РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На правах рукописи

Веревкин Игорь Викторович

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Капцов Олег Викторович

Красноярск - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Несмотря на развитие современной вычислительной техники построение точных решений по-прежнему остается важной и актуальной задачей. Эти решения позволяют глубже понять качественные особенности описываемых процессов и явлений, свойства математических моделей, а также могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближенных и численных методов.

Данная работа посвящена применению методов интегрирования линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Рассматриваются уравнение нелинейной теплопроводности с источником, линейное уравнения второго порядка, описывающее стохастические процессы - уравнение Фоккера-Планка, а так же уравнение Шредингера и уравнение Клейна-Гордона-Фока.

Групповой анализ дифференциальных уравнений, открытый С. Ли в конце XIX века, является методом нахождения точных решений, основанном на инвариантности уравнений относительно непрерывных групп преобразований. В настоящее время ему посвящена обширная литература. Назовем классические монографии Л.В. Овсянникова, Н.Г. Чеботарева, Л.П. Эйзенхарта. Идея, принадлежащая С. Ли - переход к инфинитезимальному оператору - позволяет построить регулярный замкнутый алгоритм поиска группы, допускаемой дифференциальным уравнением. Это позволило добиться впечатляющих результатов в поиске точных решений дифференциальных уравнений. Вместе с тем, эффективность метода оказалась ограничена и актуальным стал поиск иных подходов к симметрийному анализу уравнений. Среди развиваемых подходов следует упомянуть теорию высших симметрий (в литературе используются также термины "обобщенные симметрии" [13], преобразования Ли-Беклунда [20]), неклассический метод исследования симметрийных редукций Блумана и Коула.

Основная идея неклассического метода [36] состоит в том, что уравнение с частными производными E

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \ldots) = 0 \tag{0.1}$$

дополняется уравнением инвариантной поверхности H

$$\xi u_x + \tau u_t - \eta = 0, \tag{0.2}$$

которое связано с векторным полем

$$X = \xi(t,x,u)\partial_x + \tau(t,x,u)\partial_t + \eta(t,x,u)\partial_u.$$

Требование, чтобы исходное дифференциальное уравнение и уравнение инвариантной поверхности были инвариантны относительно преобразований с инфинитезимальным оператором X (иными словами условие касания векторного поля многообразия, заданного исходным уравнением и инвариантной поверхностью)

$$XF|_{E\cap H} = 0$$

приводит к переопределенной системе нелинейных уравнений относительно инфинитезимальных элементов $\xi(t,x,u)$, $\tau(t,x,u)$ и $\eta(t,x,u)$. Как следует из работы [46], последнее требование представляет собой просто условие совместности системы (0.1), (0.2). Число определяющих уравнений, возникающих в неклассическом методе, меньше, чем в классическом методе, потому что имеется меньше линейно независимых выражений, содержащих производные. Поскольку все решения классических определяющих уравнений с необходимостью удовлетворяют неклассическим определяющим уравнениям, множество решений может в неклассическом случае оказаться больше. К недостаткам метода следует отнести необходимость решать нелинейную систему уравнений из которой найти коэффициенты векторного поля $\xi(t,x,u)$, $\tau(t,x,u)$ и $\eta(t,x,u)$ достаточно сложно. В литературе, в конкретных примерах, рассматриваются специальные виды коэффициентов.

Расширение метода групп симметрий путем включения в инфинитезимальные образующие преобразований производных соответствующих зависимых переменных восходят к работам самого С. Ли. Еще в конце 19 века Беклунд доказал несуществование касательных преобразований конечного порядка k, отличных от контактных преобразований в случае одной зависимой переменной и требовании гладкости и однозначной обратимости преобразований (см. [20]). Вместе с тем, указанный результат не исключает возможности существования преобразований, сохраняющих условия касания бесконечного порядка.

Учитывая трудности построения аналитической теории групп преобразований Ли-Беклунда, Н. Х. Ибрагимовым [20] построена формальная теория, сохранившая основные свойства теории Ли контактных преобразований.

Иной подход к построению теории высших симметрий (эквивалент термина "преобразования Ли-Беклунда") развит А. М. Виноградовым [13]. Он основан на геометрии бесконечно продолженного дифференциального уравнения. В соответствии с указанным подходом неклассические высшие симметрии реализуются как классы когомологий некоторого естественного дифференциального комплекса, определенного на бесконечном продолжении исходного уравнения. Сходная точка зрения развивается П. Олвером [31].

Другое направление возникает при рассмотрении группового анализа как эффективного метода получения специальных классов инвариантных многообразий. Для нахождения более широких классов инвариантных многообразий О.В. Капцовым в работе [1] предложены В-определяющие уравнения, обобщающие классические определяющие уравнения.

Пусть E - система дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями $u^1, \ldots, u^m$

$$F_i(x_0, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^k_\alpha, \ldots) = 0, \tag{0.3}$$

где $i = 1, \ldots, m$; $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс; $u^k_\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u^k}{\partial {x_0}^{\alpha_0} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$.
Каждые m функций $h_1, \ldots, h_m$, зависящие от $x_0, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^k_\alpha, \ldots$, задают формальный оператор

$$H^* = \sum_{i=1}^{m} \left(h_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{|\alpha| \geq 1} D^\alpha(h_i) \frac{\partial}{\partial u^i_\alpha} \right),$$

здесь $D^\alpha = D^{\alpha_0}_{x_0} \ldots D^{\alpha_n}_{x_n}$, D_{x_i} - оператор полного дифференцирования по x_i

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j u^j_{x_i} \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{j,k} u^k_{x_i x_j} \frac{\partial}{\partial u^k_{x_j}} + \ldots$$

и многообразие

$$h_1 = \ldots = h_m = 0. \tag{0.4}$$

Тогда B-определяющими уравнениями называются уравнения вида

$$H^*(F) + Bh|_{[E]} = 0. \tag{0.5}$$

Здесь B - некоторая матрица порядка m, зависящая от $x_0, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m$. В случае, когда матрица B нулевая B-определяющие уравнения совпадают с классическими определяющими уравнениями.

Схема применения B-определяющих уравнений выглядит следующим образом. Сначала находятся решения уравнений (0.5) и строятся соответствующие многообразия (0.4). Затем ищется общее решение системы (0.4) и подставляется в исходную систему (0.3). Описанная схема аналогична той, которая используется в групповом анализе при построении факторсистем. Однако решать указанные уравнения трудно, в связи с чем в работе [23] для построения дифференциальных связей были введены упрощенные B-определяющие уравнения - линейные определяющие уравнения, которые в отличие от B-определяющих уравнений могут включать только несколько произвольных констант. Решать такие уравнения, как показывают примеры [26], достаточно просто и процедура решения подобна решению классических определяющих уравнений. Интересно, что линейные определяющие уравнения позволяют с единой точки зрения объяснить происхождение некоторых инвариантных многообразий, найденных в работах Галактионова с коллегами [40].

Дальнейшие обобщения определяющих уравнений связаны с введением квазилинейных определяющих уравнений и рассмотрении решения дифференциального уравнения, инвариантного относительно инволютивного распределения [25].

В настоящей работе метод линейных определяющих уравнений применяется к нелинейному уравнению теплопроводности с источником и со степенной зависимостью коэффициента диффузии. Следует отметить, что многие математические модели теплопереноса нелинейны [33]. Это характерно для процессов распространения тепла в средах, теплофизические характеристики которых зависят от температуры. По существу нелинейными являются процессы с фазовыми превращениями, сопряженные задачи тепло- и массопереноса.

Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником (стоком)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \qquad K > 0,$$

и исчерпывающий перечень (в определенном смысле [30]) инвариантных решений рассмотрены в работе Дородницына В. А. [19].

В данной работе также рассматривается метод, основанный на применении дифференциальных преобразований первого порядка (преобразований Эйлера-Дарбу). В третьем томе "Интегрального исчисления" Л. Эйлер [35] исследовал задачи интегрирования линейных уравнений в частных производных. Он нашел, что дифференциальные преобразования вида

$$z = M(x)(u_x + s(x)u) \tag{0.6}$$

переводят решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q\frac{\partial z}{\partial x} + Rz,$$

где P, Q, R - функции только от x, в решения другого уравнения того же вида, но с измененными коэффициентами Q и R.

Дарбу [38] использовал преобразования (0.6) для интегрирования гармонических уравнений вида

$$u_{xy} = [\phi(x-y) + \psi(x+y)]u. \tag{0.7}$$

Мутар [45] применял преобразования вида (0.6) при построении решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' + (k + \omega(x))y' + \lambda(x)y = 0. \tag{0.8}$$

Кроме того, Мутар выписал условие, при выполнении которого уравнение (0.8) интегрируется в явном виде. Это условие формулируется в виде нелинейного дифференциального уравнения на функцию λ. Он указал также способ интегрирования этого нелинейного уравнения.

Современные приложения метода преобразований Эйлера-Дарбу содержат обширную литературу и широко исследуются [44]. Отметим, что в литературе, как правило, преобразование (0.6) именуется преобразованием Дарбу. Однако Эйлер первым ввел их в своих работах для интегрирования дифференциальных уравнений, в связи с чем в данном исследовании указанные преобразования, следуя работе [24], именуются преобразованиями Эйлера-Дарбу.

В данной работе метод преобразований Эйлера-Дарбу используется для построения точных решений уравнения Фоккера-Планка.

Уравнение Фоккера-Планка является частным видом основного кинетического уравнения для вероятности перехода стационарного марковского процесса. В основном его используют для приближенного описания произвольного марковского процесса, у которого отдельные переходы (скачки) между состояниями невелики. В этом смысле линейное уравнение Фоккера-Планка использовалось в частных случаях Рэлеем, Эйнштейном, Смолуховским и Фоккером. Затем Планк из произвольного основного кинетического уравнения вывел общее нелинейное уравнение Фоккера-Планка, предположив только, что скачки малы. И наконец, Колмогоров дал математически строгий вывод этого уравнения, перейдя к пределу бесконечно малых скачков. Следует отметить, что в литературе используются разные представления уравнения Фоккера-Планка [27]. Наибольшее значение имеют представление Ито

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Fu) + \frac{\partial}{\partial x}(Gu),$$

представление Стратоновича

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{F}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{F}u)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(Gu),$$

и представление в кинетической форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(Gu).$$

В настоящей работе уравнение Фоккера-Планка рассматривается в представлении Ито. Первый член в правой части уравнения называется диффузионным или флуктуационным, а второй - переносным, конвективным или дрейфовым. Однако, учитывая широкое поле приложений уравнения Фоккера-Планка, указанные названия не предрешают заранее их физическую интерпретацию.

Групповой анализ уравнения Фоккера-Планка с различными коэффициентами переноса и диффузии проведен в работах [43, 48, 49]. Полная групповая классификация уравнения Фоккера-Планка с коэффициентами, не зависящими от времени выполнена в работе [37]. Подробное обсуждение групповых свойств и построение точных инвариантных решений для одномерного и двумерного уравнения Фоккера-Планка содержит монография [29].

Важным классом частных решений дифференциальных уравнений являются фундаментальные решения. Пусть L - дифференциальный оператор вида

$$L = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \dots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Фундаментальным решением называется функция $E(x, y)$, являющаяся решением неоднородного дифференциального уравнения

$$LE = \delta(x - y), \tag{0.9}$$

где $\delta(x - y)$ обозначает δ-функцию Дирака [22]. Легко видеть, что фундаментальное решение не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого E_0, являющегося произвольным решением однородного уравнения $LE_0 = 0$. Известно, что фундаментальные решения существуют для произвольных уравнений с аналитическими коэффициентами (и само фундаментальное решение является тогда аналитическим), для любых уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (в этом случае фундаментальное решение принадлежит C^∞) и для целого ряда других уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют более слабым предположениям.

Фундаментальные решения играют важную роль в теории эллиптических уравнений. Например, если построено достаточно хорошее фундаментальное решение, можно доказать аналитичность или дифференцируемость решений [7]. Фундаментальные решения являются полезным инструментом при изучении краевых задач с помощью интегральных уравнений. Важное значение фундаментальные решения имеют в теоретической физике. Известные различные функции Грина как в классической теории так и в квантовой, являющиеся решениями соответствующих неоднородных уравнений поля с точечными источниками есть фундаментальные решения [8]. Задача об отыскании фундаментального решения оператора L, по существу, эквивалентна задаче об отыскании решения неоднородного уравнения $LE = f$ при произвольной функции f. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная построению фундаментальных решений как для общего вида уравнений и систем уравнений, так и для конкретных уравнений. Отметим некоторые подходы, позволяющие строить или анализировать фундаментальные решения уравнений с переменными коэффициентами.

В работах Аксенова А. В., Береста Ю. Ю., Ибрагимова Н. Х. [2, 3, 5, 6, 21] для построения фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений предложено использовать групповой анализ, распространенный на пространства обобщенных функций. Схема построения инвариантных фундаментальных решений для уравнения (0.9) выглядит следующим образом [3].

1. Находится оператор симметрии общего вида однородного линейного дифференциального уравнения (0.9) и соответствующая функция $\lambda(x)$, удовлетворяющая тождеству $\underset{p}{X}(Lu) = \lambda(x)Lu$ (здесь $\underset{p}{X}$ - продолжение порядка p оператора X).

2. Используя ограничения $\xi^i(y) = 0$ и $\lambda(y) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \xi^i(y)}{\partial y^i} = 0$, находится алгебра Ли уравнения (0.9), являющаяся подалгеброй алгебры Ли однородного уравнения (0.9).

3. Строятся инвариантные фундаментальные решения с помощью симметрий уравнения (0.9).

4. Получение новых фундаментальных решений из известных с помощью симметрий уравнения (0.9) (размножение решений).

Цель диссертационной работы состоит в нахождении инвариантных многообразий нелинейного уравнения теплопроводности с источником, построении преобразований Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка, обобщении преобразования Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенной функции и построении точных решений уравнений Фоккера-Планка, Шредингера и Клейна-Гордона-Фока.

Объект исследования. Объектами исследования являются нелинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом диффузии в виде степенной функции с источником, уравнение Фоккера-Планка, неоднородные уравнения в частных производных второго порядка, включая уравнения Шредингера и Клейна-Гордона-Фока.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе методы преобразований дифференциальных уравнений, методы группового анализа, методы теории обобщенных функций, в частности, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Методы и результаты работы могут применяться в кинетической теории, при тестировании численных алгоритмов и асимптотических методов. Диссертация содержит ряд новых точных решений уравнений нелинейной теплопроводности, Фоккера-Планка, фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 01.01.02 "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" в диссертации рассмотрены линейные и нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными для которых построены новые точные решения. Поэтому полученные результаты соответствуют пунктам 5 (нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений) и 6 (аналитическая теория дифференциальных уравнений) в списке областей исследования специальности 01.01.02.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех основных глав и заключения.

В **первой главе** рассматриваются инвариантные многообразия второго и третьего порядков для нелинейного уравнения теплопроводности с источником. Вводный параграф 1.1 содержит основные определения и теоремы, описывающие метод линейных определяющих уравнений, позволяющий конструктивным способом находить специальные классы инвариантных многообразий (дифференциальных связей).

В параграфе 1.2 рассматривается схема нахождения решений второго порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$h = u_{xx} + g(t, x, u, u_x)$$

линейного определяющего уравнения и формулируется теорема о построенных решениях. В связи с большой громоздкостью процедуры решения линейного определяющего уравнения для инвариантных многообразий третьего порядка

$$h = u_{xxx} + g(t, x, u, u_x, u_{xx})$$

теорема о полученных решениях сформулирована без обсуждения названной процедуры. При этом решения, удовлетворяющие классическим определяющим уравнениям из соответствующих теорем исключены. Ввиду вычслительной сложности, большая часть вычислений проводилась на компьютере с помощью пакета символьных вычислений "Reduce".

