УДК 519.1

О разложении гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами

Валентина В. Быкова*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.09.2011, окончательный вариант 25.10.2011, принята к печати 10.11.2011

В работе исследуется задача разложения гиперграфа на атомы кликовыми минимальными сепараторами. Показана уникальность такого разложения. Представлены эффективные процедуры нахождения кликовых минимальных сепараторов и построения разложения. Приведено применение разложения для вычисления древовидной ширины гиперграфа.

Ключевые слова: атом гиперграфа, кликовые сепараторы, ацикличность, древовидная ширина.

Идея разложение графа кликовыми сепараторами была предложена Тарьяном [1] как средство реализации подхода «разделяй и властвуй» для решения NP-трудных графовых задач, базирующихся на отношениях смежности вершин графа. Процесс такого разложения заключается в многократном поиске в графе $G = (V, E)$ кликового сепаратора S, выделении компонент связности графа $G(V \backslash S)$ и копировании S в эти компоненты. Полученные в результате части были названы атомами графа G. Было установлено, что атомы не разрушают клики исходного графа, не порождают новых клик и сохраняют бесхордовые циклы длины более 3. Поэтому атомарное представление графа нашло применение в решении многих классических графовых задач: нахождение наибольшей клики, вычисление хроматического числа, определение наибольшего независимого множества вершин графа, поиск наименьшего пополнения графа до хордального, распознавание класса совершенных графов и др. Заметим, что разбиение графа на блоки — частный случай разложения графа кликовыми сепараторами. Тарьян предложил полиномиальный алгоритм выделения атомов графа [1], но оставил открытой проблему уникальности результирующего набора атомов. Данная проблема была решена Лаймером в работе [2], где было доказано, что если использовать кликовые минимальные сепараторы (такими, например, являются точки сочленения графа), то процесс разложения исходного графа всегда приводит к уникальному для этого графа набору атомов. При этом каждый атом (Лаймер его назвал *mps*-подграфом, *maximal prime subgraph*) — максимальный по включению индуцированный подграф, не имеющий кликовых минимальных сепараторов. Оказалось, что время реализации подобного разложения для графа $G = (V, E)$ составляет $O(nm)$, где $n = |V|$, $m = |E|$ [2].

В последнее время к разложению графа кликовыми минимальными сепараторами вновь появился теоретический интерес в связи с новыми актуальными приложениями: кластеризация данных в генной инженерии [3], анализ текстов в системах искусственного интеллекта [4], моделирование надежности и безопасности компьютерных и коммуникационных сетей графами и гиперграфами ограниченной древовидной ширины [5]. Данные приложения потребовали определенных обобщений этой задачи. Одно из них — рассмотрение гиперграфа в качестве объекта разложения — представлено в данной работе. Как известно, в гиперграфе ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества ко-

*bykvalen@mail.ru

нечного множества вершин. Такое обобщение открывает дополнительные вычислительные возможности приложений гиперграфовых моделей систем.

1. Гиперграф, его элементы и ассоциированные с ним графы

Приведем необходимый минимум понятий, сохраняя терминологию и обозначения, принятые в [6, 7]. Пусть задан (n, m)-гиперграф $H = (X, U)$, где $X = \{x_1, ..., x_n\}$ — конечное множество вершин и $U = \{u_1, ..., u_m\}$ — конечное семейство ребер гиперграфа, при этом $n = |X| \geqslant 1, m = |U| \geqslant 1$ и всякое ребро гиперграфа — некоторое подмножество множества X. Пусть $U(x)$ — множество ребер, инцидентных в H вершине $x \in X$, а $X(u)$ – множество всех вершин, инцидентных ребру $u \in U$. Тогда число $|U(x)|$ определяет степень вершины x, а число $|X(u)|$ — степень ребра u. Элемент гиперграфа степени 0 считают голым. Любое собственное подмножество множества $X(u), u \in U$, образует частичное ребро гиперграфа. Две вершины $x, y \in X$ смежные, если существует ребро $u \in U$ такое, что $x, y \in X(u)$. Аналогичным образом два ребра $u, v \in U$ смежные, если $X(u) \cap X(v) \neq \varnothing$. Подмножество множества вершин гиперграфа H образует клику, если две любые вершины этого подмножества смежные в H. Два ребра $u, v \in U$ кратные, если $X(u) = X(v)$. Ребро вложено u в ребро v, когда $X(u) \subset X(v)$. Гиперграф минимальный, если он не содержит голых элементов, вложенных и кратных ребер. Далее везде H_μ — результат минимизации гиперграфа H.

