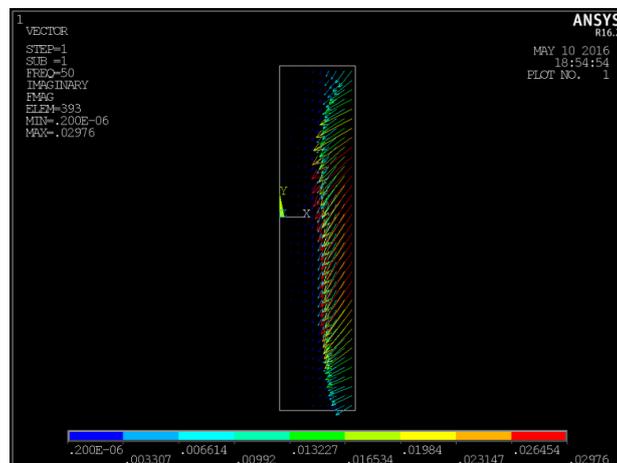
Рисунок 2.5 – Картины распределения скоростей при различных значения сдвига фаз токов: а) 60°; б) 90°; в) 120°

Из рисунка 2.5 видно, что при сдвиге фаз в 60° максимальная скорость увеличилась на 5%, относительно максимальной скорости при сдвиге 90°. При сдвиге 120° максимальная скорость уменьшилась на 24%.

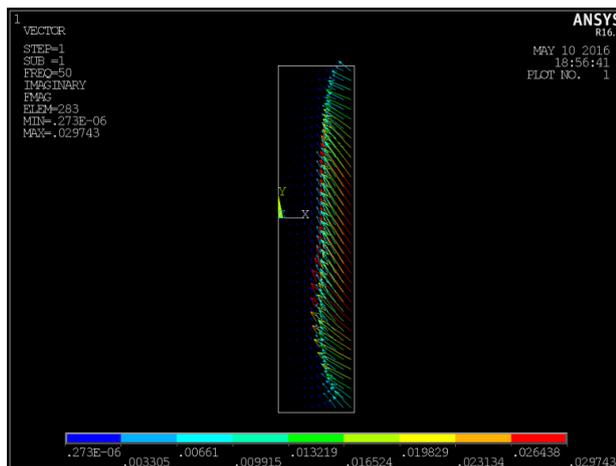
На рисунке 2.6 приведены картины распределения электромагнитных сил в расплаве при отключенных и включенных дополнительных катушках, а также при различных фазовых сдвигах токов.



а)



б)



в)

Рисунок 2.6 – Картины распределения электромагнитных сил в расплаве при различном питании дополнительных катушек: а) 0 А; б) 5 А сдвиг $+90^\circ$; в) 5 А сдвиг -90°

Как следует из представленных картин, при наличии тока в дополнительных катушках картина распределения электромагнитных сил меняется, направление сил, вниз или вверх зависит от сдвига фаз $+90^\circ$ и -90° соответственно. Максимальное значение электромагнитной силы без тока в дополнительных катушках равно 0.016 Н, а с наличием тока равна 0.03 Н, что практически в два раза больше.

2.5 Выводы по разделу

1. Построена параметрическая математическая 2D модель ИТП с МГД-вращателем.
2. Исследовано влияние режимов работы индуктора на электромагнитные и гидродинамические процессы в расплаве.
3. Определены диапазоны регулирования величин скоростей расплава и характера течений в зависимости от схем соединения обмоток и режимов их работы.

3 Экспериментальное исследование физических процессов в индукционной тигельной печи с МГД-вращателем

3.1 Описание физической модели и результаты эксперимента

Следующим этапом исследования было проведение эксперимента на физической модели индукционной тигельной печи с МГД-вращателем. Модель была изготовлена на кафедре ранее. Требовалось её только восстановить и подключить к источнику питания. Индуктор модели состоит из основной катушки и двух дополнительных. Катушки намотаны из медной проволоки диаметром 0.9 мм. Основная катушка имеет две тысячи витков, а дополнительная катушка выполнена из двух секций, в каждой секции восемьсот витков. Тигель физической модели ИТП изготовлен из нержавеющей стали, а в качестве загрузки использован эвтектический сплав галлия. На рисунке 3.1 изображена физическая модель ИТП с МГД-вращателем.



Рисунок 3.1 – Физическая модель индукционной тигельной печи с МГД-вращателем

Для получения вращающегося магнитного поля необходимо наложить два магнитных потока сдвинутых в пространстве и по фазе. Пространственного

сдвига добиваемся за счет расположения секций дополнительной катушки. Фазовый сдвиг обеспечивается путем подключения основной и дополнительной катушки к сети трехфазного напряжения. Основную катушку подключаем к фазному напряжению, а дополнительную катушку подключаем к линейному. На рисунке 3.2 изображена векторная диаграмма трехфазного напряжения. Красным выделен вектор напряжения, к которому подключена основная катушка, а синим выделен вектор напряжения, к которому подключается дополнительная катушка.