В начале параграфа 1.3 формулируется схема построения решений исходного уравнения нелинейной теплопроводности с помощью найденных дифференциальных связей. Далее, на основе приведенной схемы, используя дифференциальные многообразия второго и третьего порядка, строятся некоторые решения. При этом замечается, что некоторые решения ранее найдены иным способом - обобщенным методом инвариантных подпространств. С помощью дифференциальной связи третьего порядка

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + re^{-3mt/2}u^{5/2} + se^{mt/2}u^{1/2}$$

для уравнения

$$u_t = (u^{-1/2}u_x)_x + mu, \qquad m \in R,$$

строится новое решение, выражающееся через функцию Вейерштрасса. Найденное решение уравнения не является инвариантным.

Вторая глава посвящена рассмотрению преобразования Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка в представлении Ито. Строятся прямое и противоположное преобразования Эйлера-Дарбу, высшие преобразования Эйлера-Дарбу порядка k и обсуждается обобщение на многомерный случай для уравнения Фоккера-Планка частного вида. Приводятся примеры решений уравнения Фоккера-

Планка, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

В параграфе 2.1 выписывается прямое преобразование Эйлера-Дарбу, сохраняющее вид исходного уравнения. В случае, когда известно k решений $w_1, \ldots, w_k$ вспомогательного уравнения

$$(Fw)_{xx} + (Gw)_x + cw = 0, \qquad \text{где } c \in R,$$

для различных $c_1, \ldots, c_k$, строится высшее преобразование Эйлера-Дарбу порядка k. Высшее преобразование Эйлера-Дарбу является композицией преобразований Эйлера-Дарбу первого порядка. Оказывается, зная параметры преобразования Эйлера-Дарбу можно, не решая вспмоготельного обыкновенного дифференциального уравнения, построить преобразование, переводящее решения преобразованного уравнения Фоккера-Планка в решения исходного. Такое преобразование называем противоположным преобразованием Эйлера-Дарбу. При этом композиция прямого и противоположного преобразований Эйлера-Дарбу может не быть тождественным преобразованием. Это позволяет ввести отношение эквивалентности на классе уравнений Фоккера-Планка.

Преобразование Эйлера-Дарбу позволяет строить решения многомерных уравнений Фоккера-Планка вида

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (F_i(x)u)_{x_i x_i} + (G_i(x)u)_{x_i},$$

при этом функции F_i и G_i могут зависеть только от переменной x_i. Для этого обобщается теорема 1 параграфа 2.1 на уравнения вида

$$(Fu)_{xx} + (Gu)_x = \hat{B}u,$$

где оператор $\hat{B}$ имеет следующий вид

$$\hat{B} = \sum_{|\alpha|>0}^{N} b_\alpha(y)\partial_y^\alpha, \qquad \text{где } \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\text{- целочисленный мультииндекс .}$$

Параграф 2.3 посвящен построению решений уравнения Фоккера-Планка, удовлетворяющих физически осмысленным краевым условиям

$$v(x,0) = \delta(x - x_0),$$

здесь $\delta(x - x_0)$ - δ-функция Дирака,

$$v(x,t)|_{x\to\infty} = 0,$$

$$(a^2 v_x + G_1 v)|_{x=0} = 0,$$

$$(a^2 v_x + G_1 v)|_{x\to\infty} = 0,$$

и считается, что при $x < 0$ функция $v(x,t) = 0$.

Следует отметить, что построенные решения в тоже время являются фундаментальными решениями задачи Коши для преобразованного уравнения

$$v_t = (Fv)_{xx} + (G_1)_x.$$

В третьей главе введено преобразование Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенной функции. В качестве примера построены фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами, описывающих частицу во внешнем скалярном поле. Обобщение преобразования Эйлера-Дарбу на уравнения с правой частью и решения в виде обобщенных функций представлено в параграфе 3.1. Рассматривается класс уравнений (обозначается как $E_{K,M}$) вида

$$Au + Bu = f,$$

где оператор A - дифференциальный оператор по переменной x

$$A = \sum_{i=0}^{K} a_i(x) D_x^i,$$

B - дифференциальный оператор по переменным $y_1, \ldots, y_n$ вида

$$B = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M} b_\alpha(y) D_y^\alpha, \qquad (0.10)$$

а $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ - обобщенная функция (здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, $D_x^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$, $D_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {y_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {y_n}^{\alpha_n}}$ - операции обобщенного дифференцирования). Показывается, что преобразование вида

$$v = \frac{1}{r}(D_x u - \frac{h'}{h} u)$$

переводит решения одного уравнения в решения другого уравнения того же класса. Этот результат остается справедливым и для высших преобразований Эйлера-Дарбу.

В параграфе 3.2 для уравнений класса $E_{2,M}$ приведены соотношения, связывающие коэффициенты и правую часть исходного уравнения с соответствующими коэффициентами и правой частью преобразованного уравнения при преобразовании Эйлера-Дарбу первого порядка и порядка k.

Построению фундаментальных решений посвящен параграф 3.3. Рассмотрено одномерное уравнение Шредингера и одномерное уравнение Клейна - Гордона - Фока. Под действием преобразования Эйлера-Дарбу исходные уравнения преобразуются в уравнения с переменными коэффициентами, описывающие частицу в потенциале $H_1(x)$. Соответственно построенные фундаментальные решения есть решения уравнений с переменными коэффициентами.

Основные результаты диссертационной работы сформулированы в заключении.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Определение с помощью линейных определяющих уравнений инвавриантных многообразий 2-го и 3-го порядка для уравнения нелинейной теплопроводности с источником. Построение точных решений с помощью найденных многообразий.

2. Применение метода преобразования Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка. Построение решений для заданных краевых условий.

3. Обобщение преобразований Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенной функции. Построение фундаментальных решений уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена строгостью доказательств. Полученные результаты были опубликованы в рецензируемых научных журналах и прошли обсуждение на представительных научных семинарах и конференциях. Все результаты являются новыми.

Апробация. Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:
Всероссийская конференция, посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова "Нелинейные волны: теория и новые приложения"(Новосибирск, 2011);
XVI Международная научная конференция "Решетневские чтения" (Красноярск, 2012);
Международная конференция "Алгебра и Логика: Теория и приложения" (Красноярск, 2013);
Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН "Математические модели и методы интегрирования" под руководством профессора О.В. Капцова (Красноярск, 2005, 2011, 2013, 2015);
Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике" под руководством профессора В.К. Андреева (Красноярск, 2015);
Семинар Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета "Обратные задачи" под руководством профессора Ю.Я. Белова (Красноярск, 2015);
Семинар кафедры ПМиКБ Сибирского федерального университета под руководством профессора С.П. Царева (Красноярск, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [42], [10], [11]. Работа [42] выполнена в соавторстве с О. В. Капцовым. Вклад авторов в совместной работе является равным. Результаты второй главы так же опубликованы в материалах всероссийской конференции [12].

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Олегу Викторовичу Капцову за предложенные темы исследований, советы и постоянное внимание к работе.

1 Глава

Инвариантные многообразия для нелинейного уравнения теплопроводности

Уравнение нелинейной теплопроводности с источником (стоком) имеет вид

$$u_t = (u^q u_x)_x + f(u), \qquad q \neq 0, \tag{1.1}$$

где $q \in R$, u - функция от пременных x и t, f - гладкая функция. Уравнение (1.1) при $q = -2$ и $f = ku$, где $k \in R$, может быть линеаризовано.

Действительно, сделаем замену $u = z_x$ и проинтегрируем уравнение (1.1), получим

$$z_t = (z_x)^{-2} z_{xx} + kz. \tag{1.2}$$

Преобразование годографа

$$x = w(y,t), \qquad z = y$$

дает для соответствующих производных следующие соотношения

$$w_y = (z_x)^{-1},\ w_t = -z_t/z_x,\ w_{yy} = -z_{xx}/z_x^3.$$

Подставляя выписанные соотношения в уравнение (1.2), получим линейное уравнение

$$w_t = w_{yy} - kyw_y.$$

Решения исходного уравнения $u(x,t)$ выражаются через решения полученного линейного уравнения $w(y,t)$ по формулам

$$u(x,t) = (w_y)^{-1}, \qquad x = w(y,t).$$

Для получения зависимости $u(x,t)$ в явном виде необходимо из предыдущих соотношений исключить y. Далее случай с $q = -2$ и $f = ku$ из рассмотрения исключаем.

1.1 Основные понятия и утверждения

Сначала дадим необходимые определения и утверждения. Рассмотрим систему эволюционных уравнений E:

$$u_t^i = F^i(t, x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, \ldots, u_\alpha^k, \ldots), \tag{1.3}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, $u_\alpha^i = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u^i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Функции F^i могут зависеть от производных по x любого порядка и для определенности считаются бесконечно дифференцируемыми. Обозначим через $[E]$ систему (1.3) и ее дифференциальные следствия по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Полные производные по t и x обозначим, для целей настоящей главы, соответственно через D_t и D_x. Система эволюционных уравнений E порождает формальное векторное поле:

$$V_F = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \left(F^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{|\alpha|>0} D^\alpha(F^i) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \right). \tag{1.4}$$

Определение. *Многообразие H, заданное уравнениями*

$$h_j(t, x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, \ldots, u_\alpha^k, \ldots) = 0, \tag{1.5}$$

называется инвариантным многообразием системы (1.3), если

$$V_F(h_j)|_{[H]} = 0, \ j = 1, \ldots, p, \tag{1.6}$$

где V_F - векторное поле, порожденное системой (1.3).
Условие инвариантности можно записать в эквивалентной форме

$$D_t(h_j)|_{[E][H]} = 0. \tag{1.7}$$

Если число независимых переменных равно двум (то есть $n = 1$), количество дифференциальных связей равно m и они разрешены относительно старших производных от всех функций $u^1, \ldots, u^m$, то, как показано в [1], из условия инвариантности (1.6) следует существование гладкого решения системы (1.3) и (1.5). Покажем это.

Пусть инвариантное многообразие эволюционной системы (1.3) может быть представлено в виде, разрешенном относительно старших производных по x:

$$u_{N_i}^i = S(t, x, u^1, \ldots, u^m, \ldots, u_j^k, \ldots), \tag{1.8}$$

где $i = 1, \ldots, m$. К переопределенной системе (1.3), (1.8) добавляются начальные данные

$$u^i_{n_i} = C^i_{in_i}, \tag{1.9}$$

где $C^i_{in_i} \in R$, $0 \leq n_i < N_i$.

Предполагается, что правые части уравнений (1.3), (1.8) являются достаточно гладкими функциями для определенности класса C^∞.

Лемма 1. *Если уравнения (1.8) задают инвариантное многообразие системы (1.3), то в некоторой окресности точки $(t_0, x_0) \in R^2$ существует единственное гладкое решение системы (1.3), (1.8) с начальными данными (1.9).*

Доказательство Введем функции

$$v^{ik_i} = u^i_{k_i} \qquad \text{для всех} \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad k_i = 0, \ldots, N_i - 1.$$

Тогда задачи (1.3), (1.8), (1.9) переписываются в виде

$$\begin{aligned} &v^{ik_i}_x = v^{ik_i+1}, \qquad (0 \leq k_i \leq N_i - 2) \\ &v^{iN_i-1}_x = S^i, \\ &v^{ik_i+1}(t_0, x_0) = C_{ik_i}, \qquad (0 \leq k_i \leq N_i - 1). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Дифференцируя уравнения (1.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^i_{ik_i}) = D^{k_i}_x(F^i). \tag{1.11}$$

Используя систему (1.10), уравнения (1.11) можно выразить через $t, x, v^1, \ldots, v^m, \ldots, v^{ik_i}, \ldots, v^{mN_m-1}$:

$$v^{ik_i}_t = G^{ik_i}, \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 0 \leq k_i \leq N_i. \tag{1.12}$$

Согласно теореме Фробениуса, система (1.10), (1.12) в окрестности точки (t_0, x_0) будет иметь единственное решение, если выполнены условия совместности. В данном случае условия совместности сводятся к следующим:

$$D_x G^{iN_i-1}|_{(1.10)} - D_t S^i|_{(1.12)} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, m.$$

Последние соотношения равносильны

$$(D_x^{N_i} F^i - D_t S^i)|_{[F]_0[S]_0} = 0, \tag{1.13}$$

$$i = 1, \ldots, m.$$

Здесь через $[F]_0$ обозначается система F и ее дифференциальные следствия по переменной x.

С другой стороны, условия инвариантности, очевидно, можно записать так:

$$D_t(u^i_{N_i} - S^i)|_{[F]_0[S]_0} = 0, \tag{1.14}$$

$$i = 1, \ldots, m.$$

Ввиду того, что

$$D_t u^i_{N_i}|_{[F]} = D_x^{N_i} F^i,$$

приходим к заключению о том, что условия (1.13), (1.14) эквивалентны. Лемма доказана.

Условие инвариантности (1.7) можно переформулировать в виде B - определяющих уравнений.

Как доказано в [26] для уравнения E

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{1.15}$$

и дифференциальной связи H

$$h = u_n + g(t, x, u, \ldots, u_{n-1}) = 0 \tag{1.16}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть задано уравнение (1.15). Дифференциальная связь (1.16) при $n > 4$ является инвариантным многообразием для (1.15) тогда и только тогда, когда функция h на множестве $[H]$ удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} D_t(h) &= F_{u_2} D_x^2(h) + (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})) D_x(h) \\ &+ [F_u + n D_x(F_{u_1}) - h_{u_{n-1}} D_x(F_{u_2}) + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u2}) \\ &+ F_{u_2} h h_{u_{n-1} u_{n-1}} - 2 F_{u_2} D_x(h_{u_{n-1}})] h. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Доказательство. Пусть h удовлетворяет уравнению (1.17). Все слагаемые в правой части (1.17) обращаются в ноль на множестве $[H]$. Значит,

$$D_t(h)|_{[E]\cap[H]} = 0,$$

т. е. (1.16) является инвариантным многообразием для (1.15). Докажем теперь обратное утверждение. Пусть (1.16) является инвариантным многообразием. Легко видеть, что

$$D_t(h_j)|_{[E]} \simeq D_x^n(F) + h_{u_{n-1}}D_x^{n-1}(F) + h_{u_{n-2}}D_x^{n-2}(F). \tag{1.18}$$

Запись $\alpha \simeq \beta$ означает, что разность $\alpha - \beta$ не содержит членов с u_n, u_{n-1}, u_{n-2}. Поскольку $n > 4$, то слагаемые, стоящие в правой части (1.18), можно представить следующим образом:

$$h_{u_{n-2}}D_x^{n-2}(F) \simeq u_n F_{u_2} h_{u_{n-2}},$$

$$h_{u_{n-1}}D_x^{n-1}(F) \simeq h_{u_{n-1}}[u_n(F_{u_1} + (n-1)D_x(F_{u_2})) + u_{n+1}F_{u_2}],$$
$$D_x^n(F) = D_x D_x^{n-1}(F) \simeq F_{u_2}u_{n+2} + [F_{u_1} + nD_x(F_{u_2})]u_{n+1} +$$
$$+[F_u + nD_x(F_{u_1} + \frac{n(n-1)}{2}D_x^2(F_{u_2})]u_n.$$

Значит, соотношение (1.18) можно переписать в виде

$$D_t(h)|_{[H]} \simeq F_{u_2}u_{n+2} + u_{n+1}[F_{u_1} + nD_x(F_{u_2}) + F_{u_2}h_{u_{n-1}}] + [F_u +$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}D_x^2(F_{u_2}) + nD_x(F_{u_1}) + h_{u_{n-1}}(F_{u_1} + nD_x(F_{u_2})) + F_{u_2}h_{u_{n-2}}]u_n.$$

Теперь представим последнее выражение через $h, D_x(h), D_x^2(h)$.