Пусть $H(Y)$ — часть гиперграфа $H = (X, U)$, индуцированная множеством $Y \subset X$, т.е. полученная из H слабым удалением всех вершин $x \in X \backslash Y$. Другими словами, $H(Y)$ — гиперграф на множестве вершин Y, в качестве ребер которого выступают множества $X(u) \cap Y,\ u \in U$, причем некоторые из них могут быть (полными) ребрами, а другие лишь частичными ребрами гиперграфа H. Обозначим через $N_H(x) = \{y \neq x : y \in X(u), u \in U(x)\}$ окрестность вершины x в гиперграфе H. Подобным образом для $Y \subseteq X$ будем полагать, что $N_H(Y) = \bigcup\limits_{x \in Y} N_H(x) \backslash Y$.

Всякий непустой гиперграф $H = (X, U)$ однозначно определяется своим кениговым представлением — двудольным графом $K(H)$, отражающим отношение инцидентности элементов гиперграфа, с множеством вершин $X \cup U$ и долями X и U. Гиперграф H считают связным, если связен $K(H)$. Компоненты связности графа $K(H)$ индуцируют части гиперграфа H, называемые его компонентами связности. Множество $S \subset X$ образует множество сочленения в связном гиперграфе $H = (X, U)$, если существуют $u, v \in U$ такие, что $S = X(u) \cap X(v) \neq \varnothing$ и гиперграф $H_\mu(X \backslash S)$ несвязен. Минимизация гиперграфа здесь нужна, чтобы исключить случай вложенных ребер. Так, если $X(u) \subset X(v)$, то S не является множеством сочленения, хотя $S = X(u) \neq \varnothing$ и гиперграф $H(X \backslash S)$ несвязный за счет наличия в нем голого ребра u. Между тем, гиперграф $H_\mu(X \backslash S)$ связный.

С гиперграфом H принято ассоциировать также графы смежности $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$. Граф $L^{(2)}(H)$ представляет отношение смежности вершин гиперграфа. В частности, если H — обыкновенный граф, то $L^{(2)}(H) = H$. Граф $L^{(2)}(H)$ отражает информацию обо всех кликах гиперграфа H: каждая клика гиперграфа H – клика графа $L^{(2)}(H)$ и, наоборот, любая клика графа $L^{(2)}(H)$ — клика гиперграфа. Заметим, что всякое множество $X(u), u \in U$, гиперграфа $H = (X, U)$ порождает клику в $L^{(2)}(H)$, однако обратное верно только тогда, когда гиперграф H комплектный. Гиперграф H комплектный, если каждой максимальной клике графа $L^{(2)}(H)$ отвечает некоторое ребро этого гиперграфа. Гиперграф H считается ациклическим (M-ациклическим или α-ациклическим), если он комплектный и его граф $L^{(2)}(H)$ хордальный. Граф $L(H) = (U, E)$ называют реберным графом для H, поскольку он задает отношение смежности ребер этого гиперграфа. Данный граф — источник информации обо всех множествах сочленения гиперграфа H: произвольному множеству сочленения

$S = X(u) \cap X(v)$ гиперграфа H отвечает некоторое ребро $\{u, v\} \in E$ графа $L(H)$, хотя обратное не всегда верно. Примечательно, что графы $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$ — миноры кенигова представления $K(H)$, т.к. могут быть получены из него путем операции стягивания соответствующих ребер. Поскольку данная операция никогда не нарушает связности графа, то для гиперграфа H ассоциированные с ним графы $K(H), L^{(2)}(H)$ и $L(H)$ либо все одновременно связные, либо несвязные. Не нарушая общности, далее в качестве исходных гиперграфов будем рассматривать только минимальные и связные гиперграфы.

2. Кликовые минимальные сепараторы

Введем понятие кликового минимального сепаратора гиперграфа, используя одноименное понятие для графа [1,2]. Множество вершин S связного гиперграфа $H = (X, U)$ назовем сепаратором этого гиперграфа, если гиперграф $H_\mu(X \backslash S)$ несвязен. Если при этом S — клика в H, то такой сепаратор будем называть кликовым сепаратором гиперграфа H. Очевидно, что каждое множество сочленения образует в H кликовый сепаратор. Однако в гиперграфе могут существовать кликовые сепараторы, которые не представимы в виде пересечения множеств $X(u) \cap X(v)$, ассоциированных с ребрами $u, v \in U$. Частичное ребро гиперграфа, являющееся сепаратором, образует частично-реберный сепаратор. Такие сепараторы всегда кликовые. В обыкновенных графах частично-реберным сепаратором может быть лишь точка сочленения. В общем случае кликовый сепаратор гиперграфа – это одно или несколько попарно смежных между собой полных или частичных ребер гиперграфа.

