

УДК 512.54

Стационарное течение трех жидкостей в плоском слое под действием термокапиллярных сил и перепада давления

Елена Н. Лемешкова*

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.06.2011, окончательный вариант 18.08.2011, принята к печати 18.10.2011

Исследовано однонаправленное движение трех вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Найдено точное стационарное решение задачи.

Ключевые слова: термокапиллярность, поверхность раздела, стационарное течение.

1. Постановка задачи

Рассматривается движение трех несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей в плоских слоях (рис. 1).

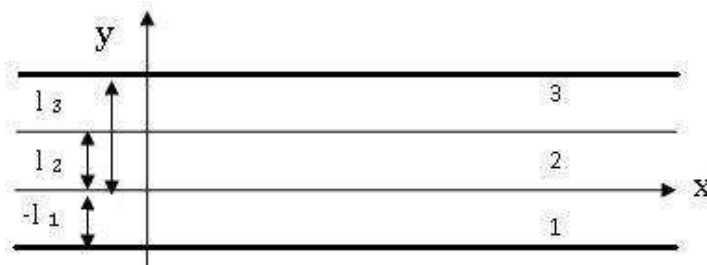


Рис. 1. Схема области течения

В качестве основной модели движения вязкой жидкости будем использовать уравнения Навье–Стокса без учета внешних сил:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j &= \nu_j \Delta \mathbf{u}_j; \\ \frac{d\Theta_j}{dt} &= \chi_j \Delta \Theta_j; \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u}_j, p_j — соответственно вектор скорости и давление, Θ_j — отклонения от среднего значения температуры, ρ_j — плотность, ν_j — кинематическая вязкость, $\mu = \nu \rho$ — динамическая вязкость, χ_j — температуропроводность, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$.

*lena_lemeshkova@mail.ru

При рассмотрении однонаправленного стационарного движения в плоских слоях $-l_1 < y < 0$, $0 < y < l_2$, $l_2 < y < l_3$ с общей границей раздела $y = 0$, $y = l_1$ и твердыми стенками $y = -l_1$, $y = l_3$ будем предполагать, что вектор скорости имеет вид $\mathbf{u}_j = (u_j(y), 0, 0)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда давление в каждой из жидкостей представимо в виде $p_j = \rho_j f_j x + \alpha$ с произвольными $f_j(t)$, $\alpha_j > 0$, а температура — $\Theta_j = -A_j x + T_j(y)$. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела линейно зависит от температуры: $\sigma_j(\Theta) = \sigma_j^0 - \alpha_j(\Theta_j - \Theta_j^0)$, $\alpha_j, \sigma_j^0, \Theta_j^0 = \text{const} > 0$, $j = 1, 2, 3$. После подстановки в уравнения (1) функции $u_j(y)$, $T_j(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$u_{jyy} = f_j/\nu_j, T_{jyy} = -\frac{A}{\chi_j} u_j. \quad (2)$$

Условия непрерывности скорости и температуры на поверхностях раздела (в общем виде условия на поверхности раздела приведены в [1])

$$\begin{aligned} u_1(0) = u_2(0), u_2(l_2) = u_3(l_2), \\ T_1(0) = T_2(0), T_2(l_2) = T_3(l_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, равны потоки тепла

$$k_1 T_{1y}(0) = k_2 T_{2y}(0), k_2 T_{2y}(l_2) = k_3 T_{3y}(l_2), \quad (4)$$

и имеется скачок касательных напряжений

$$\mu_2 u_{2y}(0) - \mu_1 u_{1y}(0) = A \alpha_1, \mu_3 u_{3y}(l_2) - \mu_2 u_{2y}(l_2) = A \alpha_2, \quad (5)$$

где k_j — коэффициенты теплопроводностей.

Из условия для нормальных напряжений при $y = 0$; l_2 следуют равенства градиентов давления в слоях $\rho_1 f_1 = \rho_2 f_2 = \rho_3 f_3$.

Так как стенки $y = -l_1$, $y = l_3$ твердые и неподвижные, то условия прилипания запишутся в виде

$$u_1(-l_1) = 0, u_3(l_3) = 0. \quad (6)$$

Будем считать, что на твердых стенках приложен только постоянный градиент температуры, то есть

$$T_1(-l_1) = 0, T_3(l_3) = 0. \quad (7)$$

Во втором уравнении из (2) $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$ (это следствие равенства температур при $y = 0$ и $y = l_2$).