Несложно видеть, что справедливы соотношения

$$D_x(h) \simeq u_{n+1} + u_n h_{u_{n-1}},$$

$$D_x^2(h) \simeq u_{n+2} + u_{n+1}h_{u_{n-1}} + u_n[h_{u_{n-2}} + 2D_x(h_{u_{n-1}}) - u_n h_{u_{n-1}u_{n-1}}].$$

Следовательно, разность

$$D_t(h)|_{[E]} - F_{u_2}D_x^2(h)$$

не содержит членов с u_{n+2}, а разность

$$D_t(h)|_{[E]} - F_{u_2} D_x^2(h) - [F_{u_1} + nD_x(F_{u_2})]D_x(h) \tag{1.19}$$

не содержит членов с u_{n+2} и u_{n+1}. Для того, чтобы формула (1.19) не содержала членов с u_n, необходимо из нее вычесть некоторое выражение вида $[ru_n + q]h$.

Прямым вычислением проверяется, что функция

$$\gamma = D_t(h)|_{[E]} - M(h),$$

где

$$M(h) = F_{u_2} D_x^2(h) + [F_{u_1} + nD_x(F_{u_2})]D_x(h) + [F_u + nD_x(F_{u_1}) -$$
$$- h_{u_{n-1}} D_x(F_{u_2}) + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) + F_{u_2} h h_{u_{n-1}u_{n-1}} - 2F_{u_2} D_x(h_{u_{n-1}})]h$$

не содержит членов с u_n, т.е. $\gamma \simeq 0$. Покажем, что γ равна нулю.

Поскольку H - инвариантное многообразие, то

$$D_t(h)|_{[E]\cap[H]} = 0.$$

Значит на множестве $[E]\cap[H]$ справедливо равенство

$$M(h) + \gamma = 0.$$

Очевидно, функция $M(h)$ обращается в ноль на этом множестве, поэтому

$$\gamma|_{[E]\cap[H]} = 0.$$

Так как γ не зависит от $u_t, u_{tx}, \ldots$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\gamma|_{[H]} = 0. \tag{1.20}$$

Как было показано ранее, γ может зависеть только от $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots$. С другой стороны, h зависит от u_n. Значит, соотношение (1.20) выполняется только тогда, когда $\gamma = 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы содержит схему получения определяющих уравнений. Подобные уравнения можно написать и для уравнений порядка выше второго, а также для систем уравнений. Однако, как указано выше, решать уравнения (1.17) трудно и вместо них в работе [23] предложено использовать подобные им линейные уравнения.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \ldots, u_N). \tag{1.21}$$

Определение. *Линейным определяющим уравнением (далее ЛОУ), соответствующим уравнению (1.21), называется уравнение вида*

$$D_t(h) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i} b_{ik} D_x^{i-k}(F_{u_{N-k}}) D_x^{N-i}(h). \tag{1.22}$$

где b_{ik} - некоторые константы. Уравнение (1.22) должно выполняться на решениях (1.21).

Запишем ЛОУ для уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} &D_t h - u^q D_x^2 h - b_1 q u_x u^{q-1} D_x h - \\ &- (b_3 q u^{q-1} u_{xx} + b_2 q(q-1) u^{q-2} u_x^2 + b_4 f_u) h = 0, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $b_1, \ldots, b_4$ - неизвестные постоянные, которые нужно найти одновременно с h. Будем искать решения ЛОУ в форме, разрешенной относительно старшей производной

$$h = u_n + g(t, x, u, u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad n \geq 2, \qquad (\text{здесь и далее } u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}).$$

Процедура поиска решения линейного определяющего уравнения аналогична используемой в групповом анализе [30].

1.2 Построение инвариантных многообразий 2-го и 3-го порядков

Рассмотрим подробно случай $n = 2$. Выразим все производные по t в (1.23) используя уравнение (1.1). В результате получим в левой части (1.23) полином относительно u_2 и u_3. Приравнивая к нулю коэффициенты при u_3 и u_2^2 получим

$$q(b_1 - 4) = 0, \qquad u g_{u_1 u_1} + q(b_3 - 3) = 0.$$

Следовательно, $b_1 = 4$ и g имеет вид

$$g = \frac{(3-b_3)q}{2u} u_1^2 + a(u,t,x)u_1 + g_1(u,t,x),$$

где, как указано, функции a и g могут зависеть только от t, x, u. Вновь повторяя процедуру с найденными функциями a и g и приравнивая нулю коэффициенты при $u_2 u_1^2$ и $u_2 u_1$ получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} &2b_2 q - 2b_2 - b_3^2 q + b_3 q + 4b_3 - 6q = 0, \\ &2ua_u + q(b_3+1)a = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$a = a_1(t,x)u^{-\frac{(1+b_3)}{2}q}.$$

Собирая слагаемые при коэффициенте u_1^3, получаем уравнение

$$4b_2 q - 4b_2 + b_3^2 q - 4b_3 q + 2b_3 - 9q + 6 = 0. \tag{1.25}$$

Из соотношений (1.24) и (1.25) следует, что $b_3 = 1$ либо $b_3 = \frac{q+2}{q}$. Положим $b_3 = 1$, тогда $b_2 = \frac{3q-2}{q-1}$. Приравнивание к нулю коэффициента при u_2 дает уравнение

$$u^{q+2}(2a_{1_x} + f_u(b_4 - 1)) + u^{2q+1} q g_1 = 0$$

из которого легко находим g_1

$$g_1 = \frac{1}{q} u^{1-q}(f_u(1-b_4) - 2a_{1_x}).$$

Собирая слагаемые при u_1^2 получим уравнение Эйлера

$$u^3(1-b_4)f_{uuu} + u^2(2 - qb_4 - 2b_4)f_{uu} - uq^2 f_u + q^2 f = 0.$$

Рассмотрим случай $b_4 = 1$. Последнее уравнение имеет два решения в зависимости от значения показателя q

$$f = ku + nu^{-q}, \qquad q \neq -1,$$

$$f = ku + nu \ln u, \qquad q = -1,$$

где k, n - произвольные константы.

Пусть $f = ku + nu^{-q}$, тогда линейное определяющее уравнение имеет вид

$$u^{q+1}(-qa_{1_t} - 3u^q q a_{1_{xx}} - 4u^q a_{1_{xx}} + kq^2 a_1)u_1 + nq^2 a_1 u_1 + \\ + 2u^{q+2}(a_{1_{tx}} - u^q a_{1_{xxx}} - kqa_{1_x}) + 2una_{1_x} = 0 \tag{1.26}$$

Из уравнения (1.26) немедленно следует $na_1 = 0$ (напомним $q \neq -1$). Если $a_1 = 0$, тогда решением уравнения (1.23) является функция

$$h = u_2 + qu_1^2/u.$$

В случае $n = 0$ и $q \neq -\frac{4}{3}$, из уравнения (1.26) легко найти

$$a_1 = (rx + s)e^{kqt},$$

$$h = u_2 + q\frac{u_1^2}{u} + ((rx + s)u_1 - \frac{2}{q}ur)u^{-q}e^{kqt}.$$

В случае $q = -\frac{4}{3}$ получаем

$$a_1 = (rx^2 + sx + p)e^{-\frac{4}{3}kt},$$

$$h = u_2 - \frac{4u_1^2}{3u} + ((rx^2 + sx + p)u_1 + \frac{3}{2}u(2rx + s))u^{4/3}e^{-\frac{4}{3}kt}.$$

Рассмотрим теперь случай

$$f = ku + nu \ln u, \qquad q = -1.$$

Линейное определяющее уравнение в этом случае следующее

$$-u_1 u(a_{1_t} + na_1 \ln u + ka_1) + u_1 a_{1_{xx}} +$$

$$+2u^2(-a_{1_{tx}} - na_{1_x} \ln u - ka_{1_x} + na_{1_x}) + 2ua_{1_{xxx}} = 0.$$

Собирая слагаемые при u_1 и учитывая, что функция $a_1(t, x)$ не зависит от u вновь получаем условие $na_1 = 0$. Если $a_1 = 0$, то

$$h = u_2 - \frac{u_1^2}{u}. \tag{1.27}$$

Если $n = 0$, то рассматривая коэффициент при u_1, получаем следующие уравнения на функцию a_1

$$a_{1_{xx}} = 0, \qquad a_{1_t} + ka_1 = 0.$$

Следовательно,

$$a_1 = e^{-kt}(rx + s), \qquad \text{где} \qquad r, s \in R$$

и функция h имеет вид

$$h = u_2 - \frac{u_1^2}{u} + (rx + s)\frac{u_1}{u}e^{-kt} + 2ru^2e^{-kt}.$$

Вернемся теперь к случаю $b_3 = \frac{q+2}{q}$. Собирая слагаемые в линейном определяющем уравнении при $u_2u_1^2$, получим соотношение

$$q^2b_2 - qb_2 - 3q^2 + q + 2 = 0$$

из которого следует, что возможны два случая: либо $q = 1$ и b_2 - любое, либо $q \neq 1$ и $b_2 = \frac{3q+2}{q}$. Остановимся на последнем.

Собирая коэффициенты при u_2, получим уравнение

$$u(b_4f_u - f_u + 3g_1) + 2a_{1_x} = 0,$$

откуда находим функцию g_1

$$g_1 = \frac{1 - b_4}{3}f_u - \frac{2a_{1_x}}{3u}.$$

Подставляем в линейное определяющее уравнение и собираем слагаемые при u_1^2, получим

$$u^3(1 - b_4)f_{uuu} - 3u^2b_4f_{uu} + 2a_{1_x} = 0.$$

Рассмотрим случай $b_4 = 0$. Тогда общее решение предыдущего уравнения есть

$$f = -2a_{1_x}\ln u + ku^2 + ru + c, \qquad \text{где} \qquad k, r, c - \text{произвольные постоянные.}$$

Коэффициент при u_1 имеет вид

$$-u^2a_{1_{xx}} - 3u(a_{1_t} + f_ua_1) + 6fa_1 = 0.$$

Подставляя в последнее выражение найденную функцию f получим следующие условия

$$a_{1_x} = 0, \qquad \frac{a_{1_t}}{a_1} = r \qquad \text{и} \qquad c = 0.$$

Следовательно, имеем

$$f = ku^2 + ru, \qquad \text{и} \qquad a_1 = se^{rt}.$$

Подставляя функции f и a_1 в линейное определяющее уравнение окончательно находим в рассматриваемом случае $f = ru$ и

$$h = u_2 + se^{rt}u^{-2}u_1 + \frac{r}{3}.$$

Можно показать, что указанные функции h, за исключением (1.27), приводят к инвариантным решениям исходного уравнения (1.1).

Теорема 1.1. *Линейное определяющее уравнение (1.23) имеет следующие решения второго порядка*

$$h = u_2 - \frac{u_1^2}{u},$$

если $q = -1,\ f = ku + nu\ln u,$ *а* $b_1 = 1,\ b_2 = 5/2,\ b_3 = 1,\ b_4 = 1;$

$$h = u_2 + \frac{qu_1^2}{u},$$

если $q \neq -1,\ f = su + ru^{-q},$ *а* $b_1 = 1,\ b_2 = \frac{3q-2}{q-1},\ b_3 = 1,\ b_4 = 1;$

$$h = u_2 - \frac{3u_1^2}{2u},$$

если $q = -2,\ f = su + ru^3,$ *а* $b_1 = 4,\ b_2 = 2,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1;$

$$h = u_2 + se^{rt}u^{-2}u_1 + \frac{r}{3},$$

если $q = 1,\ f = ru,$ *а* $b_1 = 4,\ b_2 = 5,\ b_3 = 3,\ b_4 = 0;$

$$h = u_2 - \frac{(q-1)u_1^2}{u},$$

если q *произвольная константа,* $f = su + ru^{1-q},$ *а* $b_1 = 4,\ b_2 = \frac{3q+2}{q},$
$b_3 = \frac{q+2}{q}, b_4 = 1;$
и $r, s \in R.$

Доказательство. Справедливость теоремы проверяется прямой подстановкой.

Необходимо отметить, что в список решений теоремы не включены функции h, удовлетворяющие классическим определяющим уравнениям.

Для $n = 3$ процедура решения линейного определяющего уравнения аналогична, однако существенно более объемна. Сформулируем результат решения линейного определяющего уравнения.

Теорема 1.2. *Линейное определяющее уравнение (1.23) имеет следующие решения третьего порядка*

$$h = u_3 + \frac{3(q-1)}{u}u_1u_2 + (q^2 - 3q + 2)\frac{u_1^3}{u^2} + nu_1,$$

если q *произвольная константа,* $f = su + ru^{1-q} + \frac{n(q+1)}{q^2}u^{q+1}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = \frac{7q+6}{q},\ b_3 = 4 + \frac{6}{q},\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 + \frac{3q-1}{u}u_1u_2 + q(q-2)\frac{u_1^3}{u^2} + ru_1,$$

если $q \neq 0, 1,\ f = nu + \frac{r}{q}u^{q+1}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = \frac{7q^2-3q-2}{q(q-1)},\ b_3 = \frac{4q+2}{q},\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + re^{-3mt/2}u^{5/2} + se^{mt/2}u^{1/2},$$

если $q = -\frac{1}{2},\ f = mu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 5/3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 - \frac{15u_1u_2}{2u} + \frac{35u_1^3}{4u^2} + re^{-3nt/2}u^{5/2},$$

если $q = -\frac{3}{2},\ f = nu + mu^{5/2}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + ku_1 + se^{mt/2}u^{1/2},$$

если $q = -\frac{1}{2},\ f = mu - 2ku^{1/2}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 5/3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 - \frac{15u_1u_2}{2u} + \frac{35u_1^3}{4u^2} + se^{-7nt/2}u^{9/2} + re^{-3nt/2}u^{5/2},$$

если $q = -\frac{3}{2},\ f = nu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1;$

$$h = u_3 - \frac{4u_1u_2}{u} + \frac{3u_1^3}{u^2} + se^{-2mt}u^2u_1,$$

если $q = -1,\ f = mu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 4,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1;$

$r, s, m, n \in R$.

Доказательство.

Справедливость теоремы проверяется прямой подстановкой.

Здесь следует сделать замечание, аналогичное, что мы делали к теореме 1.1. В список решений теоремы 1.2 также не включены функции h, удовлетворяющие классическим определяющим уравнениям.

Отметим, что решения линейного определяющего уравнения с $n = 1$ также существуют, но приводят только к инвариантным решениям.

1.3 Построение решений нелинейного уравнения диффузии

Используем для построения частных решений нелинейного уравнения диффузии с источником (1.1) найденные решения линейного определяющего уравнения (1.23). Общая схема применения линейного определяющего уравнения может быть описана следующим образом [26]:

1) ищем решения линейного определяющего уравнения;

2) приравнивая фиксированное решение линейного определяющего уравнения к нулю, получаем инвариантное многообразие $h = 0$;

3) находим общее решение уравнения $h = 0$;

4) подставляем найденное общее решение в исходное эволюционное уравнение и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t;

5) интегрируем полученную систему и выписываем решение исходного уравнения.

Рассмотрим функцию

$$h = u_2 + qu_1^2/u, \qquad \text{где} \;\; q \in R.$$

В соответствии с приведенной схемой приравняем h к нулю и получим дифференциальную связь

$$u_2 + qu_1^2/u = 0. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) имеет два типа решений в зависимости от значения показателя

q,

$$u = (c_1 x + c_2)^{\frac{1}{q+1}}, \qquad q \neq -1 \tag{1.29}$$

и

$$u = c_1 e^{c_2 x}, \qquad q = -1, \tag{1.30}$$

где c_1, c_2 есть функции от t.

Если подставить представление (1.30) в уравнение

$$u_t = (u_x/u)_x + ku \ln u, \tag{1.31}$$

получим легко интегрируемые уравнения для функций c_1, c_2,

$$c_1' = kc_1 \ln c_1, \; c_2' = kc_2.$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$c_1 = \exp s_1 e^{kt}, \; c_2 = s_2 e^{kt}.$$

Таким образом, частным решением уравнения (1.31) является функция

$$u = s_1 \exp{(s_2 x e^{kt})}, \qquad s_1, s_2 \in R.$$

Очевидно, что это решение является регулярным. Если $s_2 < 0$, то $u \to 0$ при $x \to \infty$.

Это решение может быть найдено с помощью небольшого обобщения метода инвариантных подпространств.