Уточним теперь, в каком смысле кликовый сепаратор гиперграфа минимальный. Рассмотрим в $H = (X, U)$ сепаратор S и две несмежные вершины $a, b \in X \backslash S$. Сепаратор S образует (a, b)-сепаратор (или S разделяет a и b), если вершины a и b принадлежат разным компонентам связности гиперграфа $H_\mu(X \backslash S)$, и минимальный (a, b)-сепаратор, если S — (a, b)-сепаратор и в нем нет собственного подмножества, являющегося (a, b)-сепаратором. Сепаратор S минимальный, если в гиперграфе существует такая пара вершин a и b, что S – минимальный (a, b)-сепаратор (т.е. минимальный относительно, по крайне мере, двух вершин гиперграфа).

Из приведенных выше определений непосредственно вытекает справедливость следующих лемм.

Лемма 1. *Сепаратор S минимальный в $H = (X, U)$ тогда и только тогда, когда гиперграф $H_\mu(X \backslash S)$ имеет две области связности A и B такие, что $A \neq B$ и $N_H(A) = N_H(B) = S$.*

Напомним, что область связности гиперграфа — множество вершин компоненты связности гиперграфа. Область связности, отвечающую условиям леммы 1, принято называть, полной. Следовательно, сепаратор минимальный, если он порождает в заданном гиперграфе хотя бы две полные области связности A и B. Минимальный сепаратор разделяет любую пару вершин $a \in A,\ b \in B$ из полных областей связности. Очевидно, что всякий одновершинный сепаратор S всегда минимальный и все соответствующие ему области связности в $H_\mu(X \backslash S)$ полные. Заметим, что в общем случае для произвольного сепаратора S гиперграфа H и некоторой области связности $Y \subset X$ в $H_\mu(X \backslash S)$ неизменно: $N_H(Y) \subseteq S$.

Лемма 2. *Всякий кликовый минимальный сепаратор связного гиперграфа H является кликовым минимальным сепаратором графа $L^{(2)}(H)$, и, наоборот, любой кликовый минимальный сепаратор графа $L^{(2)}(H)$ есть кликовый минимальный сепаратор гиперграфа H.*

Согласно лемме 2 граф $L^{(2)}(H)$ может служить эквивалентной заменой гиперграфу H, если речь идет о нахождении множества всех кликовых минимальных сепараторов гиперграфа. Это вполне естественно, поскольку $L^{(2)}(H)$ сохраняет все клики, окрестности и области связности гиперграфа H.

Важно отметить, что кликовые минимальные сепараторы могут пересекаться как множества вершин. Возможна вложенность кликовых минимальных сепараторов один в другой, поскольку каждый из них может быть минимален относительно различных пар вершин гиперграфа. Не каждый гиперграф обладает сепараторами, в том числе и кликовыми минимальными сепараторами. Гиперграф может иметь экспоненциальное число минимальных сепараторов. Наличие кратных и вложенных ребер не влияет на число минимальных сепараторов гиперграфа. Связный (n,m)-гиперграф H содержит не более $n-2$ кликовых минимальных сепараторов, если он ацикличен или ассоциированный с ним граф $L^{(2)}(H)$ хордальный. Справедливость последнего высказывания следует из свойств хордального графа, установленных Дираком [8]. Сформулируем их в виде лемм 3-6.

Лемма 3. *Связный граф хордальный тогда и только тогда, когда для него существует дерево клик, в котором множество узлов — множество $\{C_i : i \in I\}$ всех максимальных клик графа; два узла C_i, C_j соединены ребром, если $C_i \cap C_j \neq \varnothing$; для любой вершины графа множество максимальных клик, содержащих эту вершину, индуцирует связный подграф, являющийся поддеревом дерева клик. Всякий n-вершинный связный хордальный граф имеет не более $n-1$ максимальных клик, а потому его дерево клик содержит не более $n-1$ узлов.*

Лемма 4. *Хордальный граф может иметь несколько различных деревьев клик, но каждое из них — остовное дерево наибольшего веса графа пересечений всех максимальных клик исходного графа, где вес ребра — число вершин, образующих пересечение надлежащих максимальных клик графа.*