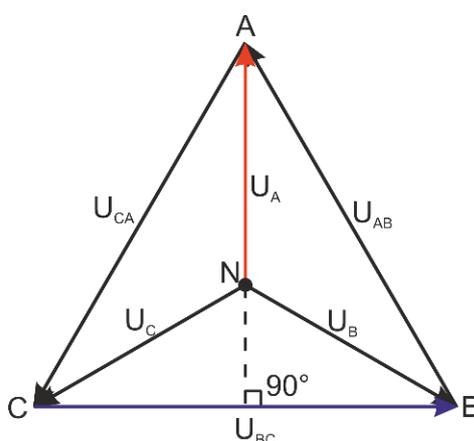


Рисунок 3.2 – Векторная диаграмма трехфазного напряжения

Проводились следующие эксперименты:

1. К сети напряжения подключена только основная катушка.
2. К сети напряжения подключены основная и дополнительная катушки.
3. Изменялась фазировка на дополнительной катушке (реверсирование).

На рисунке 3.3 приведены фотографии картины движения металла в тигле.



а)

б)

в)

Рисунок 3.3 – Картины движения металла в тигле при различном питании дополнительной катушки: а) 0 А; б) 5 А сдвиг $+90^\circ$; в) 5 А сдвиг -90°

Из рисунка 3.3 видно, что при включение дополнительной катушки появляется интенсивное перемешивание металла. Можно управлять направлением движения и скоростью течений, так при одной фазировки получается движение расплава по оси тигля сверху вниз (рисунок 3.3,б), на поверхности образуется впадина. При изменении фазировки дополнительной катушки на противоположное получается движение расплава по оси тигля снизу вверх и на поверхности образуется выпуклость (рисунок 3.3,в). Без включения дополнительной катушки интенсивность перемешивания намного меньше, поверхность расплава остается ровной (рисунок 3.3,а).

3.4 Выводы по разделу

1. Проведенное экспериментальное исследование физических процессов на лабораторной установке ИТП с МГД-вращателем подтвердили характер течений расплава в тигле и возможность управления скоростью и направлением течений.

2. На основе математического и физического моделирования предложена конструкция МГД-вращателя расплава на основе, которого спроектирована и изготовлена литейная установка для получения легированных алюминиевых сплавов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. По результатам обзора литературы выявлено, что ИТП широко применяются в различных отраслях металлургии для плавки и приготовления сплавов. В индукционных печах присутствует естественная двухконтурная циркуляция расплава.

2. Для увеличения интенсивности течений расплава в тигельных печах используется МГД-вращатель. С его помощью в ИТП возникает одноконтурное движение, что хорошо сказывается на перемешивание сплава. Это позволяет приготавливать легированные алюминиевые сплавы высокого качества. Применение МГД-вращателя позволяет регулировать как направление течений, так и их скорость в широком диапазоне. МГД-вращатель имеет простую конструкцию и высокую надежность.

3. Построена параметрическая математическая 2D модель ИТП с МГД-вращателем. Проведенные на ней эксперименты показали, что, применяя МГД-вращатель, можно в несколько раз увеличить скорость течений расплава в ИТП.

4. Исследование физических процессов на лабораторной установке ИТП с МГД-вращателем подтвердили характер течений расплава в тигле и возможность его управления.

5. На основе всех полученных результатов математического и физического моделирования разработана и изготовлена литейная установка для получения легированных алюминиевых сплавов. Установка передана на завод, где будут проводиться последующие испытания МГД-вращателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вайнберг А. Н. Индукционные печи. – М.: Энергия, 1967. – 172 с.
2. Фризен В.Э. Индукционные комплексы для инновационных электрометаллургических технологий. Дис. д-ра. техн. наук: 05.09.10 / В.Э. Фризен. Екатеринбург. – 2014. – 314 с.
3. Иванова Л.И., Грובהва Л.С., Сокунов Б.А., Сарапулов С.Ф. Индукционные тигельные печи: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / Екатеринбург: Изд-во УГТУ - УПИ, 2002. 87 с.
4. Верте Л. А. МГД-технология в производстве черных металлов. – М.: Metallurgy, 1990. – 120 с.
5. Слухоцкий А. Е., Немков В. С., Павлов Н. А., Бамунэр А. В. Установки индукционного нагрева: Учебное пособие для вузов. Под ред А.Е. Слухоцкого. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. – 328 с.
6. Сарапулов Ф. Н., Сарапулов С.Ф., Шымчак П. Математические модели линейных индукционных машин на основе схем замещения. Учебное пособие. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2001. – 236 с.
7. Фарбман С. А., Колобнев И. Ф. Индукционные печи для плавки металлов и сплавов. Издание 5-е дополненное и переработанное. – М.: Metallurgy, 1968. – 496 с.
8. Фомин Н. И., Затуловский Л. М. Электрические печи и установки индукционного нагрева. – М.: Metallurgy, 1979. – 247 с.
9. Кобусинский В., Станек Е. Техничко-экономические эффекты внедрения тигельной индукционной печи средней частоты фирмы Junker на литейном заводе АО MANLE Кротошин // Журнал для литейщиков. – Кротошин, 2003. – с. 56–58.
10. Траузеделъ Д., Шлюкебер Д., Донбах Ф. Реализация специальных технологических и металлургических задач в оптимизированных индукционных печах средней частоты // Бюллетень. Журнал для литейщиков №1. – 2003. – С. 20–23.

