УДК 519.45

Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания

Николай М. Сучков*
Андрей А. Маньков
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия
Юрий С. Тарасов†
Красноярский филиал международной
академии экологии и природопользования,
Свободный, 60, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 21.06.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 11.10.2011

Изучается группа G подстановок множества натуральных чисел N с конечными параметрами рассеивания. Доказано, что каждое конечное подмножество из G содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A, B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы из G.

Ключевые слова: группа, подстановка, параметр рассеивания.

Введение

Подстановка g непустого множества M называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Очевидно, что все ограниченные подстановки множества M образуют группу. В работах [1–3] изучались группы F и H всех ограниченных подстановок, множества целых чисел Z и множества натуральных чисел N. В частности, доказано, что смешанная группа H представима в виде произведения двух локально конечных подгрупп. Подобная факторизация установлена и для подгруппы K из F, порожденной всеми элементами конечных порядков.

Пусть $M \in \{N, Z\}$, $S(M)$ — группа всех подстановок множества M. Для каждых $\alpha \in M$, $g \in S(M)$ обозначим $M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in M,\ \beta \leqslant \alpha,\ \beta^g > \alpha\}$, $L_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta > \alpha,\ \beta^g \leqslant \alpha\}$. Далее, полагаем

$$t(g) = \max_{\alpha \in M} |M_\alpha(g)|,\ s(g) = \max_{\alpha \in M} |L_\alpha(g)|,\ \lambda(g) = \max_{\alpha \in M}(t(g),\ s(g)).$$

Заметим, что если $M = N$, то в силу определений $M_\alpha(g)$, $L_\alpha(g)$ — конечные множества одного порядка. Следовательно, в этом случае $\lambda(g) = t(g)$. Будем называть $\lambda(g)$ параметром рассеивания подстановки g. Нетрудно понять, что множества

$$G = \{g \mid g \in S(N),\ \lambda(g) < \infty\},\ E = \{g \mid g \in S(Z),\ \lambda(g) < \infty\}$$

*ns7654321@mail.ru
†gigtorus@yandex.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

подстановок с конечными параметрами рассеивания образуют группы. Из легко проверяемого неравенства $\lambda(g) \leqslant \omega(g)$ немедленно следует, что H — подгруппа группы G, а F — подгруппа из E. При этом подстановки группы G и E уже не связаны с расстоянием между точками и их образами, а связаны лишь с естественным упорядочением множеств N и Z. Если, например, $x = (3\,4)(5\,8)\ldots(2^n + 1\ 2^{n+1})\ldots$, то $\lambda(x) = 1$, $\omega(x) = \infty$. Поэтому вновь введенные группы G и E существенно шире групп H и F соответственно.

В настоящей статье начато изучение групп G и E. Напомним, что группа называется локально финитно аппроксимируемой, если каждая её конечно порожденная подгруппа изоморфно вложима в декартово произведение конечных групп. Таковой является, например, любая конечная группа, а также произвольная абелева группа, что не трудно показать с помощью основной теоремы о конечно порожденных абелевых группах. Сформулируем первый результат.

Теорема 1. *Каждая конечно порожденная подгруппа группы G содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A, B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G.*

Пусть $Fin(Z)$ — группа всех финитарных подстановок множества Z. Напомним, что подстановка x множества Z называется финитарной, если множество $\{\alpha \mid \alpha \in Z,\, \alpha^x \neq \alpha\}$ конечно. Очевидно, $Fin(Z)$ — нормальная подгруппа группы $S(Z)$ и $Fin(Z) < E$. Предполагая, что подстановки из G действуют тождественно на $Z \setminus N$, мы получим естественное вложение $G < E$. Обозначим через t инволюцию группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha (\alpha \in Z)$, и заметим, что G^t действует на множестве отрицательных чисел, как группа всех подстановок этого множества с конечными параметрами рассеивания. Понятно, что G и G^t поэлементно перестановочны, тривиально пересекаются, а значит, мы можем образовать прямое произведение $G \times G^t$.

Далее подстановку x группы $S(Z)$ назовем равномерной, если $|M_\alpha(x)| = |L_\alpha(x)| < \infty$ при любом целом α. Обозначим через R множество всех равномерных подстановок. Заметим, что $R \cap E$ не исчерпывает все подстановки из E. Так, например, если d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ $(\alpha \in Z)$, то $|M_\alpha(d)| = 1$, $|L_\alpha(d)| = 0$ при каждом $\alpha \in Z$. Мы установим, что R — группа и верна следующая

Теорема 2. $E \cap R = Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$.

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [4].