Напомним суть метода инвариантных подпространств [16].

Пусть дано нелинейное эволюционное уравнение

$$u_t = A(u),$$

где A - квазилинейный оператор, $x \in R^N, t \in R$. Подпространство

$$W_{s+1} = L\{1, f_1, \ldots, f_s\} \equiv \{v(x) : \text{существуют коэффициенты}$$
$$\{C_k\} \in R^{s+1} \text{ такие, что } v(x) = C_0 + C_1 f_1 + \ldots + C_s f_s\},$$

где гладкие базисные функции $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ линейно независимы и $L\{\cdot\}$ обозначает линейную оболочку векторов, называется инвариантным относительно оператора A, если

$$A(W_{s+1}) \subseteq W_{s+1}.$$

Очевидно, что на инвариантном подпространстве W_{s+1} исходное уравнение становится динамической системой $(s+1)$-го порядка относительно коэффициентов $\{C_k(t)\}$ разложения $u(x,t)$ по базису W_{s+1}:

$$u(x,t) = C_0(t) + C_1(t)f_1(x) + \ldots + C_s(t)f_s(x).$$

Вернемся к обсуждаемому решению. Действительно, преобразование $u = e^v$ приводит уравнение (1.31) к виду

$$v_t = e^{-v}v_{xx} + kv.$$

Очевидно, линейное подпространство $W = \{1, x\}$, образованное функциями 1 и x, инвариантно относительно нелинейного оператора $A(v) = e^{-v}v_{xx}$. Из этого следует, что уравнение (1.31) имеет указанное решение.

Подставляя (1.29) в уравнение

$$u_t = (u^q u_x)_x + su + ru^{-q},$$

мы находим решение

$$u = e^{st}\left(ax + b - \frac{r}{s(q+1)}\exp\left(-s(q+1)t\right)\right)^{\frac{1}{q+1}},$$

где $a, b \in R$. Если q удовлетворяет условию $q > -1$, то решение является регулярным. Приведенное решение также может быть найдено обобщенным методом инвариантных подпространств.

Рассмотрим теперь некоторые дифференциальные связи третьего порядка. Начнем с уравнения

$$u_t = (u^q u_x)_x + su + ru^{1-q} + \frac{n(q+1)}{q^2}u^{q+1}, \qquad n \in R. \tag{1.32}$$

Как указано выше, это уравнение совместно со следующей дифференциальной связью

$$u_3 + \frac{3(q-1)}{u} u_1 u_2 + (q^2 - 3q + 2)\frac{u_1^3}{u^2} + n u_1 = 0. \qquad (1.33)$$

Сделаем замену зависимой переменной $v = u^q$, тогда уравнения (1.32) и (1.33) перепишутся в виде

$$v_t = v v_{xx} + \frac{1}{q} v_x^2 + \frac{n(q+1)}{q} v^2 + sqv + rq, \qquad (1.34)$$

$$v_3 + n v_1 = 0. \qquad (1.35)$$

Если $n \geq 0$ совместное решение системы (1.34), (1.35) приводит к решениям, найденным Галактионовым [39] методом инвариантных подпространств.

Построим решение уравнения (1.34) при $n = -1, q = -1$ и $r = 0$. В этом случае решение имеет представление

$$v(x,t) = a + be^x + ce^{-x}, \qquad (1.36)$$

где функции a, b, c имеют вид

$$a = a_1 \operatorname{tg}(pr_1 e^{r_1 t} + m) e^{r_1 t},$$

$$b = a_2 e^{r_1 t} / \cos(pr_1 e^{r_1 t} + m),$$

$$c = a_3 e^{r_1 t} / \cos(pr_1 e^{r_1 t} + m),$$

где $a_1 = pr_1^2,\ a_3 = p^2 r_1^4 / 4a_2,\ r_1 = -s$ и p, a_2, m - произвольные константы.

Рассмотрим специальный случай уравнения (1.32)

$$u_t = (u^{-1/2} u_x)_x + mu - 2k\sqrt{u}, \qquad m, k \in R \qquad (1.37)$$

и соответствующую дифференциальную связь

$$h = u_3 - \frac{5u_1 u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + k u_1 + s e^{mt/2} u^{1/2}. \qquad (1.38)$$

Используя уравнение (1.37), мы можем переписать уравнение (1.38) в виде

$$(\ln u)_{tx} + s e^{mt/2} u^{-1} = 0.$$

Сделаем замену $w = \ln(e^{mt/2} u^{-1})$, тогда последнее уравнение примет вид уравнения Лиувилля

$$w_{tx} = se^{w}.$$

Общее решение уравнения Лиувилля хорошо известно

$$w = \ln \frac{2T'X'}{s(T+X)^2},$$

что для функции u дает

$$u = \frac{s(T+X)^2}{2T'X'} e^{mt/2}, \tag{1.39}$$

где T и X произвольные функции от t и x соответственно.

Последнее представление приводит к следующему виду решения уравнения (1.37)

$$u = (a_1 + a_2 e^{mt/2})^2, \tag{1.40}$$

где a_1, a_2 есть функции x, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$a_{1_{xx}} + a_1^2 m/2 - a_1 k = 0, \tag{1.41}$$

$$a_{2_{xx}} + a_1 a_2 m/2 - a_2 k = 0. \tag{1.42}$$

Покажем это. Подставим представление функции (1.39) в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned}
&s(X+T)(X')^{-1}e^{mt/2} - \frac{s}{2}(X+T)^2(X')^{-1}(T')^{-2}T''e^{mt/2} - \\
&- \frac{ms}{4}(X+T)^2(X')^{-1}(T')^{-1}e^{mt/2} - \\
&- \frac{3}{2}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(X+T)(X')^{-5/2}(X'')^2(T')^{-1/2}e^{mt/4} + \\
&+ \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(X+T)(X')^{-3/2}X'''(T')^{-1/2}e^{mt/4} + \\
&+ 2k\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(X+T)(X')^{-1/2}(T')^{-1/2}e^{mt/4} = 0.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

После очевидных преобразований последнее уравнение можно представить в виде

$$P(t) - XQ(t) + R(x) = 0, \tag{1.44}$$

где функции $P(t), Q(t), R(x)$ выражаются следующим образом

$$P(t) = \sqrt{2s}(T')^{1/2}e^{mt/4} - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}T(T''(T')^{-3/2} + \frac{m}{2}(T')^{-1/2})e^{mt/4},$$

$$Q(t) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(T''(T')^{-3/2} + \frac{m}{2}(T')^{-1/2})e^{mt/4},$$

$$R(x) = -\frac{3}{2}(X')^{-3/2}(X'')^2 + (X')^{-1/2}X''' + 2k(X')^{1/2}.$$

Уравнение (1.44) может удовлетвориться, если $Q(t) = 0$. Последнее условие есть уравнение на функцию T

$$T'' + \frac{m}{2}T' = 0,$$

которое легко интегрируется

$$T = -\frac{2}{m}e^{-mt/2} + \alpha, \qquad \text{где } \alpha \in R.$$

Подставляя найденное решение для T в функцию u (1.39) получаем искомое представление.

Второй случай, когда функция

$$Q(t) = \alpha, \qquad \text{где } \alpha \in R \ \text{ и } \ \alpha \neq 0,$$

приводит к следующему уравнению для T

$$T'' + \frac{m}{2}T' = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{s}}e^{-mt/4}.$$

Последнее уравнение также легко интегрируется

$$T(t) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}\alpha}(\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{s}}e^{-mt/2} + \delta)^{-1} + \gamma, \qquad \text{где } \delta, \gamma \in R.$$

Указанная функция T задает следующее представление

$$u = (a_1(x)e^{-mt/4} + a_2(x)e^{mt/4})^2.$$

Однако, подстановка последнего выражения приводит к тривиальному решению

$$a_1(x) = 0, \qquad a_2(x) = 0.$$

Отметим, что решение для T из первого случая не получается предельным переходом $\alpha \to 0$ из второго. Кроме этого, для обоих решений T функция $P(t) = const$.

Вернемся к системе (1.41), (1.42). При произвольных m и k решения системы для a_1 и a_2 выражаются в терминах функций Вейерштрасса и Ламе соответственно [34]. Вместе с тем, если $m = 12$ и $k = 4$ функции

$$a_1 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,(x)},$$

$$a_2 = \frac{a}{\mathrm{ch}^2\,(x)} + \frac{b}{\mathrm{ch}^2\,(x)}\left(\frac{\mathrm{sh}\,(4x)}{32} + \frac{\mathrm{sh}\,(2x)}{2} + \frac{3x}{8}\right), \qquad a, b \in R$$

удовлетворяют уравнениям (1.41) и (1.42).

Рассмотрим теперь уравнение (1.37) при $k = 0$ и соответствующую дифференциальную связь

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + re^{-3mt/2}u^{5/2} + se^{mt/2}u^{1/2}. \tag{1.45}$$

Используя уравнение (1.37), дифференциальную связь можно переписать в виде

$$(\ln u)_{tx} + re^{-3mt/2}u + se^{mt/2}u^{-1} = 0. \tag{1.46}$$

Аналогично предыдущему рассмотрению при помощи замены

$$w = \ln\,(e^{-3mt/2}u)$$

последнее уравнение приводится к виду

$$w_{tx} + re^{w} + se^{-w-mt} = 0. \tag{1.47}$$

Интересно отметить, что приведенное уравнение можно свести к так называемому уравнению sh-Гордона. Действительно, умножим уравнение на $e^{mt/2}$ и введем новую функцию $z = w + mt/2$ и независимую переменную $y = e^{-mt/2}x$. Тогда, если положить $r = -1$, а $s = 1$, уравнение (1.47) примет вид

$$z_{ty} = shz.$$

Если положить $s = 0$, то общим решением (1.47) будет

$$u = -\frac{2T'X'}{(T+X)^2}e^{3mt/2},$$

где T и X произвольные функции t и x соответственно. Подстановка этого представления в уравнение (1.37) приводит к уравнению

$$\sqrt{-2/r}e^{3mt/4}(-m(T')^{1/2}(T+X) - 2(T')^{-1/2}T''(T+X) + 4(T')^{3/2}) =$$

$$= -2X'''(X')^{-3/2}(T+X)^2 + 8X''(X')^{-1/2}(T+X) -$$

$$-8(X')^{3/2} + (X'')^2(X')^{-5/2}(T+X)^2.$$

Покажем, что функции T и X удовлетворяют предыдущему соотношению, если они являются решениями дифференциальных уравнений

$$(X')^3 = (c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0)^2, \tag{1.48}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^3 = A(-c_3T^3 + c_2T^2 - c_1T + c_0)^2, \tag{1.49}$$

где c_3, c_2, c_1 и c_0 - произвольные константы, $A = -2r$, а $\tau = -(2/m)e^{-mt/2}$. Перепишем исходное уравнение в более удобном для анализа виде

$$P + QX - R - ST - FT^2 = 0, \tag{1.50}$$

где введены следующие функции: P, Q и R, S, F от t и x соответственно

$$P = f(-m(T')^{1/2}T - 2(T')^{-1/2}T''T + 4(T')^{3/2}), \tag{1.51}$$

где $f = \sqrt{-2/r}e^{3mt/4}$,

$$Q = f(-m(T')^{1/2} - 2(T')^{-1/2}T''), \tag{1.52}$$

$$R = -2X'''(X')^{-3/2}X^2 + 8X''(X')^{-1/2}X - 8(X')^{3/2} + (X'')^2(X')^{-5/2}X^2, \tag{1.53}$$

$$S = -4X'''(X')^{-3/2}X + 8X''(X')^{-1/2} + 2(X'')^2(X')^{-5/2}X, \tag{1.54}$$

$$F = -2X'''(X')^{-3/2} + (X'')^2(X')^{-5/2}. \tag{1.55}$$

Уравнение (1.50) является суммой пяти попарных произведений функций от t

и x. Наша задача состоит в том, чтобы редуцировать уравнение (1.50) к обыкновенным дифференциальным уравнениям, связывающим функции P, Q или R, S, F.

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ - набор k-функций одной независимой переменной. Обозначим через $\rho(f_1, \ldots, f_k)$ максимальное число линейно независимых функций среди $f_1, \ldots, f_k$. Для существования решения (1.50) необходимо, чтобы $\rho(\sigma)+\rho(\kappa) \leq 5$, где через σ и κ обозначены соответствующие наборы функций из соотношения (1.50): $\sigma = \{1, T, T^2, P, Q\}$ и $\kappa = \{1, X, R, S, F\}$. Отсюда следует, что либо $\rho(\sigma)$, либо $\rho(\kappa)$ не превышает 2.

Пусть $\rho(\sigma)$ меньше либо равен 2. Возможны два случая:
1) функции $\{1, T\}$ являются линейно зависимыми, то есть $a_0 + a_1 T = 0$, где a_0, a_1 - константы, не все равные нулю;
2) все функции системы выражаются через функции $\{1, T\}$.
Первый и второй случаи приводят к $T = \alpha$, где α - константа, а $\rho(\sigma)$=1. Вывод из первого случая, что T есть константа очевиден. Далее, пусть теперь все функции системы выражаются через функции $\{1, T\}$. Тогда $T^2 = a_1 + a_2 T$, откуда вновь получаем, что T - константа. Данный результат показывает, что $\rho(\sigma)$ равно либо 3 либо 4 и наше исходное предположение приводит к тривиальному результату. Пусть теперь $\rho(\sigma)$=3. Все функции системы выражаются через $\{1, T, T^2\}$. Имеем

$$Q = f(-m(T')^{1/2} - 2(T')^{-1/2}T'') = a_0 + a_1 T + a_2 T^2, \tag{1.56}$$

$$P = f(-m(T')^{1/2}T - 2(T')^{-1/2}T''T + 4(T')^{3/2}) = b_0 + b_1 T + b_2 T^2, \tag{1.57}$$

где $a_i, b_i \in R$.

Подставим выражение для функции Q из уравнения (1.56) в уравнение (1.57), получим

$$4f(T')^{3/2} = b_0 + (b_1 - a_0)T + (b_2 - a_1)T^2 - a_2 T^3. \tag{1.58}$$

Очевидная замена $\tau = -(2/m)e^{-mt/2}$ приводит последнее уравнение к следующему

$$4\sqrt{-2/r}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^{3/2} = b_0 + (b_1 - a_0)T + (b_2 - a_1)T^2 - a_2 T^3. \tag{1.59}$$

Случай $\rho(\sigma)$ равно 4 приводит к постоянной функции X, так как $\rho(\kappa)$=1 и из рассмотрения исключается.

Учитывая вышеизложенное, пусть $\rho(\kappa)$ не превышает 2. Аналогично рассмотрению для функции T возможны два случая:
1) функции $\{1, X\}$ являются линейно зависимыми, то есть $d_0 + d_1X = 0$, где d_0, d_1 - константы, не все равные нулю;
2) все функции системы выражаются через функции $\{1, X\}$.
Первый случай приводит к $X = const$ и нас не интересует.

Рассмотрим второй случай.