Лемма 5. *Для произвольного ребра дерева клик, связывающего узлы C_i и C_j, пересечение $C_i \cap C_j$ образует минимальный сепаратор исходного графа. Верно и обратное утверждение: если S — минимальный сепаратор графа, то в дереве клик всегда найдется ребро, соединяющее узлы C_i и C_j, такое, что $C_i \cap C_j = S$.*

Лемма 6. *Граф является хордальным тогда и только тогда, когда его любой минимальный сепаратор есть клика.*

Утверждение 1. *Если (n,m)-гиперграф H связен и ацикличен, то в нем не более $n-2$ кликовых минимальных сепараторов, и каждый из них — множество сочленения.*

Доказательство. Связному гиперграфу H соответствует связный граф $L^{(2)}(H)$. По определению ациклический гиперграф комплектный и его граф $L^{(2)}(H)$ хордальный. Тогда согласно леммам 3-6 граф $L^{(2)}(H)$ имеет дерево клик, в котором не более чем $n-1$ узлов. Множество ребер этого дерева (их не более $n-2$) определяет множество всех кликовых минимальных сепараторов графа $L^{(2)}(H)$. По лемме 2 оно также задает множество всех кликовых минимальных сепараторов гиперграфа H. Поскольку гиперграф H еще комплектный, то каждой максимальной клике графа $L^{(2)}(H)$ отвечает некоторое ребро этого гиперграфа и дерево клик графа $L^{(2)}(H)$ — дерево соединений гиперграфа H [7]. Дерево соединений гиперграфа H является остовным деревом графа $L(H)$ и любое его ребро отвечает непустому пересечению соответствующих ребер гиперграфа. Следовательно, каждый кликовый минимальный сепаратор гиперграфа — множество сочленения. □

3. Вычисление кликовых минимальных сепараторов

По лемме 2 задача вычисления кликовых минимальных сепараторов (n,m)-гиперграфа $H=(X,U)$ сводится к задаче нахождения кликовых минимальных сепараторов для графа $L^{(2)}(H)$. На сегодняшний день единственным эффективным методом нахождения кликовых минимальных сепараторов графа является извлечение их из минимальной триангуляции графа [9]. Любой граф может быть преобразован в хордальный граф путем добавления в него дополнительных ребер (хорд). Полученный в результате граф называется триангуляцией исходного графа. Триангуляция минимальная, если она не содержит в себе в качестве собственного подграфа другую триангуляцию графа. Для одного и того же графа возможны различные минимальные триангуляции.

Изложим способ вычисления кликовых минимальных сепараторов применительно к графу $L^{(2)}(H)$. Данный способ базируется на утверждении 2.

Утверждение 2 ([9]). *Пусть задан граф $L^{(2)}(H) = (X, E)$ и некоторая его минимальная триангуляция $L' = (X, E'), E \subseteq E'$. Кликовые минимальные сепараторы графа $L^{(2)}(H)$ равны минимальным сепараторам минимальной триангуляции L', которые образуют клики в $L^{(2)}(H)$.*

Процесс нахождения кликовых минимальных сепараторов гиперграфа включает в себя следующие шаги.

1. Вычислить для $L^{(2)}(H)$ минимальную триангуляцию L'.
2. Отыскать все минимальные сепараторы хордального графа L'.
3. Среди найденных сепараторов отобрать те, которые образуют в $L^{(2)}(H)$ клики.

Для вычисления минимальных триангуляций традиционно применяется полиномиальный по времени алгоритм MCS (*Maximum Cardinality Search*) [10]. Известны модификации этого алгоритма, позволяющие совместить вычисление минимальной триангуляции и установление для нее множества всех минимальных сепараторов, т.е. объединить шаги 1 и 2 [11]. Примечательно, что дерево клик для L' не строится. Время работы большинства модификаций алгоритма MCS составляет $O(n^3)$. Шаг 3 можно реализовать за время $O(n^2)$, т.к. в L' не более $n - 2$ минимальных сепараторов. Таким образом, в целом процесс определения множества кликовых минимальных сепараторов графа $L^{(2)}(H)$, а значит и гиперграфа H, можно осуществить за время $O(n^3)$. Трудоемкость создания графа $L^{(2)}(H)$ также находится в границах этой оценки.

Если гиперграф H связен и ацикличен, то установить все его кликовые минимальные сепараторы, как множества сочленения, можно без привлечения минимальной триангуляции графа $L^{(2)}(H)$. Для этого необходимо вычислительный процесс организовать следующим образом.