2. Решение стационарной задачи

Интегрируя уравнения (2) по y , получим

$$u_j = \frac{f_j}{2\nu_j} y^2 + c_j^1 y + c_j^2, \quad T_j = -\frac{A}{\chi_j} \left(\frac{f_j}{24\nu_j} y^4 + \frac{c_j^1}{6} y^3 + \frac{c_j^2}{2} y^2 \right) + c_j^3 y + c_j^4. \quad (8)$$

Постоянные c_j^1 , c_j^2 , c_j^3 и c_j^4 определим из граничных условий (3) — (7) и, после некоторых вычислений, найдем представления для скоростей:

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= \frac{\rho_1 f_1 l_3^2}{2\mu_1} \left[\bar{l}_1^{-2} \xi^2 + \bar{l}_1 B(\xi + 1) - \bar{l}_1^{-2} \right] + \frac{\nu_1}{l_1} a_1(\xi + 1); \\ u_2(\xi) &= \frac{\rho_1 f_1 l_3^2}{2\mu_1} \left[\bar{l}_1^{-2} \bar{\mu}_1 \xi^2 + \bar{l}_1 B(\bar{\mu}_1 \xi + 1) - \bar{l}_1^{-2} \right] + \frac{\nu_1}{l_1} (a_2 \xi + a_1); \\ u_3(\xi) &= \frac{\rho_1 f_1 l_3^2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{2\mu_1} \left[\bar{l}_1^{-2} \xi^2 + B(\bar{l}_1 \xi - 1) - 1 \right] + \frac{\nu_1 a_3}{l_1} \left(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

и температур

$$\begin{aligned}
T_1(\xi) &= -\frac{A\rho_1 f_1 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \mu_1} \left[\frac{\bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6} \xi^3 + \frac{\bar{l}_1 (B - \bar{l}_1)}{2} \xi^2 + \frac{b_1}{\delta_2} (\xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \frac{5\bar{l}_1^2}{12} \right] + \\
&+ \frac{Al_1 \nu_1}{\chi_1} \left[-\frac{a_1}{6} (\xi^3 + 3\xi^2 - 2) + \frac{b_2}{\delta_2} (\xi + 1) \right]; \\
T_2(\xi) &= -\frac{A\rho_1 f_1 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \mu_1} \left[\frac{\bar{\chi}_1 \bar{\mu}_1 \bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{\mu}_1 \bar{l}_1 B}{6} \xi^3 + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_1 (B - \bar{l}_1)}{2} \xi^2 + \frac{b_1}{\delta_2} (\bar{k}_1 \xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \right. \\
&+ \left. \frac{5\bar{l}_1^2}{12} \right] + \frac{Al_1 \nu_1}{\chi_1} \left[-\frac{\bar{\chi}_1}{6} (a_2 \xi^3 + 3a_1 \xi^2) + \frac{b_2}{\delta_2} (\bar{k}_1 \xi + 1) + \frac{a_1}{3} \right]; \\
T_3(\xi) &= -\frac{A\rho_1 f_1 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \mu_1} \left[\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \left(\frac{\bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6} \xi^3 - \frac{(B+1)}{2} \xi^2 \right) + b_3 \xi + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2}{3\bar{l}_1^2} \left(\frac{5}{4} + B \right) - \frac{b_3}{\bar{l}_1} \right] + \\
&+ \frac{Al_1 \nu_1}{\chi_1} \left[-\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{6} (\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1}) + \left(\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_2}{\delta_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) \right) \right) \xi \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_2}{\delta_2 \bar{l}_1} - \right. \\
&- \left. \frac{1}{\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2 \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) + \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1} \right) \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\xi = y/l_1$, $\bar{l}_1 = l_1/l_3$, $\bar{l}_2 = l_2/l_3$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$, $\bar{k}_1 = k_1/k_2$, $\bar{k}_2 = k_2/k_3$, $\bar{\chi}_1 = \chi_1/\chi_2$, $\bar{\chi}_2 = \chi_1/\chi_3$, M_1, M_2 — числа Марангони,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{A\alpha_1 \bar{l}_1^2}{\nu_1 \mu_2}, \quad M_2 = \frac{A\alpha_2 \bar{l}_1^2}{\nu_1 \mu_2}, \quad B = \frac{-\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 - \bar{l}_2^2) - \bar{\mu}_1 \bar{l}_2^2 + \bar{l}_1^2}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 - \bar{l}_2) + \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1}, \\
\delta_1 &= \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{l}_2 - 1) - \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 - \bar{l}_1, \quad \delta_2 = \bar{k}_1 \bar{k}_2 (1 - \bar{l}_2) + \bar{k}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1, \\
a_1 &= \frac{1}{\delta_1} \left[(\bar{l}_2 + \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_2 \bar{l}_2) M_1 + (1 - \bar{l}_2) \bar{\mu}_2 M_2 \right], \quad a_2 = -\frac{1}{\delta_1} \left[\bar{l}_1 M_1 + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{l}_2 - 1) M_2 \right], \\
a_3 &= -\frac{\bar{\mu}_2}{\delta_1} \left[\bar{l}_1 M_1 + (\bar{l}_1 + \bar{\mu}_1 \bar{l}_2) M_2 \right], \\
b_1 &= \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} (1 - \bar{l}_2) \left(\frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + B + 1 + \frac{\bar{k}_2 \bar{\chi}_1 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} (\bar{l}_2 - 1) (\bar{\mu}_1 \bar{l}_2 \left(\frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + \bar{l}_1 (B - \bar{l}_1)) + \\
&+ \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2}{3\bar{l}_1} (B + \frac{5}{4}) + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \bar{l}_2^2}{2\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{3} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} + B \right) - (B + 1) \right) + \frac{\bar{l}_1^2}{3} (B - \frac{5\bar{l}_1}{4}) - \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_2^2}{2} \left(\frac{\bar{\mu}_1 \bar{l}_2}{3\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} + B \right) + \right. \\
&+ \left. (B - \frac{2}{\bar{l}_1}) \right), \\
b_2 &= \frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) (\bar{l}_2 - 1) - \frac{\bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) (\bar{l}_2 - 1) - \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_2^2}{2\bar{l}_1} \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{3\bar{l}_1} \right) - \\
&- \frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2^2 a_3}{2\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{l}_2}{3} - 1 \right) - \frac{a_1 \bar{l}_1}{3}.
\end{aligned}$$