Функции F, S и R линейно выражаются через $1, X$, то есть

$$F = -2X'''(X')^{-3/2} + (X'')^2(X')^{-5/2} = \alpha_0 + \alpha_1 X, \tag{1.60}$$

$$S = -4X'''(X')^{-3/2}X + 8X''(X')^{-1/2} + 2(X'')^2(X')^{-5/2}X = \beta_0 + \beta_1 X, \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned} R = -2X'''(X')^{-3/2}X^2 + 8X''(X')^{-1/2}X - 8(X')^{3/2} + \\ + (X'')^2(X')^{-5/2}X^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Подставим (1.60) в (1.61),

$$2\alpha_1 X + 2\alpha_1 X^2 + 8X''(X')^{-1/2} = \beta_0 + \beta_1 X,$$

откуда

$$8X''(X')^{-1/2} = \beta_0 + (\beta_1 - 2\alpha_0)X - 2\alpha_1 X^2, \tag{1.63}$$

Далее, подставляя полученное выражение для $8X''(X')^{-1/2}$ и (1.60) в (1.62) получим

$$-8(X')^{3/2} = \gamma_0 + (\gamma_1 - \beta_0)X + (\alpha_0 - \beta_1)X^2 + \alpha_1 X^3. \tag{1.64}$$

Найдем связь между константами. Для этого подставим выражения (1.56), (1.57), (1.60), (1.61) и (1.62) для функций P, Q, R, S, F в исходное уравнение (1.50). В результате получим полином относительно T, X, TX, T^2, T^2X. Приравнивая коэффициенты полинома к нулю (напомним, функции $1, T, T^2$ и $1, X$ линейно независимы) найдем, что

$$\gamma_0 = b_0, \qquad \beta_0 = b_1, \qquad \alpha_0 = b_2,$$

$$\beta_1 = a_1, \qquad \alpha_1 = a_2, \qquad \gamma_1 = a_0.$$

Учитывая данные отношения между константами уравнения (1.59) и (1.64) перепишутся в виде

$$4\sqrt{-2/r}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^{3/2} = b_0 + (b_1 - a_0)T + (b_2 - a_1)T^2 - a_2T^3, \tag{1.65}$$

$$-8(X')^{3/2} = b_0 + (a_0 - b_1)X + (b_2 - a_1)X^2 + a_2X^3. \tag{1.66}$$

Или

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^{3/2} = \sqrt{-2r}\left(\frac{b_0}{8} + \frac{(b_1 - a_0)}{8}T + \frac{(b_2 - a_1)}{8}T^2 - \frac{a_2}{8}T^3\right), \tag{1.67}$$

$$(X')^{3/2} = -\frac{b_0}{8} + \frac{(b_1 - a_0)}{8}X + \frac{(a_1 - b_2)}{8}X^2 - \frac{a_2}{8}X^3. \tag{1.68}$$

Введем новые постоянные

$$c_0 = -\frac{b_0}{8}, \qquad c_1 = \frac{(b_1 - a_0)}{8},$$

$$c_2 = \frac{(a_1 - b_2)}{8}, \qquad c_3 = -\frac{a_2}{8}.$$

Окончательно получим

$$(X')^3 = (c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0)^2, \tag{1.69}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^3 = A(-c_3T^3 + c_2T^2 - c_1T + c_0)^2. \tag{1.70}$$

Решения (1.69) и (1.70) могут быть выражены через функцию Вейерштрасса. Действительно, запишем (1.69) и (1.70) в следующей форме

$$(X')^3 = (c_3(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3))^2, \tag{1.71}$$

$$(T')^3 = A(-c_3(T - \alpha_1)(T - \alpha_2)(T - \alpha_3))^2. \tag{1.72}$$

Заменяя в (1.71) $X - \alpha_1$ на $1/Y$ получим

$$(Y')^3 + B^2(Y - b_1)^2(Y - b_2)^2 = 0,$$

где

$$B = c_3(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \qquad b_2 = \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1}.$$

Вводя новую функцию Z, такую, что $Z^3 = B(Y - b_1)(Y - b_2)$ мы получаем уравнение

$$(Z')^2 + \frac{4B}{9}Z^3 + \frac{B^2(b_1 - b_2)^2}{9} = 0. \tag{1.73}$$

Решение последнего уравнения выражается через функцию Вейерштрасса. Проводя аналогичную процедуру с уравнением (1.70) мы получим уравнение вида (1.73).

2 Глава

Преобразования Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка

2.1 Построение преобразования Эйлера-Дарбу и высших преобразований Эйлера-Дарбу

В одномерном случае уравнение Фоккера-Планка имеет следующий вид [9]:

$$u_t = (Fu)_{xx} + (Gu)_x. \tag{2.1}$$

Здесь используются обозначения $f_x = f' = \frac{\partial f}{\partial x}$.
Коэффициенты G и F есть дифференцируемые функции от x и могут быть любыми с единственным физическим ограничением $F(x) > 0$. Далее также считаем, что все функции дифференцируемы необходимое количество раз.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Преобразование Эйлера-Дарбу, заданное соотношением*

$$v(x,t) = (G + F' + F\frac{w_x}{w})(u_x - \frac{w_x}{w}u), \tag{2.2}$$

переводит решения уравнения (2.1) в решения уравнения

$$v_t = (Fv)_{xx} + (G_1 v)_x, \tag{2.3}$$

где

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x \tag{2.4}$$

и

$$P = \frac{w}{Fw_x + (F' + G)w}, \tag{2.5}$$

а функция $w(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(Fw)_{xx} + (Gw)_x + cw = 0, \qquad \text{где } c \in R. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для краткости введем следующие обозначения для преобразования Эйлера-Дарбу

$$v = \hat{L}u = \frac{1}{P}(u_x + su),$$

здесь пока P - произвольная функция от x, и

$$\hat{A}u = Fu_{xx} + (G + 2F')u_x + (G' + F'')u,$$

$$\hat{A}_1 u = F_1 u_{xx} + (G_1 + 2F_1')u_x + (G_1' + F_1'')u.$$

Тогда в этих обозначениях исходные уравнения (2.1) и (2.3) запишутся как

$$\hat{A}u = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{и} \qquad \hat{A}_1 v = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Второе уравнение можно переписать, с учетом введенных обозначений, в следующей форме $\hat{A}_1\hat{L}u = \frac{\partial}{\partial t}\hat{L}u$. Так как операторы $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\hat{L}$ коммутируют, то последнее уравнение приводится к виду

$$\hat{A}_1\hat{L}u - \hat{L}\hat{A}u = 0.$$

Левая часть последнего уравнения является полиномом относительно u_{xxx}, u_{xx}, u_x, u. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при u_{xxx}, u_{xx} получаем соответственно

$$F_1 = F \qquad \text{и} \qquad G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при u_x, u, с учетом найденных F_1 и G_1, получаем:

$$\frac{2}{P}Fs' + \frac{1}{P}F's + \left(\frac{P'}{P^2}\right)' F - \frac{P'}{P^2}F' - \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G - \frac{1}{P}G' = 0, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{P}Fs'' + \frac{1}{P}(3F' + G) + \\ + \left[\left(\frac{P'}{P^2}\right)' F - \frac{P'}{P^2}F' + \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G\right] s - \frac{1}{P}(G'' + F''') = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что при

$$P = \frac{w}{Fw_x + (F' + G)w} \qquad \text{и} \qquad s = -\frac{w_x}{w}$$

уравнения (2.7) и (2.8) сводятся к соотношению

$$[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w]_x -$$

$$-\frac{w_x}{w}[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w] = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно, при условии, что функция w удовлетворяет уравнению (2.6).

Если известно k решений $w_1, \ldots, w_k$ уравнения (2.6) для различных $c_1, \ldots, c_k$, то можно построить преобразование Эйлера-Дарбу порядка k.

Теорема 2.2. *Пусть $w_1, \ldots, w_k$ - решения уравнения (2.6), соответствующие различным постоянным $c_1, \ldots, c_k$. Тогда преобразование*

$$u_k = \frac{W(H_1, \ldots, H_k)}{W(w_1, \ldots, w_k)} \frac{W(u, w_1, \ldots, w_k)}{W(w_1, \ldots, w_k)} \tag{2.9}$$

переводит решения уравнения (2.1) в решения уравнения

$$(u_k)_t = (Fu_k)_{xx} + (G_k u_k)_x, \tag{2.10}$$

здесь $H_i = Fw_i' + (F' + G)w_i$, а $W(f_1, \ldots, f_k)$ - определитель Вронского для функций $f_1, \ldots, f_k$. При этом коэффициент задается формулой

$$G_k = G + kF' + 2F(\ln P)_x, \tag{2.11}$$

где $P = \dfrac{W(w_1, \ldots, w_k)}{W(H_1, \ldots, H_k)}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем и докажем три вспомогательных несложных утверждения.

Предложение 1.

Пусть даны функции

$z = z(x, t),\ u = u(x, t),\ h_i = h_i(x),\ w_i = w_i(x),\ Q = Q(x).$

Тогда, если

$$z = ue^Q \qquad \text{и} \qquad h_i = w_i e^Q,$$

то

$$W(z, h_1, \ldots, h_k) = W(u, w_1, \ldots, w_k) e^{(k+1)Q},$$

где W - определитель Вронского.

Доказательство. Прежде всего заметим, что все производные произведения $(fe^Q)^{(k)}$ выражается следующим образом

$$(fe^Q)^{(k)} = e^Q[f^{(k)} + a_k f^{(k-1)} + \ldots + a_1 f],$$

где a_i функции, зависящие от $Q, Q', \ldots, Q^{(k)}$. Теперь, используя два следующих свойства определителей:

1) величина определителя не меняется при прибавлении к элементам любой строки (столбца) соответствующих элементов какой-либо другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;

2) если элементы j-й строки (столбца) определителя n-го порядка D представлены в виде сумм $\sum\limits_{r=1}^{m} c_{r1}$, $\sum\limits_{r=1}^{m} c_{r2}$, $\ldots$, $\sum\limits_{r=1}^{m} c_{rn}$, то определитель D равен сумме $\sum\limits_{r=1}^{m} D_r$ определителей n-го порядка;

получаем требуемое выражение.

В качестве следствия доказанного Предложения 1 легко получить следующее выражение, которое нам так же понадобится

$$W(h_1', \ldots, h_k') = W(H_1, \ldots, H_k) e^{(kQ)},$$

где $H_i = w_i' + w_i Q'$, $h_i = H_i e^Q$.

Следующий необходимый факт связан с возможностью преобразования уравнения (2.1) в так называемое обратное уравнение Фоккера-Планка [17]

$$z_t = F z_{xx} + \widetilde{G} z_x \tag{2.12}$$

при помощи точечного преобразования

$$z = u \exp\left(\int \frac{F' + G}{F} dx\right).$$

При этом связь коэффициентов задается соотношением $\widetilde{G} = -G$.

Для полноты и замкнутости изложения следующие два утверждения приводим с доказательствами [24].

Предложение 2.

Преобразование Эйлера-Дарбу

$$z_1 = -\frac{h_1}{h_1'} z_x + z \tag{2.13}$$

переводит решения уравнения (2.12) в решения уравнения

$$(z_1)_t = F(z_1)_{xx} + \widetilde{G}_1(z_1)_x, \tag{2.14}$$

если коэффициент задается формулой

$$\widetilde{G}_1 = \widetilde{G} + F' + 2F(\ln(h_1'/h_1))', \tag{2.15}$$

а функция h_1 *удовлетворяет уравнению*

$$F(h_1)_{xx} + \widetilde{G}(h_1)_x + ch_1 = 0, \qquad \text{где } c \in R. \tag{2.16}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения для преобразования Эйлера-Дарбу

$$z_1 = \hat{L}z = -s\partial_x + 1$$

и

$$\hat{A}z = Fz_{xx} + \widetilde{G}z_x,$$

$$\hat{A}_1 z_1 = F_1(z_1)_{xx} + \widetilde{G}_1(z_1)_x.$$

Тогда исходные уравнения (2.12) и (2.14) запишутся как

$$\hat{A}z = \frac{\partial z}{\partial t} \qquad \text{и} \qquad \hat{A}_1 z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial t}.$$

Второе уравнение можно переписать, с учетом введенных обозначений, в следующей форме

$$\hat{A}_1 \hat{L} z = \frac{\partial}{\partial t} \hat{L} z.$$

Так как операторы $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\hat{L}$ коммутируют, то последнее уравнение приводится к виду

$$\hat{A}_1\hat{L}z - \hat{L}\hat{A}z = 0.$$

Левая часть последнего уравнения является полиномом относительно z_{xxx}, z_{xx}, z_x. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при z_{xxx}, z_{xx} получаем соответственно

$$F_1 = F \qquad \text{и} \qquad \widetilde{G}_1 = \widetilde{G} + F' - 2Fs_x/s = \widetilde{G} + F' + 2F(\ln(h_1'/h_1))'.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при z_x, с учетом найденных F_1 и G_1, получаем

$$Fs_{xx} + (\widetilde{G} + F')s_x - 2Fs_x^2/s + 2Fs_x/s - s\widetilde{G}' - F = 0.$$

При $s = h_1/h_1'$ последнее уравнение, умноженное на h_1'/h_1, переписывается в виде

$$F\frac{h_1''}{h_1} + \widetilde{G}\frac{h_1'}{h_1} - F\frac{h_1'''}{h_1'} - \widetilde{G}\frac{h_1''}{h_1'} - \widetilde{G}' - F\frac{h_1''}{h_1'} = 0,$$

которое, очевидно, в свою очередь, приводится к виду

$$\frac{1}{h_1}(F(h_1)_{xx} + \widetilde{G}(h_1)_x + ch_1) - \frac{1}{h_1'}(F(h_1)_{xx} + \widetilde{G}(h_1)_x + ch_1)_x = 0$$

из которого следует его тождественное выполнение, когда функция h_1 удовлетворяет уравнению (2.16).

И последнее необходимое утверждение, связанное с высшими операторами Эйлера-Дарбу.

Предложение 3.

Преобразование Эйлера-Дарбу

$$z_k = \frac{W(z, h_1, \ldots, h_k)}{W(h_1', \ldots, h_k')} \tag{2.17}$$

переводит решения уравнения (2.12) в решения уравнения

$$(z_k)_t = F(z_k)_{xx} + \widetilde{G}_k(z_k)_x, \tag{2.18}$$

где $\widetilde{G}_k$ задается формулой

$$\widetilde{G}_k = \widetilde{G} + kF' + 2F\partial_x \left(\ln \frac{W(h_1', \dots, h_k')}{W(h_1, \dots, h_k)} \right). \tag{2.19}$$

а функции h_i являются решениями уравнения

$$F(h_i)_{xx} + \widetilde{G}(h_i)_x + ch_i = 0, \qquad \text{где } c \in R, \tag{2.20}$$

и W - определитель Вронского.

Доказательство.

Введем линейный оператор

$$\mathcal{L}_h = -\frac{h}{h'}\partial_x + 1,$$

соответствующий преобразованию (2.13). Предположим, что известны решения $h_1, \dots, h_N$ уравнения (2.20) при некоторых $c_1, \dots, c_N$. Определим рекуррентным способом последовательность функций и операторов

$$\begin{gathered} p_1 = h_1, p_2 = \mathcal{L}_{p_1}h_2, \dots, p_N = \mathcal{L}_{p_{N-1}} \dots \mathcal{L}_{p_1}h_N, \\ \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{p_1}, \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{p_2}\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N = \mathcal{L}_{p_N}\mathcal{M}_{N-1}. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Каждый оператор $\mathcal{M}_k$ имеет вид [4]

$$\mathcal{M}_k = a_k\partial_x^k + a_{k-1}\partial_x^{k-1} + \dots + 1, \tag{2.22}$$

где a_i - функция от x.

Если $h_1, \dots, h_N$ - линейно независимы, то при любом $k \le N$ они составляют фундаментальную систему решений уравнения

$$\mathcal{M}_k z = 0. \tag{2.23}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$W(z, h_1, \dots, h_k) = 0,$$

где W - вронскиан. Поскольку коэффициент при z в (2.23) равен единице, разлагая вронскиан по первому столбцу и разделив его на $W(h_1', \dots, h_k')$, получаем равенство

$$\mathcal{M}_k z = \frac{W(z, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}. \tag{2.24}$$

Как следует из предложения 2, функции $\widetilde{G}_i$ и $\widetilde{G}_{i+1}$ связаны соотношением

$$\widetilde{G}_{i+1} = \widetilde{G}_i + F' + 2F(\ln(h_i'/h_i))'. \tag{2.25}$$

Значит функция $\widetilde{G}_k$ представляется в виде

$$\widetilde{G}_k = \widetilde{G} + kF' + 2F\partial_x \left(\ln \frac{h_1' \cdot \ldots \cdot h_k'}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_k} \right). \tag{2.26}$$

Теперь необходимо вычислить произведение

$$R = \frac{h_1' \cdot \ldots \cdot h_k'}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_k}.$$

По построению оператора $\mathcal{M}_k$ справедливо представление

$$\mathcal{M}_k z = \left(-\frac{h_k}{h_k'}\partial_x + 1 \right) \ldots \left(-\frac{h_1}{h_1'}\partial_x + 1 \right) z.$$

Следовательно, коэффициент при старшей производной равен $(-1)^k/R$. С другой стороны, как показано выше, выражение $\mathcal{M}_k z$ равно

$$\frac{W(z, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}.$$

Поэтому коэффициент при $\partial_x^k z$ имеет вид

$$(-1)^{k+1} \frac{W(h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}.$$

Таким образом, искомое R равно

$$-\frac{W(h_1', \dots, h_k')}{W(h_1, \dots, h_k)}$$

и предложение доказано.