1. Построить вначале реберный граф $L(H)$, а затем взвешенную его версию, в которой каждому ребру $\{u, v\}$ графа $L(H)$ сопоставить вес $|X(u) \cap X(v)|$.
2. Найти остовное дерево наибольшего веса для взвешенного реберного графа $L(H)$. Это дерево — дерево соединений гиперграфа H и дерево клик графа $L^{(2)}(H)$ [7].
3. Определить все множества сочленения гиперграфа H: каждое ребро дерева соединений указывает в H пару $u, v \in U$, для которой $X(u) \cap X(v)$ — множество сочленения.

Согласно определению и свойствам ациклического гиперграфа, а также утверждению 1 и лемме 5, вычисленные множества сочленения ациклического гиперграфа H — кликовые минимальные сепараторы этого гиперграфа. Все шаги указанного вычислительного процесса для (n, m)-гиперграфа можно реализовать за время $O(nm)$. Известен тест на ацикличность гиперграфа, время исполнения которого также составляет $O(nm)$ [7].

Первый из двух приведенных выше способов вычисления кликовых минимальных сепараторов применим к любому связному гиперграфу H, и время его осуществления не зависит от числа ребер гиперграфа. Это достигается за счет специально разработанных модификаций алгоритма MCS [11]. Второй способ легко реализуется с помощью известных графовых алгоритмов отыскания оптимального остова, хотя применим лишь для узкого класса гиперграфов. Оба способа создают для связного (n, m)-гиперграфа всегда не более $n-2$ кликовых минимальных сепараторов (конечно, если они существуют в этом гиперграфе).

4. Разложение гиперграфа на атомы

Пусть $H = (X, U)$ — связный (n, m)-гиперграф и $Y \subseteq X$ — это максимальное по включению подмножество вершин такое, что гиперграф $H(Y)$ связен и не содержит кликовых минимальных сепараторов. Гиперграф $H(Y)$ назовем атомом гиперграфа H. Если гиперграф H вырождается в обыкновенный граф, то понятие атома гиперграфа полностью совпадает с понятием *mps*-подграфа [2]. Обозначим через $\Delta(H)$ множество кликовых минимальных сепараторов и $\Omega(H)$ множество атомов гиперграфа H. Разложение гиперграфа H кликовыми минимальными сепараторами определим следующим алгоритмическим процессом.

1. Первоначально $\Delta(H) = \varnothing$ и в $\Omega(H)$ включить только один гиперграф $H' = (X', U')$, для которого $X' = X$ и $U' = U$.

2. Выбрать из $\Omega(H)$ гиперграф H' и найти в нем какой-либо кликовый минимальный сепаратор S. Если сепаратор S существует, то добавить S к $\Delta(H)$ и подвергнуть H' разложению с помощью данного сепаратора. Для этого в $H'_\mu(X \backslash S)$ найти полные области связности A и B. Далее гиперграф H' заменить в $\Omega(H)$ на $H'(Y_1)$ и $H'(Y_2)$, где $Y_1 = A \cup S$ и $Y_2 = X' \backslash A$. Таким образом, гиперграф $H'(Y_1)$ будет содержать полную область связности A, а гиперграф $H'(Y_2)$ — полную область связности B. Если в H' нет кликового минимального сепаратора, то далее гиперграф H' исключить из обработки, но оставить в $\Omega(H)$.

3. Предыдущий шаг повторять до тех пор, пока в $\Omega(H)$ не окажется гиперграфов с кликовыми минимальными сепараторами.

Очевидно, что данный процесс для (n, m)-гиперграфа можно исполнить за время $O(n^4)$ или $O(n^2 m)$. Пусть в результате этого сформированы множество $\Delta(H)$ кликовых минимальных сепараторов и множество $\Omega(H)$ гиперграфов $H(Y_i)$ с областями связности Y_i соответственно $(i \in I)$.

Утверждение 3. *Разложение $\Omega(H) = \{H(Y_i) : i \in I\}$ задает уникальное для заданного гиперграфа H множество атомов.*

Для доказательства утверждения 3 необходимо убедиться, что результат разложения не зависит от порядка выбора кликовых минимальных сепараторов; каждый из гиперграфов $H(Y_i) \in \Omega(H)$ — атом гиперграфа H, и никакой из атомов этого гиперграфа не утерян при разложении; множество атомов уникально, т.е. $\Omega(H)$ не зависит от минимальных триангуляций, используемых на шаге 2 для нахождения кликовых минимальных сепараторов. Покажем справедливость данных высказываний, выразив их в виде лемм 7–9.