Из представления решения (9), (10) видно, что влияние перепада давления и термокапиллярных сил происходит независимо друг от друга. Этот факт является следствием линейности задачи (2) — (7).

Проведем обезразмеривание всех скоростей на ν_1/l_1 и температур на $Al_1 \nu_1/\chi_1$, тогда безразмерные скорости и температуры останутся непрерывными. Тогда

$$\bar{u}_1(\xi) = N(\bar{l}_1^2 \xi^2 + \bar{l}_1 B(\xi + 1) - \bar{l}_1^2) + a_1(\xi + 1), \quad -1 \leq \xi \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2(\xi) &= N(\bar{l}_1^2 \bar{\mu}_1 \xi^2 + \bar{l}_1 B(\bar{\mu}_1 \xi + 1) - \bar{l}_1^2) + a_2 \xi + a_1, \quad 0 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\
\bar{u}_3(\xi) &= N\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{l}_1^2 \xi^2 + B(\bar{l}_1 \xi - 1) - 1) + a_3(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1}), \quad \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1, \\
\bar{T}_1(\xi) &= -N(\frac{\bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6} \xi^3 + \frac{\bar{l}_1(B - \bar{l}_1)}{2} \xi^2 + \frac{b_1}{\delta_2}(\xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \frac{5\bar{l}_1^2}{12}) + \\
&\quad - \frac{a_1}{6}(\xi^3 + 3\xi^2 - 2) + \frac{b_2}{\delta_2}(\xi + 1), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\
\bar{T}_2(\xi) &= -N(\frac{\bar{\chi}_1 \bar{\mu}_1 \bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{\mu}_1 \bar{l}_1 B}{6} \xi^3 + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_1 (B - \bar{l}_1)}{2} \xi^2 + \frac{b_1}{\delta_2}(\bar{k}_1 \xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \frac{5\bar{l}_1^2}{12}) + \\
&\quad - \frac{\bar{\chi}_1}{6}(a_2 \xi^3 + 3a_1 \xi^2) + \frac{b_2}{\delta_2}(\bar{k}_1 \xi + 1) + \frac{a_1}{3}, \quad 0 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\
\bar{T}_3(\xi) &= -N(\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 (\frac{\bar{l}_1^2}{12} \xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6} \xi^3 - \frac{(B + 1)}{2} \xi^2) + b_3 \xi + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2}{3\bar{l}_1^2} (\frac{5}{4} + B) - \frac{b_3}{\bar{l}_1}) - \\
&\quad - \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{6} (\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1}) + (\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_2}{\delta_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} (\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{\bar{l}_1} (\frac{\bar{l}_2}{2} - 1) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 (a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1}))) \xi \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_2}{\delta_2 \bar{l}_1} - \\
&\quad - \frac{1}{\bar{l}_1^2} (\frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1} (\frac{\bar{l}_2}{2} - 1) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2 (a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1}) + \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1}),
\end{aligned}$$

где $N = \frac{f_1^0 l_1 l_3^2}{2\nu_1^2}$ — безразмерный градиент давления.