1. Предварительные результаты

Здесь мы начнем доказывать теорему 1. Итак, пусть G — группа всех подстановок множества N с конечными параметрами рассеивания, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ — произвольное конечное подмножество группы G. Мы будем предполагать, что T замкнуто относительно взятия обратных элементов, т. е. $T^{-1} = T$. Пусть $\alpha, \beta \in N$ и $\alpha < \beta$. Множество $[\alpha, \beta] = \{\gamma \mid \gamma \in N, \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$ будем называть отрезком целых чисел. Если $V \subset N$, то через V^T будет обозначаться множество $\{m^t \mid m \in V, t \in T\}$.

Зададим некоторые разбиения множества N на отрезки натуральных чисел. Начнем с разбиения $V_1^0, V_1^1, \ldots, V_1^k, \ldots$, которое определим следующим образом: $V_1^0 = [1, 2m_0]$, m_0 — любое натуральное число > 1; $V_1^1 = [2m_0{+}1, 2m_1]$, $m_1 > m_0{+}1$, V_1^1 содержит множество $(V_1^0)^T \setminus V_1^0$; $V_1^2 = [2m_1{+}1, 2m_2]$, $m_2 > m_1{+}1$, V_1^2 содержит множество $(V_1^1)^T \setminus (V_1^0 \cup V_1^1)$; $\ldots$; $V_1^k = [2m_{k-1}{+}1, 2m_k]$, $m_k > m_{k-1}{+}1$, V_1^k содержит множество $(V_1^{k-1})^T \setminus (V_1^{k-2} \cup V_1^{k-1})$; $\ldots$. Непосредственно из определения этих отрезков вытекает

Предложение 1. *Для каждых $k > 1$ выполняется включение*

$$(V_1^k)^T \subset (V_1^{k-1} \cup V_1^k \cup V_1^{k+1}).$$

Следующее разбиение множества N получается из предыдущего объединением каждых трех последовательных отрезков, т.е. для $k = 0, 1, 2, \ldots$ полагаем

$$V_2^k = V_1^{3k} \cup V_1^{3k+1} \cup V_1^{3k+2}. \tag{1}$$

Рассмотрим еще два разбиения множества N, которые тесно связаны с предыдущими. Первое из них зададим отрезками $W_1 = [1, m_0]$, $U_1^1 = [m_0 + 1, m_0 + m_1]$, $U_1^2 = [m_0 + m_1 + 1, m_1 + m_2]$, $\ldots$, $U_1^k = [m_{k-2} + m_{k-1} + 1, m_{k-1} + m_k]$, $\ldots$. Второе разбиение получается из первого следующим образом:

$$W_2 = W_1 \cup U_1^1,\ U_2^1 = U_1^2 \cup U_1^3 \cup U_1^4,\ \ldots,\ U_2^k = U_1^{3k-1} \cup U_1^{3k} \cup U^{3k+1},\ \ldots . \tag{2}$$

Сформулируем два предложения, которые являются очевидными следствиями вышеизложенных разбиений.

Предложение 2. *При всех натуральных k отрезок U_1^k состоит из правой половины отрезка V_1^{k-1} и левой половины отрезка V_1^k.*

Предложение 3. *При всех натуральных k отрезок U_2^k состоит из непересекающихся отрезков $U_2^k \cap V_2^{k-1}$ и $U_2^k \cap V_2^k$, первый из которых является объединением отрезка V_1^{3k-1} и правой половины отрезка V_1^{3k-2}, а второй — объединением отрезка V_1^{3k} и левой половины отрезка V_1^{3k+1}.*

Положим $B_2 = \{x \mid x \in G,\ (V_2^k)^x = V_2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$, $A_2 = \{x \mid x \in G,\ (W_2 \cup U_2^1)^x = W_2 \cup U_2^1,\ (U_2^k)^x = U_2^k\ (k > 1)\}$. Очевидно, B_2, A_2 — подгруппы группы G. Установим важный вспомогательный результат.

Лемма 1. $T \subset B_2 A_2$.