Замечание. Поскольку функция h_i $(i = 1, \dots, k)$ удовлетворяет уравнению (2.20) с параметром $c = c_i$, оператор $\mathcal{M}_k$ зависит от $c_1, \dots, c_k$. Если некоторые параметры $c_j, \dots, c_{j+m}$ стремятся к одной величине b, то в соответствии с методом Даламбера [18], необходимо в соответствующих формулах заменить $h_{j+1}, \dots, h_{j+m}$ на $\partial_b h_j, \dots, \partial_b^m h_j$.

Уравнение (2.18) с помощью преобразования

$$u_k = z_k \exp\left(-\int \frac{F' - \widetilde{G}_k}{F} dx\right) \tag{2.27}$$

переводится в уравнение (2.10).

Зная связь функций u и z, u_k и z_k, а также h_i и w_i, имеющую тот же вид

$$h_i = w_i \exp\left(\int \frac{F' + G}{F} dx\right),$$

не трудно из выражений (2.17), (2.19) и (2.27) получить формулы (2.9) и (2.11), используя доказанные выше предложения. Теорема доказана.

2.2 Построение противоположного преобразования Эйлера-Дарбу и обобщение на многомерный случай частного вида

Преобразование Эйлера-Дарбу, переводящее уравнение (2.3) в уравнение (2.1), будем называть противоположным преобразованию (2.2). Результат построения противоположного преобразования содержится в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть задано преобразование Эйлера-Дарбу, переводящее решения уравнения (2.1) в решения уравнения (2.3). Тогда преобразование Эйлера-Дарбу, задаваемое соотношением*

$$u(x,t) = (G_1 + F' + F\frac{w_1'}{w_1})(v_x - \frac{w_1'}{w_1}v) \tag{2.28}$$

переводит решения уравнения (2.3) в решения уравнения (2.1) если

$$w_1 = \frac{1}{Fw}\left(\frac{w_x}{w} + \frac{F' + G}{F}\right) \exp\left(-\int \frac{G}{F} dx\right), \tag{2.29}$$

где G_1 и P задаются соотношениями (2.4) и (2.5) соответственно.

Доказательство. Условия того, что преобразования (2.2) и (2.28) являются противоположными имеют вид

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x, \tag{2.30}$$

$$G = G_1 + F' + 2F(\ln P_1)_x, \tag{2.31}$$

где функция P_1 задается следующим выражением

$$P_1 = \frac{w_1}{Fw_1' + (F' + G_1)w_1}.$$

Совместное решение уравнений (2.30) и (2.31), с учетом соотношения

$$(Fw_x + (F' + G)w)_x = -cw,$$

приводит к функции w_1, имеющей вид (2.29).

Например, уравнение

$$v_t = a^2 v_{xx} + (G_1 v)_x, \tag{2.32}$$

где коэффициент G_1 задается выражением (2.39) либо (2.49), противоположным преобразованием сводится к уравнению теплопроводности, при этом, с точки зрения групповой классификации, указанные уравнения не являются эквивалентными.

Действительно, рассмотрим уравнение Фоккера-Планка

$$v_\tau = v_{xx} + (G_1 v)_x \tag{2.33}$$

с коэффициентом переноса (2.39). Уравнение (2.33) допускает четырехмерную алгебру инвариантности [29]. Вместе с тем, уравнение теплопроводности допускает шестимерную алгебру инвариантности, что и доказывает факт неэквивалентности уравнения (2.33) и уравнения теплопроводности с точки зрения групповой классификации.

Отметим, что композиция прямого преобразования Эйлера-Дарбу и противоположного в общем случае не является тождественным преобразованием (что и объясняет применение нестандартной терминологии). Вместе с тем, наличие противоположного преобразования (2.28) позволяет разбить множество уравнений Фоккера-Планка на классы эквивалентности относительно преобразований Эйлера-Дарбу.

Преобразование Эйлера-Дарбу может быть использовано для построения решений многомерных уравнений Фоккера-Планка некоторого частного вида.

Для выяснения вида многомерного уравнения Фоккера-Планка, следуя работе [24], обобщим теорему 2.1.

Теорема 2.4. *Преобразование Эйлера-Дарбу*

$$v(x,t) = (G + F' + F\frac{w_x}{w})(u_x - \frac{w_x}{w}u)$$

переводит решения уравнения

$$(Fu)_{xx} + (Gu)_x = \hat{B}u \tag{2.34}$$

в решения уравнения

$$(Fv)_{xx} + (G_1 v)_x = \hat{B}v, \tag{2.35}$$

где $\hat{B}$ - дифференциальный оператор по переменным $y_1, \ldots, y_n$ вида

$$\hat{B} = \sum_{|\alpha|>0}^{N} b_\alpha(y)\partial_y^\alpha,$$

$$\partial_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{y_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{y_n}^{\alpha_n}},\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) - \text{целочисленный мультииндекс},$$

коэффициент G_1 имеет вид (2.4) с функцией P, задаваемой соотношением (2.5), а функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6).

Доказательство. Введем следующие обозначения для преобразования Эйлера-Дарбу

$$v = \hat{L}u = \frac{1}{P}(u_x + su)$$

и

$$\hat{A}u = Fu_{xx} + (G + 2F')u_x + (G' + F'')u,$$

$$\hat{A}_1 u = F_1 u_{xx} + (G_1 + 2F_1')u_x + (G_1' + F_1'')u,$$

Тогда исходные уравнения (2.34) и (2.35) запишутся как

$$\hat{A}u = \hat{B}u \qquad \text{и} \qquad \hat{A}_1 v = \hat{B}v.$$

Второе уравнение можно переписать, с учетом введенных обозначений, в следующей форме

$$\hat{A}_1\hat{L}u = \hat{B}\hat{L}u.$$

Так как операторы $\hat{B}$ и $\hat{L}$ коммутируют, то последнее уравнение приводится к виду

$$\hat{A}_1\hat{L}u - \hat{L}\hat{A}u = 0.$$

Левая часть последнего уравнения является полиномом относительно u_{xxx}, u_{xx}, u_x, u. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при u_{xxx}, u_{xx} получаем, соответственно,

$$F_1 = F \qquad \text{и} \qquad G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при u_x, u, с учетом найденных F_1 и G_1, получаем

$$\frac{2}{P}Fs' + \frac{1}{P}F's + \left(\frac{P'}{P^2}\right)'F - \frac{P'}{P^2}F' - \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G - \frac{1}{P}G' = 0, \tag{2.36}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{P}Fs'' + \frac{1}{P}(3F' + G) + \left[\left(\frac{P'}{P^2}\right)'F - \frac{P'}{P^2}F' + \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G\right]s- \\ -\frac{1}{P}(G'' + F''') = 0.\end{gathered} \tag{2.37}$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что при

$$P = \frac{w}{Fw_x + (F' + G)w} \qquad \text{и} \qquad s = -\frac{w_x}{w}$$

уравнения (2.36) и (2.37) сводятся к соотношению

$$[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w]_x-$$

$$-\frac{w_x}{w}[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w] = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно, при условии, что функция w удовлетворяет уравнению (2.6).

Условие теоремы 2.4 подсказывает, что группировкой соответствующих членов уравнения и последовательным применением преобразований Эйлера-Дарбу по различным переменным можно строить решения многомерных уравнений

Фоккера-Планка, имеющих вид

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (F_i(x)u)_{x_i x_i} + (G_i(x)u)_{x_i},$$

при этом функции F_i и G_i могут зависеть только от переменной x_i. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пусть исходным уравнением будет трехмерное уравнение диффузии

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \qquad \textit{где } a \in R. \tag{2.38}$$

Перепишем уравнение (2.38) в следующем виде

$$u_t - a^2(u_{yy} + u_{zz}) = a^2 u_{xx}$$

или в наших обозначениях

$$\hat{B}u = a^2 u_{xx}.$$

Тогда, совершая преобразование Эйлера-Дарбу по переменной x, получим преобразованное уравнение

$$v_t - a^2(v_{yy} + v_{zz}) = a^2 v_{xx} + (G_1(x)v)_x.$$

Повторяя последовательно процедуру по переменным y и z получим следующее преобразованное трехмерное уравнение Фоккера-Планка

$$h_t = a^2(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}) + (G_1(x)h)_x + (G_2(y)h)_y + (G_3(z)h)_z,$$

при этом вид коэффициентов G_i зависит от выбранного решения соответствующего уравнения (2.6).

2.3 Построение решений уравнения Фоккера-Планка

Используя результаты раздела 2.1 построим решение одномерного уравнения Фоккера-Планка, удовлетворяющее заданным краевым условиям.

В качестве "затравочного" уравнения возьмем уравнение диффузии

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Пусть в уравнении (2.6) константа $c = 0$. Тогда $w = c_1 + c_2 x$. Для коэффициента G_1 формула (2.4) дает:

$$G_1 = \frac{2a^2 c_2}{c_1 + c_2 x}, \tag{2.39}$$

а преобразованное уравнение имеет вид:

$$v_t = a^2 v_{xx} + (G_1 v)_x. \tag{2.40}$$

Потребуем, чтобы искомое решение уравнения (2.40) удовлетворяло следующим краевым условиям:

$$v(x, 0) = \delta(x - x_0), \tag{2.41}$$

$$v(x, t)|_{x \to \infty} = 0, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} (a^2 v_x + G_1 v)|_{x=0} = 0, \\ (a^2 v_x + G_1 v)|_{x \to \infty} = 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $\delta(x - x_0)$ - δ-функция Дирака.
При этом считаем, что при $x < 0$ функция $v(x, t) = 0$.

Данные условия предполагают поиск решения уравнения (2.40) на полубесконечной прямой $x > 0$, ограниченной в точке $x = 0$ непроницаемой стенкой [17].

Для решения поставленной задачи переформулируем условия (2.41) -(2.43) для уравнения диффузии таким образом, чтобы решение $u(x, t)$, удовлетворяющее переформулированным условиям, при подстановке в формулу (2.2), давало функцию $v(x, t)$, удовлетворяющую нужным условиям.

Требуемыми условиями для функции $u(x, t)$ будут следующие.

$$a^2 \frac{w_x}{w}(u_x - \frac{w_x}{w} u)|_{t=0} = \delta(x - x_0), \tag{2.44}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{w_x}{w}u_{xx}+\left(\frac{w_{xx}}{w}-2\frac{w_x^2}{w^2}+\frac{G_1}{a^2}\frac{w_x}{w}\right)u_x+\\
&+\left(-2\frac{w_{xx}w_x}{w^2}+2\frac{w_x^3}{w^3}-\frac{G_1}{a^2}\frac{w_x^2}{w^2}\right)u|_{x=0}=0,\\
&\frac{w_x}{w}u_{xx}+\left(\frac{w_{xx}}{w}-2\frac{w_x^2}{w^2}+\frac{G_1}{a^2}\frac{w_x}{w}\right)u_x+\\
&+\left(-2\frac{w_{xx}w_x}{w^2}+2\frac{w_x^3}{w^3}-\frac{G_1}{a^2}\frac{w_x^2}{w^2}\right)u|_{x\to\infty}=0.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Условиям (2.44) и (2.45) соответствуют соотношения (2.41) и (2.43). Выполнение оставшихся условий проверяется непосредственно после построения функции $v(x,t)$.

Сначала рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.44).

Как хорошо известно, решение уравнения диффузии с начальными условиями дается формулой

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)d\xi. \tag{2.46}
$$

Для выполнения условия (2.44) необходимо потребовать, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$
a^2\frac{w_x}{w}(u_0'-\frac{w_x}{w}u_0)=\delta(x-x_0). \tag{2.47}
$$

Решением уравнения (2.47) является функция

$$
u_0=\frac{c_1+c_2x}{a^2c_2}\;\theta(x-x_0),
$$

где $\theta(x-x_0)$ - функция Хевисайда.

Теперь рассмотрим краевые условия (2.45) в точке $x=0$. Для этого запишем решение (2.46) в виде:

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[u_0(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)+u_0(-\xi)\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right]d\xi. \tag{2.48}
$$

Принимая во внимание, что коэффициенты при u_x и u в выражении (2.45) равны нулю, а

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right] \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) +$$

$$+u_0(-\xi) \left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x+\xi)^2}{4a^4t^2}\right] \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right) d\xi = 0.$$

условие (2.45) принимает вид:

$$u_{xx}|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right) \left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{\xi^2}{4a^4t^2}\right] (u_0(\xi) + u_0(-\xi)) d\xi = 0.$$

Положим $u_0(-\xi) = -u_0(\xi)$, тогда функция $u(x,t)$, удовлетворяющая краевому условию (2.45), равна

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right] d\xi.$$

Опуская промежуточные вычисления запишем выражение для функции $v(x,t)$ при $x > 0$.

$$\begin{aligned} v(x,t) = {} & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{c_1 + c_2 x_0}{c_1 + c_2 x} \left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2t}\right)\right) - \\ & - \frac{ac_2^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{(c_1 + c_2 x)^2} \left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2t}\right)\right) + \\ & + \frac{2c_1 c_2}{\sqrt{\pi}(c_1 + c_2 x)^2} \int\limits_{\frac{x+x_0}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Очевидно, что условия (2.42) и (2.43) при $x \to \infty$ выполняются, а функция $v(x,t)$ нормируема.