На рис. 2–4 представлены типичные профили скоростей в слоях для некоторых значений определяющих параметров.

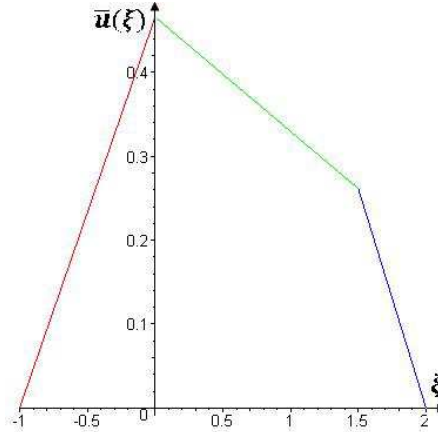
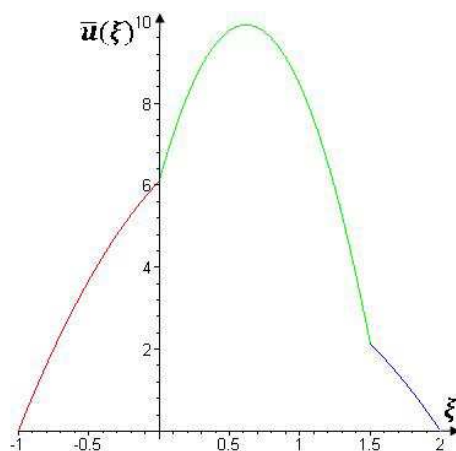
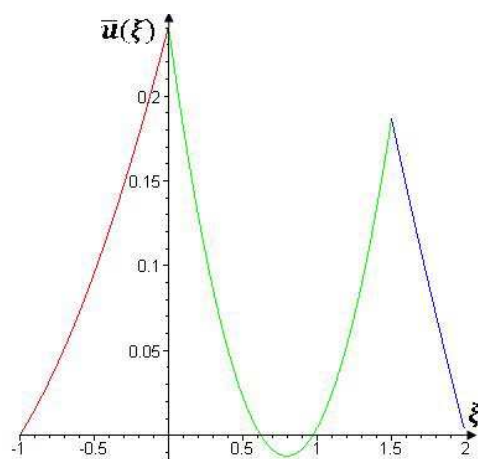


Рис. 2. Профили скоростей в слоях при $N = 0.0001$, $M_1 = 2$, $M_2 = 3$

На рис. 2 изображен случай, когда $|N| \ll |a_j|$, тогда преобладают термокапиллярные силы и имеем почти линейный профиль скоростей — течение Куэтта. На рис. 3 приведен случай, когда $|N| \gg |a_j|$, тогда главными становятся градиенты давления в слоях и профили являются параболическими — течение Пуазейля. Рисунок 4 отражает случай примерно одинакового вклада в механизм течения указанных выше факторов. Отметим также, что здесь возникает зона возвратного течения в среднем слое — скорость в нем меняет знак.

Замечание 1. Стационарное течение под действием только перепада давления изучено в [2].

Рис. 3. Профили скоростей в слоях при $N = -10$, $M_1 = 2$, $M_2 = 3$ Рис. 4. Профили скоростей в слоях при $N = 0.4$, $M_1 = 2$, $M_2 = 3$

Замечание 2. Решению задачи (2)–(7) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что в начальный момент времени первая жидкость заполняет слой $-l_1 < y < 0$, вторая – слой $0 < y < l_2$, а третья – слой $l_2 < y < l_3$. Жидкости находятся в покое, и во всем слое поле температур $\Theta_j = -Ax$. Мгновенно возникшие градиент давления и термокапиллярный эффект порождают движение жидкостей, в котором поверхности раздела остаются плоскостями $y = 0$, $y = l_2$, а траектории являются прямыми, параллельными оси x . Жидкости 1 и 3 можно считать также смазкой, вдоль которых скользит жидкость 2.

Автор выражает благодарность профессору В.К.Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН №116, РФФИ №11-01-00283.

Список литературы

- [1] В.К.Андреев, В.Е.Захватаев, Е.А.Рябицкий, Термокапиллярная неустойчивость, Новосибирск, Наука, 2000.
- [2] Е.Н.Лемешкова, Прямая и обратная задача о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях, *Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика*, 4(2011), №3, 363–370.

Stationary Flow of Three Fluids in a Flat Layer under the Influence of Thermocapillary Forces and Pressure Difference

Elena N. Lemeshkova

The unidirectional movement of the three viscous liquids under the influence of thermocapillary forces and pressure difference in a layer restricted by solid walls was researched. The exact stationary decision of the problem has been found.

Keywords: thermocapillarity, interface, stationary flow.