Доказательство. Пусть t — произвольный элемент множества T. Определим подстановку $a \in A_2$ действием на компонентах разбиения (2) множества N, элементы которого мы будем записывать в виде $\alpha^t (\alpha \in N)$. Если $\alpha^t \in W_2$, то полагаем $(\alpha^t)^a = \alpha^t$. Фиксируем некоторое натуральное k и определим действие a на отрезке U_2^k. Обозначим через γ правый конец отрезка V_2^{k-1}, и пусть $\alpha_1^t, \ldots, \alpha_m^t$ — все такие натуральные числа отрезка $[1, \gamma]$, что $\alpha_1 > \gamma, \ldots, \alpha_m > \gamma$. Так как t — подстановка, а отрезок натуральных чисел $[1, \gamma]$ конечен, то найдутся точно m натуральных чисел $\beta_1, \ldots, \beta_m$ этого отрезка, для которых $\beta_1^g > \gamma, \ldots, \beta_m^g > \gamma$. В силу предложений 1–3 и равенства (2) все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $\alpha_1^t, \ldots, \alpha_m^t$, $\beta_1^t, \ldots, \beta_m^t$ содержатся в U_2^k. Полагаем $(\alpha_i^t)^a = \beta_i^t$, $(\beta_i^t)^a = \alpha_i^t$, $(i = 1, ..., m)$ и a действует тождественно на остальных точках отрезка U_2^k. Непосредственно из определения параметра рассевания выводим, что $m \leqslant \lambda(t)$, а значит, $\lambda(a) \leqslant \lambda(t)$. Отсюда выводим, что $a \in A_2$.

Заметим теперь, что в силу определения подгруппы B_2 она содержит элемент $b = ta$. Таким образом, $t = ba^{-1} \in B_2 A_2$. Следовательно, $T \subset B_2 A_2$, и лемма доказана. □

2. Факторизация

Продолжим доказательство теоремы 1. Для каждого натурального n определим индуктивно разбиение множества натуральных чисел N на попарно непересекающиеся отрезки $V_n^0, V_n^1, \ldots, V_n^k, \ldots$. При $n = 1, 2$ эти разбиения определены выше. Пусть $k > 2$. Полагаем

$$V_n^0 = V_{n-1}^0 \cup V_{n-1}^1 \cup V_{n-1}^2,\ \ldots,\ V_n^k = V_{n-1}^{3k} \cup V_{n-1}^{3k+1} \cup V_{n-1}^{3k+2},\ \ldots . \tag{3}$$

Наконец, исходя из разбиения (2), зададим индуктивно при каждом $n > 2$ разбиение N на попарно непересекающиеся отрезки целых чисел

$$W_n = W_{n-1} \cup U^1_{n-1},\ U^1_n = U^2_{n-1} \cup U^3_{n-1} \cup U^4_{n-1},\ \ldots,\ U^k_n = U^{3k-1}_{n-1} \cup U^{3k}_{n-1} \cup U^{3k+1}_{n-1},\ \ldots. \quad (4)$$

Из предложений 2, 3 и построений (3), (4) непосредственно вытекает

Предложение 4. *Для каждых натуральных k и $n > 1$ отрезок U^k_n разбивается на два отрезка $U^k_n \cap V^{k-1}_n$ и $U^k_n \cap V^k_n$. В свою очередь, первый из этих отрезков есть объединение отрезков V^{3k-1}_{n-1} и $V^k_n \cap V^{3k-2}_{n-1}$, а второй — объединение отрезков V^{3k}_{n-1} и $U^k_n \cap V^{3k+1}_{n-1}$.*

Для $n > 2$ определим подгруппы

$$A_n = \{g \mid g \in G,\ (W_n \cup U^1_n)^g = W_n \cup U^1_n,\ (U^k_n)^g = U^k_n\ (k > 1)\},$$

$$B_n = \{g \mid g \in G,\ (V^k_n)^g = V^k_n,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Лемма 2. *$A_{n-1} < A_n$, $B_{n-1} < B_n$, $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ при всех $n>2$.*

Доказательство. Первые два вложения прямо следуют из равенств (3), (4) и определения данных подгрупп. Установим третье включение. Пусть $a \in A_{n-1}$, $b \in B_{n-1}$. Фиксируем натуральные $n > 2$, $k \geqslant 1$ и обозначим через γ правый конец отрезка V^{k-1}_n. Если $\alpha < \gamma$, $\alpha^{ab} \geqslant \gamma$, то $\alpha \in (U^k_n \cap V^{k-1}_n)$ в силу определения подгрупп A_{n-1}, B_{n-1}, равенств (3), (4) и предложения 4. Аналогично, если $\beta \geqslant \gamma$, $\beta^{ab} < \gamma$, то $\beta \in (U^k_n \cap V^k_n)$. Положим, для краткости $c = ab$, $M^k_n = U^k_n \cap V^{k-1}_n$, $L^k_n = U^k_n \cap V^k_n$. Определим подстановку $x \in A_n$ действием на компонентах разбиения (4) множества N. Считаем, что x действует тождественно на отрезке W_n. Далее нам будет удобно записывать натуральные числа в виде $\alpha^c (\alpha \in N)$. Пусть $\alpha^c_1, \ldots, \alpha^c_m$ — все числа отрезка M^k_n, для которых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L^k_n$. Поскольку c — подстановка, а $[1, \gamma]$ — конечное множество, то в силу вышеизложенного найдутся точно m натуральных чисел $\beta^c_1, \ldots, \beta^c_m$ отрезка L^k_n, для которых $\beta_1, \ldots, \beta_m \in M^k_n$. Полагаем теперь $(\alpha^c_i)^x = \beta^c_i$, $(\beta^c_i)^x = \alpha^c_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, и x действует тождественно на всех остальных точках отрезка U^k_n. Поскольку m не превосходит параметра рассеивания $\lambda(c)$, то $x \in A_n$. В силу определения подстановки x заключаем, что элемент cx оставляет на месте все компоненты разбиения (3), а потому $cx = abx = y \in B_n$. Таким образом, $ab = yx^{-1} \in B_nA_n$. Это доказывает лемму 2. □