Аналогично рассматривается случай, когда $c = -n^2$ и

$$w = c_1 \exp(nx) + c_2 \exp(-nx),$$

при этом считаем $c_1 \neq c_2$. Тогда коэффициент G_1, согласно формуле (2.4), имеет

вид
$$G_1 = -\frac{8a^2nc_1c_2}{c_1^2\exp(2nx) - c_2^2\exp(-2nx)}. \tag{2.49}$$

Решение уравнения (2.47) дается формулой
$$u_0 = \frac{\theta(x-x_0)(c_1\exp(nx) + c_2\exp(-nx))}{a^2n(c_1\exp(nx_0) - c_2\exp(-nx_0))}.$$

Условие (2.43) в точке $x = 0$ имеет вид (коэффициент при u равен нулю):
$$u_{xx} + \beta u_x = 0,$$

где $\beta = -n\frac{c1+c2}{c1-c2}$, а функции u_{xx}, u_x, u соответственно
$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)\left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{\xi^2}{4a^4t^2}\right](u_0(\xi) + u_0(-\xi))d\xi,$$
$$u_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \frac{\xi}{2a^2t}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)(u_0(\xi) - u_0(-\xi))d\xi,$$

Будем искать функцию $u_0(-\xi)$ в виде $\theta(\xi - x_0)\bar{u}_0(-\xi)$, тогда вводя аналогичные обозначения для $u_0(\xi) = \theta(\xi - x_0)\bar{u}_0(\xi)$, функции u_{xx}, u_x перепишем так
$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_0}^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)\left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{\xi^2}{4a^4t^2}\right](\bar{u}_0(\xi) + \bar{u}_0(-\xi))d\xi,$$
$$u_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_0}^\infty \frac{\xi}{2a^2t}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)(\bar{u}_0(\xi) - \bar{u}_0(-\xi))d\xi.$$

Проинтегрируем функции u_{xx}, u_x по частям (функцию u_{xx} дважды), запишем условие (2.43)
$$\frac{x_0}{2a^2t}(\bar{u}_0(x_0) + \bar{u}_0(-x_0))\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right) + (\bar{u}_0'(x_0) + \bar{u}_0'(-x_0))\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right) +$$
$$+\beta(\bar{u}_0(x_0) - \bar{u}_0(-x_0))\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right) +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{\infty}[(\bar{u}_0''(\xi)+\bar{u}_0''(-\xi))+\beta(\bar{u}_0'(\xi)-\bar{u}_0'(-\xi))]\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)\,d\xi=0.$$

Введем функцию $\varphi(\xi)=\bar{u}_0(\xi)+\bar{u}_0(-\xi)$, тогда предыдущее выражение запишется в виде

$$\frac{x_0}{2a^2t}\varphi(x_0)\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right)+\varphi'(x_0)\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right)+$$

$$+\beta(2\bar{u}_0(x_0)-\varphi(x_0))\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2t}\right)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{\infty}[\varphi''(\xi)-\beta\varphi'(\xi)+2\beta\bar{u}_0'(\xi)]\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)\,d\xi=0.$$

Последнее уравнение удовлетворится, если функция $\varphi(\xi)$ будет решением уравнения

$$\varphi''(\xi)-\beta\varphi'(\xi)+2\beta\bar{u}_0'(\xi)=0 \tag{2.50}$$

со следующими условиями

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0)=0,\\&\varphi'(x_0)=-2\beta\bar{u}_0(x_0).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Решением уравнения (2.50) с условиями (2.51) является функция

$$\varphi(\xi)=-2\beta\exp(\beta\xi)\int\limits_{x_0}^{\xi}\bar{u}_0(\eta)\exp(-\beta\eta)d\eta.$$

Следовательно, для функции $\bar{u}_0(-\xi)$ можно записать

$$\bar{u}_0(-\xi)=-\bar{u}_0(\xi)-2\beta\exp(\beta\xi)\int\limits_{x_0}^{\xi}\bar{u}_0(\eta)\exp(-\beta\eta)d\eta.$$

Вычисляя интеграл в последнем выражении, с учетом того, что

$$\bar{u}_0(\xi)=\frac{c_1\exp(n\xi)+c_2\exp(-n\xi)}{a^2n(c_1\exp(nx_0)-c_2\exp(-nx_0))},$$

находим

$$\bar{u}_0(-\xi) = \frac{1}{a^2 w_0}\left(c_2 \exp\left(n\xi\right) + c_1 \exp\left(-n\xi\right)\right) +$$

$$+\frac{c_1+c_2}{a^2 w_0}\left(\exp\{(n-\beta)x_0\} - \exp\{-(n+\beta)x_0\}\right)\exp(\beta\xi),$$

где $w_0 = n(c_1\exp(nx_0) - c_2\exp(-nx_0))$.

Функцию $u(x)$ найдем по формуле (2.48). Получим

$$u = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}a^2 w_0}\left(\int\limits_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}dy + \int\limits_{y_2}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)e^{(nx+a^2n^2t)} +$$

$$+\frac{c_2}{\sqrt{\pi}a^2 w_0}\left(\int\limits_{y_3}^{\infty} e^{-y^2}dy + \int\limits_{y_4}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)e^{(-nx+a^2n^2t)} +$$

$$-\frac{c_1+c_2}{\sqrt{\pi}a^2 w_0}(e^{(n-\beta)x_0} + e^{-(n+\beta)x_0})e^{(-\beta x+a^2\beta^2 t)}\int\limits_{y_5}^{\infty} e^{-y^2}dy.$$

Здесь использованы обозначения

$$y_1 = \frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t}, \qquad y_2 = \frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t}$$

$$y_3 = \frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t}, \qquad y_4 = \frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t}$$

$$y_5 = \frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} - a\beta\sqrt{t}.$$

Искомая функция $v(x,t)$ находится по формуле (2.2) теоремы 2.1.

$$v = \frac{2nc_1c_2e^{a^2n^2t}\sigma}{\sqrt{\pi}w_0 w}\left(\int\limits_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}dy + \int\limits_{y_2}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int\limits_{y_3}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int\limits_{y_4}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) +$$

$$+\frac{c_1+c_2}{\sqrt{\pi}w_0}\sigma(\beta+\sigma)(e^{nx_0} + e^{-nx_0})e^{(-\beta(x+x_0)+a^2\beta^2t)}\int\limits_{y_5}^{\infty} e^{-y^2}dy +$$

$$+\frac{\sigma}{2a\sqrt{\pi t}w_0}(c_1e^{nx_0} + c_2e^{-nx_0})\left(e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x_0+x)^2}{4a^2t}}\right),$$

где

$$\sigma = \frac{w_x}{w} = n\frac{c_1 e^{nx} - c_2 e^{-nx}}{c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}}$$

и

$$w_0 = n(c_1 e^{nx_0} - c_2 e^{-nx_0}).$$

Выполнение условий (2.42) и (2.43) при $x \to \infty$ и нормируемость функции $v(x,t)$ проверяются непосредственно.

Замечание. Отметим, что построенные решения, вследствие выполнения условия (2.41), являются фундаментальными решениями задачи Коши [32].

3 Глава

Обобщенные решения и преобразования Эйлера -Дарбу

3.1 Преобразование Эйлера-Дарбу неоднородных уравнений и обобщенные решения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$Lu = Au + Bu = f, \tag{3.1}$$

где оператор A - дифференциальный оператор по переменной x

$$A = \sum_{i=0}^{K} a_i(x) D_x^i, \tag{3.2}$$

B - дифференциальный оператор по переменным $y_1, \dots, y_n$ вида

$$B = \sum_{|\alpha| \geq 0}^{M} b_\alpha(y) D_y^\alpha, \tag{3.3}$$

а $f(x, y_1, \dots, y_n)$ - обобщенная функция. Далее используется стандартная теория обобщенных функций [15] и введены следующие обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, $D_x^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$, $D_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {y_1}^{\alpha_1} \dots \partial {y_n}^{\alpha_n}}$ - операции обобщенного дифференцирования. Для классических функций мы будем так же употреблять обозначения производных (в общем случае тоже обобщенных) очевидные из контекста: h', γ_y. Функции $a_i(x)$ и $b_\alpha(y)$ считаются гладкими в соответствующих областях. Кроме этого, считаем, что все функции, на которые умножаются обобщенные функции, являются бесконечно дифференцируемыми.

Следуя работе [24] класс уравнений вида (3.1) обозначим через $E_{K,M}$.

Если $h(x), g(y)$ - классические решения уравнений

$$\begin{aligned} &Ah = ch, \\ &Bg + cg = 0, \qquad \textit{где } c \in R, \end{aligned} \tag{3.4}$$

то функция $u_1 = gh$ удовлетворяет однородному уравнению (3.1). Функция u_1

порождает преобразование уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Класс уравнений $E_{K,M}$ обладает следующими свойствами.*
1. Если γ - гладкая функция вида $\gamma = p(x)q(y) \neq 0$, то преобразование

$$u \to v = u/\gamma$$

переводит обобщенные решения уравнения (3.1) в обобщенные решения уравнения

$$\hat{L}v = vL(\gamma)/\gamma + A_1 v + B_1 v = f/\gamma,$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{K} a_i^1(x) D_x^i, \qquad B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1(y) D_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1 \neq 0$ уравнение $\hat{L}v = f/\gamma$ имеет вид

$$L_1 v = A_1 v + B_1 v = f/\gamma. \tag{3.5}$$

2. Преобразование $v \to w = v_x$ переводит обобщенные решения уравнения (3.5) в обобщенные решения уравнения

$$L_2 w = \sum_{i=1}^{K} (D_x(a_i^1) D_x^{i-1} w + a_i^1 D_x^i w) + \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1 D_y^\alpha w = D_x(f/\gamma). \tag{3.6}$$

Доказательство.

Заметим, что для произведения γv, где v - обобщенная функция, справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения. Учитывая это и равенство $(Lu, \varphi) = (L(\gamma v), \varphi)$, которое следует из равенства $(u, \varphi) = (\gamma v, \varphi)$ верно следующее соотношение

$$Lu = L(\gamma v) = vL(\gamma) + \widetilde{A}v + \widetilde{B}v = f, \tag{3.7}$$

где

$$\widetilde{A}v = \sum_{i=0}^{K} \widetilde{a}_i(x, \gamma, \gamma_x, \ldots) D_x^i v, \qquad \widetilde{B}v = \sum_{|\alpha| \geq 1}^{M} \widetilde{b}_\alpha(y, \gamma, \gamma_y, \ldots) D_y^\alpha v,$$

а φ - функция из пространства основных функций. Коэффициенты $\widetilde{a}_i$ могут зависеть только от x, γ и производных от γ по x, а коэффициенты $\widetilde{b}_\alpha$ могут зависеть только от y, γ и ее производных по $y_1, \ldots, y_n$. Функция γ и ее производные могут входить в коэффициенты $\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_\alpha$ лишь линейным образом.

Умножая (3.7) на $1/\gamma$ получаем уравнение

$$\widetilde{L}v = \frac{1}{\gamma} L(\gamma) v + A_1 v + B_1 v = f/\gamma,$$

где операторы A_1, B_1 имеют вид

$$A_1 = \sum_{i=0}^{K} \widetilde{a}_i(x, p, p_x, \ldots) D_x^i, \qquad B_1 = \sum_{|\alpha| \geq 1}^{M} \widetilde{b}_\alpha(y, q, q_y, \ldots) D_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1$ получаем уравнение (3.5). Для доказательства второго свойства достаточно продифференцировать (3.5) по x и ввести новую обобщенную функцию $w = D_x v$. В результате получается уравнение (3.6).

Отметим, что все уравнения $Lu = f$, $L_1 v = f/\gamma$, $L_2 = D_x(f/\gamma)$ принадлежат одному классу $E_{K,M}$.

Следствие. *Пусть h - нетривиальное решение уравнения (3.4), r - гладкая функция от x. Тогда преобразование*

$$v = \frac{1}{r}(D_x u - \frac{h'}{h} u) \tag{3.8}$$

переводит обобщенные решения уравнения (3.1) в обобщенные решения уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Действительно, преобразование

$$v = p(x) q(y) D_x \left(\frac{u}{u_1} \right), \tag{3.9}$$

является комбинацией преобразований, рассмотренных в теореме 3.1, и, следовательно, сохраняет класс уравнения. Здесь p, q - произвольные гладкие функции, u_1 - решение уравнения (3.1), полученное разделением переменных $u_1 =$

$h(x)g(y)$. Если положить $q = g, p = h/r$, то из (3.9) получим (3.8).

Следуя работе [24] покажем, что справедлива

Лемма 1. *Преобразование*

$$u_k = \mathcal{M}_k u = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, u)}{W(h_1, \ldots, h_k)} \tag{3.10}$$

переводит обобщенное решение уравнения (3.1) в обобщенное решение уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Для того, чтобы убедиться в справедливости леммы 1 заметим, что если известны $h_1, \ldots, h_k$ решения уравнения (3.4) при различных $c_1, \ldots, c_k$, то, как показано в [24], можно построить оператор порядка k, являющийся суперпозицией операторов Эйлера-Дарбу первого порядка вида $\mathcal{L}_h = hD_x(1/h)$ и соответствующее преобразование, действующее на $E_{K,M}$. Действительно, пусть $h_1, \ldots, h_k$ - гладкие, линейно независимые функции от x. Построим последовательность функций и операторов

$$\begin{gathered} p_1 = h_1, p_2 = \mathcal{L}_{p_1} h_2, \ldots, p_N = \mathcal{L}_{p_{N-1}} \ldots \mathcal{L}_{p_1} h_N, \\ \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{p_1}, \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{p_2} \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N = \mathcal{L}_{p_N} \mathcal{M}_{N-1}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Из построения операторов $\mathcal{M}_k$ следует, что функции $h_1, \ldots, h_k$ удовлетворяют дифференциальному уравнению порядка k

$$\mathcal{M}_k h = 0. \tag{3.12}$$

Значит они образуют базис решений уравнения (3.12). Следовательно, действие оператора M_k на произвольную функцию представляется в виде [4]

$$\mathcal{M}_k u = D_x^k u + a_{k-1} D_x^{k-1} u + \ldots + a_0 u = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, u)}{W(h_1, \ldots, h_k)}. \tag{3.13}$$

Остается взять в качестве $h_1, \ldots, h_k$ решения уравнения (3.4) для различных $c_1, \ldots, c_k$.

3.2 Преобразование уравнений класса $E_{2,M}$

Рассмотрим уравнение из класса $E_{2,M}$

$$FD_x^2 u + GD_x u + Hu = Bu + f, \tag{3.14}$$

где, F, G, H - гладкие функции от x, f - обобщенная функция, а B - линейный оператор вида (3.3).

Теорема 3.2. *Преобразование Эйлера-Дарбу, заданное соотношением (3.8), переводит обобщенные решения уравнения (3.14) в обобщенные решения уравнения*

$$FD_x^2 v + G_1 D_x v + H_1 v = Bv + f_1, \tag{3.15}$$

где

$$G_1 = G + F' + 2F\frac{r'}{r}, \tag{3.16}$$

$$H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)'', \tag{3.17}$$

$$f_1 = \frac{1}{r}(D_x f - \frac{h'}{h} f), \tag{3.18}$$

а функция $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Fh_{xx} + Gh_x + (H + c)h = 0, \qquad \text{где } c \in R. \tag{3.19}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$v = Ru = \frac{1}{r}(D_x u + su), \qquad \text{где } s = -h'/h,$$

$$Au = FD_x^2 u + GD_x u + Hu,$$

$$A_1 u = F_1 D_x^2 u + G_1 D_x u + H_1 u.$$

Тогда исходные уравнения (3.14) и (3.15) запишутся как

$$Au = Bu + f \qquad \text{и} \qquad A_1 v = Bv + f_1.$$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что

$$(A^* - B^*)R^*\varphi = R^*(A_1^* - B^*)\varphi. \tag{3.20}$$

Здесь звездочка обозначает формальное сопряжение оператора, определяемое для операторов A и B следующим образом

$$A^*\varphi = \sum_{i=0}^{K}(-1)^i D_x^i(a_i(x)\varphi), \qquad B^*\varphi = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M}(-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha(b_\alpha(y)\varphi).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}&(R(A-B)u,\varphi) = (u,(A^*-B^*)R^*\varphi) = (u,R^*(A_1^*-B^*)\varphi) = \\ &(Ru,(A_1^*-B^*)\varphi) = (v,(A_1^*-B^*)\varphi) = ((A_1-B)v,\varphi) = (Rf,\varphi).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь мы использовали свойство коммутирования операторов B и R, что, как легко показать, влечет $B^*R^*\varphi = R^*B^*\varphi$. Остается показать, что $A^*R^*\varphi = R^*A_1^*\varphi$. Имеем,

$$A^*R^*\varphi = D_x^2[F(-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi)] -$$

$$-D_x[G(-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi)] + H[-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi],$$

$$R^*A_1^*\varphi = -D_x[\frac{1}{r}(D_x^2(F_1\varphi) - D_x(G_1\varphi) + H_1\varphi)] +$$

$$+\frac{s}{r}[D_x^2(F_1\varphi) - D_x(G_1\varphi) + H_1\varphi].$$

Левая часть уравнения $A^*R^*\varphi - R^*A_1^*\varphi = 0$ является полиномом относительно $\varphi_{xxx}, \varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi$. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при $\varphi_{xxx}, \varphi_{xx}$ получаем соответственно

$$F_1 = F \qquad \text{и} \qquad G_1 = G + F' + 2F(r'/r).$$

Подставляя найденные F_1 и G_1 в коэффициент при φ_x получим выражение (3.17).

Приравнивая к нулю коэффициент при φ, с учетом найденных F_1, G_1 и H_1, получаем

$$Fs'' + (F' - 2Fs + G)s' - F's^2 + G's - H' = (Fs' + Gs - Fs^2 - H)' = 0. \tag{3.22}$$

При $s = -h'/h$ выражение принимает вид

$$(-Fh''/h - Gh'/h - H)' = 0$$

откуда получаем требуемое уравнение (3.19).