11. Лузгин В. И., Петров А. Ю., Сарапулов Ф. Н., Томашевский Д. Н., Фризен В. Э. Исследование режимов работы плавильного комплекса "преобразователь частоты – индукционная тигельная печь" // Сборник докладов VII симпозиума "Электротехника 2010 год. Перспективные виды электрооборудования для передачи и распределения энергии". – Москва, 2003. – с. 181-187.
12. Сарапулов Ф. Н., Сокунов Б. А., Фризен В. Э. Индукционная тигельная печь как электромеханический преобразователь энергии // Сб. тез. научно-практического семинара "Энергосберегающие техника и технологии. – Екатеринбург, 2003. – С. 50.
13. Сарапулов Ф. Н., Фризен В. Э., Сарапулов С. Ф., Лузгин В. И. Управление процессом перемешивания в индукционной тигельной печи // Сборник материалов Всероссийской студенческой олимпиады, научно-практической конференции и выставки студентов, аспирантов и молодых ученых "Энерго- и ресурсосбережение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии". – Екатеринбург, 2001. – С. 91–95.
14. Mortimer J. Tomorrow's Induction Melt Shop Technologies Today // Foundry. – №3. – 1999 pp.
15. Блинов Ю. И., Васильев А. С., Никаноров А. Н. и др. Современные энергосберегающие технологии: Учебное пособие для вузов. – СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2000. – 564 с.
16. Траузеделъ Д., Шлюкебер Д., Донбах Ф. Реализация специальных технологических и металлургических задач в оптимизированных индукционных печах средней частоты // Бюллетень. Журнал для литейщиков №1. – 2003. – С. 20–23.
17. Лузгин В.И., Черных И.В., Фризени В.Э. и др. Исследование воздействия на жидкометаллическую загрузку индукционной тигельной печи электромагнитных полей сложного гармонического состава // Сб. тез. докладов 2-го научно-практического семинара "Проблемы и достижения в промышленной энергетике", Екатеринбург, 2002. с. 46

18. Тимофеев В.Н., Первухин М.В., Хацаюк М.Ю. и др. МГД-технологии в металлургии. Интенсивный курс Специализация IV. – СПб. : СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. – 250 с.
19. М.Ю.Хацаюк. Индукционная установка с МГД воздействием в процессе приготовления и разливки высоколегированных алюминиевых сплавов. Дис. канд. техн. наук: 05.09.01 / М. Ю. Хацаюк. Красноярск. – 2013. – 154 с
20. Болотин К. Е., Фризен В. Э., Швыдкий Е. Л. // Управляемое движение металла в индукционной тигельной печи для получения синтетического чугуна: сб. докл. 4-й междунар. науч.-практ. конф. в рамках выстав. «Энергосбережение. Отопление. Вентиляция. Водоснабжение» / науч. ред. Ф. Н. Сарапулов. – Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2015. – С. 106-109.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Т. II. Теория поля. – 7–е изд., испр. М.: «Наука», – 1988. 512 с.
22. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1964.
23. ANSYS. ANSYS Help system.
24. Baake E., Nacke B., Umbrashko A., and Jakovics A. Large eddy simulation modeling of heat and mass transfer in turbulent recirculated flows // Magnetohydrodynamics. 2003. No. 3. pp. 291-298
25. Baake E., Langejuergen M., Kirpo M., and Jakovics A. Analysis of transient heat and mass transfer processes in the melt of induction channel furnaces using LES 2009. No. 3. pp. 385-392.
26. Kirpo M., Jakovics A., Baake E., and Nacke B. LES study of particle transport in turbulent recirculated liquid metal flows // Magnetohydrodynamics. 2009. No. 3. pp. 439-450.
27. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: «Энергоатомиздат», – 1984. 154 с.

28. Булов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб.: БГТУ, 2001.
29. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin: Springer verlag, 2002.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 48 с.
31. Остроумов Г.А. Свободная тепловая конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952.
32. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
33. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
34. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. 1994. No. 8. pp. 1598-1605.
35. Menter F.R. Ten Years of Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. 2003. No. 4. pp. 625-632.