Два минимальных сепаратора S и S' гиперграфа H будем считать зависимыми, если существуют две различные области связности Y_1 и Y_2 гиперграфа $H_\mu(X \backslash S)$ такие, что $S' \cap Y_1 \neq \varnothing$ и $S' \cap Y_2 \neq \varnothing$ (каждая из этих областей содержит хотя бы одну вершину из сепаратора S'), иначе S и S' будем называть независимыми. По определению отношение зависимости между сепараторами симметрично: зависимые сепараторы разделяют друг друга, т.е. S — минимальный (x, y)-сепаратор для некоторой пары вершин $x, y \in S'$, а S' — минимальный (a, b)-сепаратор для какой-то пары вершин $a, b \in S$. Оттого после разложения гиперграфа по одному из них невозможно уже произвести разложение по второму. Очевидно, что сепаратор не может разделить две смежные вершины, поэтому верна

Лемма 7. *Любые различные кликовые минимальные сепараторы S и S' гиперграфа H всегда независимы между собой.*

Исходя из леммы 7, $\Delta(H)$ — множество попарно независимых кликовых минимальных сепараторов гиперграфа H. Значит, после применения на шаге 2 некоторого сепаратора S для разложения гиперграфа H' на $H'(Y_1)$ и $H'(Y_2)$ все другие сепараторы становятся кликовыми минимальными сепараторами в гиперграфах $H'(Y_1)$ и $H'(Y_2)$. Конечно, использованный сепаратор S уже не будет минимальным сепаратором в $H'(Y_1)$, но может остаться минимальным сепаратором в $H'(Y_2)$. Таким образом, результат разложения гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами не зависит от порядка их выбора.

Лемма 8. *Разложение $\Omega(H)$ гиперграфа H кликовыми минимальными сепараторами — множество атомов этого гиперграфа.*

Если гиперграф H не содержит кликовых минимальных сепараторов (например, состоит только из одного ребра), то лемма 8 верна. В данном случае единственный атом гиперграфа — это сам гиперграф. Рассмотрим теперь нетривиальный случай, когда в H имеются кликовые минимальные сепараторы. По построению всякий гиперграф $H(Y_i) \in \Omega(H)$ является атомом, т.к. он связен и не содержит кликовых минимальных сепараторов. Предположим, что имеется некоторый атом $H(Z)$ гиперграфа H, которого нет в построенном разложении $\Omega(H)$, т.е. $Z \subseteq X$ — это максимальное подмножество вершин такое, что гиперграф $H(Z)$ связен и не содержит кликовых минимальных сепараторов. Тогда обязательно или $Z \subseteq A \cup S$, или $Z \subseteq X' \backslash A$ для некоторого кликового сепаратора S и его полных областей связности A и $B \subseteq X' \backslash A$, полученных на каком-то шаге разложения текущего гиперграфа H'. В противном случае $Z \cap S \subset S$ будет кликовым сепаратором, что противоречит минимальности S. Справедливость лишь одного из включений $Z \subseteq A \cup S$, $Z \subseteq X' \backslash A$ свидетельствует о том, что ни один из атомов гиперграфа H не разделяется в процессе разложения.

Лемма 9. *Множество атомов $\Omega(H)$, формируемое при разложении гиперграфа H кликовыми минимальными сепараторами, уникально для H.*

Справедливость леммы 9 основана на аналогичном высказывании, доказанном Лаймером в [2] для разложения обыкновенного графа кликовыми минимальными сепараторами на *mps*-подграфы. В самом деле, граф $L^{(2)}(H)$ сохраняет все клики, окрестности и области связности гиперграфа H. Кроме того, по лемме 2 каждый кликовый минимальный сепаратор связного гиперграфа H является кликовым минимальным сепаратором графа $L^{(2)}(H)$. Поэтому всякая область связности Y некоторого атома $H(Y)$ из $\Omega(H)$ индуцирует в $L^{(2)}(H)$ подграф L', который является *mps*-подграфом графа $L^{(2)}(H)$. Уникальность представления графа $L^{(2)}(H)$ *mps*-подграфами предопределяет уникальность множества $\Omega(H)$ для заданного гиперграфа H.