Согласно лемме 2 мы можем рассмотреть две возрастающие цепочки подгрупп $A_2 < A_3 < \cdots < A_n < \ldots$, $B_2 < B_3 < \cdots < B_n < \ldots$. Обозначим через A объединение подгрупп первой цепочки, а через B — второй.

Лемма 3. *A, B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G, $Q = AB$ — подгруппа группы G.*

Доказательство. Действительно, в силу определения подгруппы A каждое её конечное подмножество содержится в некоторой подгруппе A_n группы G. Снова согласно определению A_n является подгруппой группы D_n всех подстановок множества N, которые оставляют на месте конечные отрезки натуральных чисел (4), составляющих разбиение множества N. Но тогда D_n изоморфна декартову произведению конечных групп. Таким образом, A — локально финитно аппроксимируемая группа. Подобными рассуждениями устанавливается, что этим свойством обладает и группа B.

Далее по лемме 2 $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ при всех $n > 2$. Отсюда непосредственно выводим, что $AB \subset BA$. Исходя из этого включения нетрудно установить и обратное включение. В самом деле, мы имеем $(AB)^{-1} \subset (BA)^{-1}$, т. е. $B^{-1}A^{-1} \subset A^{-1}B^{-1}$ и $BA \subset AB$. Таким образом, $Q = AB = BA$ — подгруппа группы G, и лемма доказана. □

Теорема 1 является непосредственным следствием лемм 1–3.

3. Равномерная рассеиваемость

Здесь мы докажем теорему 2. Напомним, что через R мы обозначили множество всех таких подстановок $g \in S(Z)$, для которых множества $M_\alpha(g)$, $L_\alpha(g)$ конечны и имеют одинаковый порядок при любом $\alpha \in Z$. Установим сначала вспомогательный результат.

Лемма 4. *Пусть α, β, γ, $\in Z$ и $\beta \leqslant \alpha < \gamma$. Тогда для любой равномерной подстановки g и инволюции $x = (\beta\gamma)$ выполняется равенство*

$$|M_\alpha(yx)| = |L_\alpha(yx)|.$$

Доказательство. Обозначим $\beta_1 = \beta^{y^{-1}}$, $\gamma_1 = \gamma^{y^{-1}}$. Так как x действует тождественно на $Z \setminus \{\beta, \gamma\}$, то образы подстановок y и yx различны лишь для точек β_1, γ_1. При этом $\beta_1^y = \beta$, $\beta_1^{yx} = \gamma$, $\gamma_1^y = \gamma$, $\gamma^{yx} = \beta$. Поэтому непосредственно проверяются следующие утверждения:

1) $\beta_1, \gamma_1 \leqslant \alpha \Rightarrow M_\alpha(yx) = (M_\alpha(y) \cup \{\beta\}) \setminus \{\gamma_1\}$, $L_\alpha(yx) = L_\alpha(y)$;

2) $\beta_1, \gamma_1 > \alpha \Rightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y)$, $L_\alpha(yx) = (L_\alpha(y) \cup \{\gamma_1\}) \setminus \{\beta_1\}$;

3) $\beta_1 \leqslant \alpha < \gamma_1 \Rightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y) \cup \{\beta_1\}$, $L_\alpha(yx) = L_\alpha(y) \cup \{\gamma_1\}$;

4) $\gamma_1 \leqslant \alpha < \beta_1 \Rightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y) \setminus \{\gamma_1\}$, $L_\alpha(yx) = L_\alpha(y) \setminus \{\beta_1\}$.