Рассмотрим высшие преобразования Эйлера-Дарбу.

Если известно k решений $h_1, \ldots, h_k$ уравнения (3.19) для различных $c_1, \ldots, c_k$, то можно построить преобразование Эйлера-Дарбу порядка k.

Теорема 3.3. *Пусть $h_1, \ldots, h_k$ - решения уравнения (3.19), соответствующие различным постоянным $c_1, \ldots, c_k$. Тогда преобразование (3.13) переводит обобщенные решения уравнения (3.14) в обобщенные решения уравнения*

$$D_x^2(Fu_k) + D_x(G_k u_k) + H_k u_k = Bu_k + f_k. \tag{3.23}$$

При этом коэффициенты и функция f_k задаются формулами

$$G_k = G + kF', H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln W)' + 2F(\ln W)'', \tag{3.24}$$

а

$$f_k = \mathcal{M}_k f = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, f)}{W(h_1, \ldots, h_k)}, \tag{3.25}$$

здесь W - определитель Вронского для функций $h_1, \ldots, h_k$.

Доказательство.

Используем результаты теоремы 3.2. Выражение для G_k получается по индукции последовательным применением формулы (3.16) при $r = 1$. Используя (3.17) и конструкцию (3.11) функций $p_1, \ldots, p_k$, легко видеть, что индукционное построение коэффициентов H_k приводит к выражениям

$$H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln p_1 \ldots p_k)' + 2F(\ln p_1 \ldots p_k)''. \tag{3.26}$$

Найдем произведение $p_1 \ldots p_k$. Так как, согласно (3.11) и (3.13), имеют место соотношения

$$p_{i+1} = \mathcal{M}_i h_{i+1} = \frac{W(h_1, \ldots, h_i, h_{i+1})}{W(h_1, \ldots, h_i)},$$

справедливы равенства

$$p_1 \ldots p_k = h_1 \frac{W(h_1, h_2)}{h_1} \ldots \frac{W(h_1, \ldots, h_k)}{W(h_1, \ldots, h_{k-1})} = W(h_1, \ldots, h_k),$$

откуда следует выражение (3.24) для коэффициента H_k. Справедливость формулы для f_k, с учетом (3.13) и (3.18) очевидна.

3.3 Построение фундаментальных решений

Построим фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока (КГФ) и Шредингера с переменными коэффициентами. Для простоты ограничимся одной пространственной переменной. Обобщенная постановка задачи Коши, используемая ниже, подробно обсуждается в [15].

Уравнение КГФ имеет вид [8]

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u, \qquad \text{где } a, m \in R. \tag{3.27}$$

Для построения фундаментального решения рассмотрим обобщенную задачу Коши для уравнения (3.27) с источником [15]

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u + f(x,t), \tag{3.28}$$

где функция $f(x,t)$ имеет вид (ниже точка обозначает прямое призведение функций)

$$f = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \tag{3.29}$$

При преобразовании Эйлера-Дарбу уравнение (3.28) по теореме 3.2 переходит в уравнение

$$D_t^2 v + m^2 v = a^2 D_x^2 v + H_1(x) v + f_1 \tag{3.30}$$

с функцией $f_1(x,t)$

$$f_1 = D_x f - \frac{h'}{h} f. \tag{3.31}$$

Функция $H_1(x)$ находится по формуле (3.17). Для того, чтобы решение обобщенной задачи Коши уравнения (3.28) преобразовывалось в фундаментальное решение уравнения (3.30) потребуем выполнение следующего условия

$$D_x f - \frac{h'}{h} f = \delta(x-y) \cdot \delta(t).$$

Указанное условие можно переписать в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на функции u_0 и u_1

$$u_0' - \frac{h'}{h} u_0 = 0, \tag{3.32}$$

$$u_1' - \frac{h'}{h} u_1 = \delta(x-y). \tag{3.33}$$

Решения уравнений (3.32) и (3.33), соответственно, выберем следующими

$$u_0 = 0, \tag{3.34}$$

$$u_1(x,y) = \frac{\theta(x-y)h(x)}{h(y)}, \tag{3.35}$$

где $\theta(x-y)$ - функция Хевисайда. Решение обобщенной задачи Коши уравнения (3.28) при выборе функции $u_0 = 0$ есть свертка фундаментального решения уравнения (3.27) и функции u_1. Фундаментальное решение уравнения КГФ можно выбрать в виде [15]

$$E(x,y,t,\tau) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x-y|)J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x-y)^2}\right), \tag{3.36}$$

где J_0 - функция Бесселя. Решение обобщенной задачи Коши

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)E(x,\xi,t,0)d\xi. \tag{3.37}$$

Опуская промежуточные выкладки выпишем решение обобщенной задачи Коши уравнения КГФ

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2ah(y)} \int\limits_{-at}^{at} \theta(x-y-z)h(x-z)J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2 - z^2}\right)dz. \tag{3.38}$$

Фундаментальное решение уравнения (3.30) находим по формуле

$$E_1(x,y,t) = D_x u(x,y,t) - \frac{h'(x)}{h(x)}u(x,y,t), \tag{3.39}$$

После несложных вычислений получаем

$$E_1(x,y,t) = \begin{cases} 0, \text{если } x-y < -at, \\ \frac{1}{2a}J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-y)^2}) + \\ \frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{x-y}(h'(x-z) - \frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, \\ \text{если } -at \le x-y \le at, \\ \frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{at}(h'(x-z) - \frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, \\ \text{если } x-y > at. \end{cases}$$

В последних формулах штрих у функции означает дифференцирование по соответствующему сложному аргументу, указанному в скобках.

Приведенные формулы легко обобщаются для высших преобразований Эйлера-Дарбу. Для этого необходимо взять функцию u_1 удовлетворяющую уравнению

$$\frac{W(h_1,\ldots,h_k,u_1)}{W(h_1,\ldots,h_k)} = \delta(x-y). \tag{3.40}$$

Решение последнего уравнения дается формулой

$$u_1(x,y) = \frac{\theta(x-y)}{W_y(h_1,\ldots,h_k)}\sum_{i=1}^{k} W_y(h_1,\ldots,h_{i-1},h_{i+1},\ldots,h_k)h_i(x). \tag{3.41}$$

Здесь введено обозначение $W_y(h_1,\ldots,h_k) = W(h_1(y),\ldots,h_k(y))$. Коэффициенты преобразованного уравнения определяются по теореме 3.3 формулой (3.24).

Построение фундаментального решения для уравнения Шредингера с переменными коэффициентами проводится так же, как и для уравнения КГФ. Стартуя с исходного уравнения

$$iD_tu = -D_x^2u, \tag{3.42}$$

рассмотрим обобщенную задачу Коши со следующим источником

$$iD_tu = -D_x^2u + u_0(x)\cdot\delta(t). \tag{3.43}$$

Потребуем, чтобы функция u_0, в соответствии с формулой (3.18) теоремы 3.2, преобразовывалась в δ-функцию Дирака. Это будет выполнено, если указанная функция удовлетворяет следующему уравнению

$$u_0' - \frac{h'}{h}u_0 = \delta(x-y), \tag{3.44}$$

решение которого задается формулой (3.35). Фундаментальное решение уравнения (3.42) есть [15]

$$E(x,\xi,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t} - \frac{i\pi}{4}\right). \tag{3.45}$$

Тогда решение обобщенной задачи Коши можно записать в виде свертки

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi - y)h(\xi) \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi. \tag{3.46}$$

Решение обобщенной задачи Коши уравнения (3.43) преобразуется в фундаментальное решение уравнения

$$iD_t v = -D_x^2 v + H_1(x)v \tag{3.47}$$

по формуле (39). Коэффициент $H_1(x)$, так же как и в случае уравнения КГФ, вычисляется по формуле (3.17). Выпишем фундаментальное решение преобразованного уравнения (3.45)

$$E_1(x,y,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)} \int\limits_{y}^{\infty} h(\xi) \left[i\frac{x-\xi}{2t} - \frac{h'(x)}{h(x)}\right] \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi. \tag{3.48}$$

Очевидно, что последняя формула задает фундаментальное решение только в случае существования соответствующих интегралов.

Аналогично уравнению КГФ построение фундаментального решения для уравнения Шредингера так же обобщается для высших преобразований Эйлера-Дарбу.

Заключение

В заключении еще раз сформулируем все основные результаты, полученные в диссертации.

1. Для одномерного уравнения нелинейной теплопроводности с источником с помощью линейных определяющих уравнений найдены инвариантные многообразия второго и третьего порядков. Даны различные примеры точных решений, полученных с использованием найденных инвариантных многообразий. В частности, используя инвариантное многообразие третьего порядка построено новое частное решение уравнения теплопроводности, выражающееся через функции Вейерштрасса.

2. Для одномерного уравнения Фоккера-Планка в представлении Ито построены прямое и противоположное преобразования Эйлера-Дарбу, преобразование Эйлера-Дарбу порядка k. Рассмотрено обобщение метода преобразования Эйлера-Дарбу на многомерные уравнения частного вида, у которых коэффициенты диффузии и сноса зависят от одной переменной, по которой производится дифференцирование. С помощью преобразования Эйлера-Дарбу для двух коэффициентов сноса построены точные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, являющиеся одновременно фундаментальными решениями задачи Коши.

3. Введено преобразование Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенной функции. В качестве примера построены фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами, описывающих частицу во внешнем скалярном поле.

Список литературы

[1] Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В.К. Андреев [и др.]. - Новосибирск: ВО Наука, 1994. - 319 с.

[2] Аксенов, А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения / А. В. Аксенов // Доклады АН. - 1995. - Т. 342. - №2. - С. 151-153.

[3] Аксенов, А. В. Симметрии фундаментальных решений уравнений с частными производными / А. В. Аксенов // Симметрии дифференциальных уравнений. Сборник научных трудов. - М.: Московский физико-технический институт (государственный университет), 2009. - С. 6-35.

[4] Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. - Харьков: ГНТИ, 1939. - 294 с.

[5] Берест, Ю.Ю. Построение фундаментальных решений для гюйгенсовых уравнений как инвариантных решений / Ю.Ю. Берест // Доклады АН СССР. - 1991. - Т. 317. - №4. - С. 786-789.

[6] Берест, Ю.Ю. Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений / Ю.Ю. Берест // Дифференциальные уравнения. - 1993. - Т. 29. - №11. - С. 1958-1970.

[7] Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. - М.: Мир, 1966. - 308 с.

[8] Боголюбов, Н.Н. Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. - М.: Наука, 1984. - 600 с.

[9] Ван Кампен, Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н.Г. Ван Кампен. - М.: Высш. шк., 1990. - 376 с.

[10] Веревкин, И.В. Преобразование Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка / И.В. Веревкин // Теоретическая и математическая физика. - 2011. - Т. 166. - №1. - С. 68-76.

[11] Веревкин, И.В. Обобщенные решения и преобразования Эйлера-Дарбу / И.В. Веревкин // Уфимский математический журнал. - 2014. - Т. 6. - №4. - С. 63-70.

[12] Веревкин, И.В. Преобразование Эйлера-Дарбу уравнения Фоккера-Планка / И.В. Веревкин // Тезисы Всероссийской конференции "Нелинейные волны: теория и новые приложения". Новосибирск: ИГИЛ СО РАН, 2011. С. 44.

[13] Виноградов, А. М. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений / А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин. - М.: Наука, 1986. - 336 с.

[14] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов, и др./ Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. - М.: Изд-во Факториал, 1997. - 464 с.

[15] Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

[16] Галактионов, В. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии / В. А. Галактионов, С.А. Посашков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1994. - Т. 34. - №3. - С. 373-383.

[17] Гардинер, К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. - М.: Физматгиз, 1986. - 463 с.

[18] Гурса, Э. Курс математического анализа / Э. Гурса. - М.; Л.: ГТТИ, 1933. Т. 2 Ч. 2. - 209 с.

[19] Дородницын, В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником / В. А. Дородницын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1982. - Т. 22. - №6. - С. 1393-1400.

[20] Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

[21] Ибрагимов, Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н.Х. Ибрагимов // Успехи математических наук. - 1992. - Т 47. - Вып. 4. - С. 83-144.

[22] Йон, Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к уравнениям с частными производными: Пер. с англ. / Ф. Йон. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. - 158 с.

[23] Капцов, О.В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей / О.В. Капцов // Математический сборник. - 1998. - Т. 189. - №12. - С. 103-118.

[24] Капцов, О.В. Эквивалентность линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера-Дарбу / О.В. Капцов // Вычислительные технологии. - 2007. - Т. 12. - №4. - С. 59-72.

[25] Капцов, О.В. Инволютивные распределения, инвариантные многообразия и определяющие уравнения / О.В. Капцов // Сибирский математический журнал. - 2002. - Т. 43. - №3. - С. 540-551.

[26] Капцов, О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными / О.В. Капцов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 184 с.

[27] Климонтович, Ю. Л. Статистическая теория открытых систем / Ю. Л. Климонтович. - М.: ТОО "Янус 1995. - 624 с.

[28] Кляцкин, В.И. Динамика стохастических систем: курс лекций / В.И. Кляцкин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 219 с.

[29] Лагно, В.И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа / В.И. Лагно, С.В. Спичак, В.И. Стогний. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 326 с.

[30] Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. - М.: Наука, 1978. - 413 с.

[31] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. / П. Олвер. - М.: Мир, 1989. - 639 с.

[32] Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 512 с.

[33] Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 784 с.

[34] Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа. Часть 2-я. Трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон Дж.Н. - 2-е изд. - М.: Физматлит, 1963. - 689 с.

[35] Эйлер, Л. Интегральное исчисление / Л. Эйлер. - М.: ГИФМЛ, 1958. - Т. 3.

[36] Bluman, G.W. The general similarity solution of the heat equation / G.W. Bluman, J.D. Cole // J. Math. Mech. - 1969. - Vol. 18. - №11. - P. 1025-1042.

[37] Ciconga, G. Classification on the extended symmetries of the Fokker-Planck equations / G. Ciconga, D. Vitali // J. Phys. A: Math. Gen. - 1990. - 23. - P. 85 - 88.

[38] Darboux, G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal / G. Darboux. - Paris: Gauthier-Villars, 1915. - Vol. II.

[39] Galaktionov, V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications / V.A. Galaktionov // Differ. Integral Equ. - 1990. - 3. - P. 863-74.

[40] Galaktionov, V.A. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics / V.A. Galaktionov, S.R. Svirshchevskii. - Boca Raton: CRC Press, 2006. - 423 p.

[41] Kaptsov, O. V. B-determining equations: applications to nonlinear partial differential equtions / O. V. Kaptsov // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. - 1995. - V. 6. - P. 265-286.

[42] Kaptsov, O.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations / O.V. Kaptsov, I.V. Verevkin // J. Phys. A: Math. Gen. - 36. - 2003, P. 1401-1414.

[43] Khater, A.H. Potential symmetries and invariant solutions for generalized one-dimensional Fokker-Planck equations / A.H. Khater, M.H.M. Moussa, S.F. Abdul-Aziz S.F. // Physika A. - 2002. - 304. - P.395-408.

[44] Matveev, V.B. Darboux Transformation and Solitons / V.B. Matveev, M.A. Salle. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991. - 449 p.

[45] Moutard, M. Note sur les équations differentielles linéaires du second ordre / M. Moutard // Comptes Rendus. - 1875. - Vol. LXXX. - Pp. 729-733.

[46] Olver, P. J. Direct reduction and differential constraints / P. J. Olver // Proc. Roy. Soc. London Sect. A. - 1994. - V. 444. - P. 509-523.

[47] Risken, H. The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications / H. Risken. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.

[48] Rudra, P. Symmetry classes for the Fokker-Planck equations / P. Rudra // J. Phys. A: Math. Gen. - 1990. - 23. - L1663-L1670.

[49] Sastri, S.S.A. Lie symmetries of some equations the Fokker-Planck type / S.S.A. Sastr, K.A. Dann // J. Math. Phys. - 1985. - 26, - №12. - P. 3042-3047.