Приведем некоторые полезные свойства атомов гиперграфа, вытекающие из представленного выше процесса построения $\Omega(H)$. Для обыкновенного графа всякий атом состоит из элементов (вершин и ребер) данного графа, т.е. является его подграфом. В случае гиперграфа это не всегда так. Атом гиперграфа может целиком состоять только из частичных ребер гиперграфа. Каждый атом ациклического гиперграфа — полное ребро гиперграфа. Любой атом гиперграфа H, у которого граф $L^{(2)}(H)$ хордальный, — клика. Пересечение областей связности двух различных атомов или пусто, или образует клику в H. Однако непустое пересечение областей связности двух различных атомов не обязательно является сепаратором гиперграфа H. Для минимального связного (n,m)-гиперграфа число атомов не превосходит n.

5. Приложение: вычисление древовидной ширины гиперграфа

Древовидная ширина — числовой параметр, характеризующий меру древовидности гиперграфа. Этот параметр вычисляется через дерево декомпозиции гиперграфа. Под деревом декомпозиции гиперграфа $H = (X, U)$ принимают пару (M, T), задающую определенное разбиение вершин и ребер гиперграфа H, где $M = \{X_j : j \in J\}$ — семейство непустых подмножеств множества X, называемых «мешками», $T = (I, W)$ — дерево, узлам которого сопоставлены эти «мешки». Данное разбиение удовлетворяет следующим свойствам [5, 12]:

множество «мешков» покрывает все вершины гиперграфа; для всякого ребра гиперграфа всегда существует хотя бы один «мешок», содержащий все вершины этого ребра; для любой вершины $x \in X$ множество узлов, «мешки» которых содержат вершину x, индуцирует поддерево дерева T. Ширина дерева декомпозиции (M, T) — наибольшая вместимость его «мешка», уменьшенная на единицу: $\max\{|X_j| - 1 : j \in J\}$. Древовидная ширина гиперграфа H определяется как наименьшая ширина всех возможных деревьев декомпозиции, существующих для H, и обозначается через $tw(H)$. Если (n, m)-гиперграф H связен, то $1 \leqslant tw(H) \leqslant n-1$ и $tw(H) = tw(H_\mu)$. Кроме того, для любой части $H' = H(Y)$ гиперграфа $H = (X, U)$, индуцированной множеством $Y \subset X$, верно неравенство: $tw(H') \leqslant tw(H)$. Считается, что (n, m)-гиперграф H обладает ограниченной древовидной шириной, если $tw(H) \leqslant k$ и k — целая положительная константа, не зависящая от n. Если $tw(H) \leqslant k$, то размеры клик и сепараторов в H также ограничены сверху константой k.

Установлено, что задача вычисления древовидной ширины гиперграфа является NP-трудной [5]. Использование атомарного представления гиперграфа дает возможность решать ее на основе принципа «разделяй и властвуй» без потери оптимальности. Действительно, пусть для гиперграфа H задано множество кликовых минимальных сепараторов $\Delta(H)$ и множество атомов $\Omega(H) = \{H(Y_i) : i \in I\}$.

Утверждение 4. *Для любого связного гиперграфа $H = (X, U)$ верно равенство:*

$$tw(H) = \max\{tw(H(Y_i)) : i \in I\}. \tag{1}$$

Доказательство. Всякий атом $H' = H(Y_i)$ – часть гиперграфа H, индуцированная множеством $Y_i \subset X$. Поэтому $tw(H') \leqslant tw(H)$. Отсюда

$$\max\{tw(H(Y_i)) : i \in I\} \leqslant tw(H). \tag{2}$$

Докажем теперь, что

$$tw(H) \leqslant \max\{tw(H(Y_i)) : i \in I\}. \tag{3}$$

Убедимся, что неравенство (3) верно для одного шага разложения гиперграфа H. Пусть $S \in \Delta(H)$ и A — полная область связности гиперграфа $H_\mu(X \backslash S)$. Тогда согласно описанной выше процедуре разложения гиперграфа на атомы гиперграф H заменяется на две части $H_1 = H(Y_1)$ и $H_2 = H(Y_2)$, где $Y_1 = A \cup S$, $Y_2 = X \backslash A$, и потому $Y_1 \cap Y_2 = S$. Покажем, что