В силу условия $|M_\alpha(y)| = |L_\alpha(y)|$, и лемма 4 вытекает из утверждений 1)–4) очевидным образом. □

Лемма 5. *R — группа.*

Доказательство. Пусть $g, h \in R$. Так как

$$M_\alpha(g^{-1}) = (L_\alpha(g))^g,\ L_\alpha(g^{-1}) = (M_\alpha(g))^g,$$

то $g^{-1} \in R$. Очевидно, что $M_\alpha(gh) \subset (M_\alpha(g) \cup M_\alpha(h))$, а значит, $|M_\alpha(gh)| < \infty$ при любом целом α. Зафиксируем $\alpha \in Z$ и докажем, что $|M_\alpha(gh)| = |L_\alpha(gh)|$ индукцией по $|M_\alpha(h)|$. Если $|M_\alpha(h)| = 0$, то $M_\alpha(gh) = M_\alpha(g)$, $L_\alpha(gh) = L_\alpha(g)$. Следовательно, база для индукции есть. Пусть $|M_\alpha(h)| > 0$ и $\gamma_1 \in M_\alpha(h)$, $\beta_1 \in L_\alpha(h)$, $\gamma = \gamma_1^h$, $\beta = \beta_1^h$. Тогда $\beta \leqslant \alpha < \gamma$. Если $x = (\beta\gamma)$, то по утверждению 4) из доказательства леммы 4 $|M_\alpha(hx)| = |M_\alpha(h)| - 1$. По индуктивному предположению $|M_\alpha(y)| = |L_\alpha(y)|$ для $y = g(hx)$. Теперь согласно лемме 4 $|M_\alpha(yx)| = |L_\alpha(yx)|$. Но $yx = gh$. Итак, $gh \in R$. □

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы 2. Очевидно, $Fin(Z) < (E \cap R)$. Так как элементы группы G действуют тождественно на $Z \setminus N$, то $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| = 0$ для каждых $\alpha \in (Z \setminus N)$, $g \in G$, а если $\alpha \in N$, то $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| \leqslant \lambda(g)$. Следовательно, $G < (E \cap R)$. Далее, прямая проверка показывает, что $\beta \in M_\alpha(g) \Leftrightarrow -\beta \in L_{-\alpha-1}(g^t)$ и $\beta \in L_\alpha(g) \Leftrightarrow -\beta \in M_{-\alpha-1}(g^t)$. Отсюда выводим, что $G^t < (E \cap R)$. Таким образом, нами установлено включение $Fin(Z) \cdot (G \times G^t) < (E \cap R)$.

Установим обратное включение. Пусть x — произвольная подстановка из пересечения $(E \cap R)$. Из определения групп E и R следует, что множество $M_0(x)$ конечно и $|M_0(x)| = |L_0(x)|$. Если $M_0(x) = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, $L_0(x) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$, то обозначим $y = (\beta_1^x\gamma_1^x) \cdot \ldots \cdot (\beta_r^x\gamma_r^x)$. Ясно, что $y \in Fin(Z) \leqslant (E \cap R)$ и $M_0(xy) = L_1(xy) = \phi$. Если xy стабилизирует 0, то $xy = g_1g_2$, где подстановка g_1 действует тождественно на $Z \setminus N$ и $\alpha^{g_1} = \alpha^{xy}$ для $\alpha \in N$; подстановка g_2 действует тождественно на $N \cup \{0\}$ и $\beta^{g_2} = \beta^{xy}$ для каждого отрицательного β. Но тогда из определений групп G и G^t следует, что $g_1 \in G$, $g_2 \in G^t$, а потому $x \in Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$. Если же $0^{xy} = \alpha_0$ и $\alpha_0 \neq 0$, то, рассматривая вместо y подстановку $y_1 = y(0\alpha_0) \in Fin(Z)$, мы, подобно вышеизложенному, установим обратное включение. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00509-а и 09-01-00395).

Список литературы

[1] Н.М.Сучков, Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами, *Алгебра и логика*, **23**(1984), №5, 573–577.

[2] Н.М.Сучков, О подгруппах произведения локально конечных групп, *Алгебра и логика*, **24**(1985), №4, 408–413.

[3] Н.М.Сучков, Н.Г.Сучкова, О группах ограниченных подстановок. *Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика*, **3**(2010), №2, 262–266.

[4] М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, М., Наука, 1982.

On Permutation Groups with Finite Parameters of Dispersion

Nikolai M. Suchkov
Andrey A. Mankov
Yury S. Tarasov

We study the permutation group G of set natural numbers N with finite parameters of dispersion. We give proof, that every finite subset of G lies in a subgroup $Q = AB$, where A, B is a local finite approximated subgroups of G.

Keywords: group, permutation, parameter of dispersion.