$$tw(H) \leqslant \max\{tw(H_1), tw(H_2)\}. \tag{4}$$

Предположим, что значение максимума в правой части (4) равно η. Тогда для H_1 и H_2 можно построить два соответствующих дерева декомпозиции ширины не более η. В каждом из них обязательно есть узел, «мешок» которого содержит сепаратор S, потому что данный сепаратор кликовый. Вершины сепаратора S образуют клику в H (значит, в H_1 и H_2), а всякая клика гиперграфа всегда вложена в отдельный «мешок» дерева декомпозиции [12]. Дерево декомпозиции гиперграфа H сформируем из деревьев декомпозиции, построенных для H_1 и H_2, путем добавления в них дополнительного узла с «мешком» S и «склеиванием» данных деревьев посредством этого дополнительного узла. Несомненно, что ширина результирующего дерева декомпозиции не будет превышать η. Таким образом, неравенство (4) верно. Индукция по числу атомов приводит к справедливости (3). Из (2) и (3) следует равенство (1), которое определяет формулу вычисления древовидной ширины гиперграфа H через его атомы, полученные разложением гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами. □

Заключение

Разложение гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами эффективно реализуется на практике. Полученное в результате множество атомов уникально для исходного гиперграфа и зависит лишь от его структурных особенностей. Атомы гиперграфов (в отличие от графов) могут целиком состоять из частичных ребер гиперграфа. Для ациклических гиперграфов разложение на атомы тривиально, т.к. каждое ребро определяет отдельный атом гиперграфа. Следует отметить два основных недостатка разложения гиперграфа на атомы. Во-первых, не все гиперграфы имеют кликовые минимальные сепараторы. Во-вторых, области связности полученных атомов пересекаются. Поэтому возможно перекрытие подзадач, и эффект от применения принципа «разделяй и властвуй» при решении задач на гиперграфах может быть незначительным. Однако на практике эти недостатки не всегда проявляются, т.к. гиперграфы, возникающие в реальных приложениях, часто имеют древовидную ширину, ограниченную сверху малой по значению константой k. Для таких гиперграфов размеры клик, сепараторов, а значит и перекрытий подзадач, ограничены сверху константой k. Представляет интерес изучение графа атомов, в котором вершины — атомы гиперграфа и два атома соединены ребром, если их пересечение — кликовый минимальный сепаратор гиперграфа. Граф атомов дает новое представление гиперграфа, более глобальное, чем дерево декомпозиции, кенигово представление, графы смежности вершин и ребер гиперграфа.

Список литературы

[1] R.E.Tarjan, Decomposition by clique separators, *Discrete Mathematics*, **55**(1985), 221–232.

[2] H.G.Leimer, Optimal decomposition by clique separators, *Discrete Mathematics*, **113**(1993), 99–123.

[3] B.Kaba, N.Pinet, G.Lelandais, A.Sigayret, A.Berry, Clustering gene expression data using graph separators, *In Silico Biology*, **7**(2007), 433–452.

[4] M.Didi Biha, B.Kaba, M.J.Meurs, E.SanJuan, Graph decomposition approaches for terminology graphs, *Proc. MICAI*, 2007, 883–893.

[5] H.L.Bodlaender, Discovering treewidth, Proc. of the 31st Conference SOFSEM 2005, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science 3381, 2005, 1–16.

[6] А.А.Зыков, Гиперграфы, *УМН*, **29**(1974), №6, 89–154.

[7] В.В.Быкова, М-ациклические и древовидные гиперграфы, *Изв. Томского политехн. ун-та. Математика и механика. Физика*, **317**(2010), №2, 25–30.

[8] G.A.Dirac, On rigid circuit graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **25**(1961), 71–76.

[9] A.Berry, J.P.Bordat, P.Heggernes, G.Simonet, Y.Villanger, A wide range algorithm for minimal triangulation from an arbitrary ordering, *J. Algorithms*, **58**(2006), №1, 33–66.

[10] D.J.Rose, R.E.Tarjan, G.S.Lueker, Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM J. Comput.*, **5**(1976), 266–283.

[11] A.Berry, J.R.S.Blair, P.Heggernes, Maximum cardinality search for computing minimal triangulations of graphs, *Algorithmica*, **39**(2004), 287–298.

[12] В.В.Быкова, Рекуррентные методы вычисления древовидной ширины гиперграфа, *Изв. Томского политехн. ун-та. Управление, выч. техника и информатика*, **318**(2011), №5, 5–10.

The Clique Minimal Separator Decomposition of a Hypergraph

Valentina V. Bykova

We present the decomposition of a hypergraph into its atoms with using the clique minimal separators. We have indicated that this decomposition is unique. We offer effective procedures for computing the clique minimal separators and construction the decomposition. We give the application by decomposition for computing the treewidth of a hypergraph.

Keywords: atom hypergraph, clique separator, acyclicity, treewidth.