ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Магденко Евгений Петрович

# Решение линейных сопряжённых задач для уравнений вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук, профессор
Андреев Виктор Константинович

Красноярск — 2016

# Содержание

# Введение

**Актуальность проблемы.** Изучение свойств жидкости, будь то вода, раствор химического реагента или расплав металла, приводит к необходимости проведения исследования её внутреннего состояния. Так, для жидкости, находящейся в состоянии покоя, большое значение имеет формулировка законов воздействия внешних факторов, способных в определённых условиях привести к потере устойчивости механического равновесия. Большой практический интерес имеют задачи о формировании конвекции в жидкости. Динамика развития структур течения существенно зависит от граничных условий или внутренних источников. Кроме того, значительное влияние могут оказать внутренние поверхности раздела, фронты химических реакций, потоки тепла и примеси. Так известно, что в неоднородно нагретой жидкости возникает движение, и часто это происходит в двух и более жидких средах, которые контактируют вдоль некоторых поверхностей раздела. Если при взаимодействии жидкости не смешиваются друг с другом, то они формируют поверхность раздела. В качестве примеров можно привести систему нефть-вода [7], внутренние волны [43], плёночные течения [5]. В настоящее время интерес к моделям многофазных потоков с учётом различия физических и химических факторов возникает при проектировании систем охлаждения и электростанций, росте кристаллов и плёнок, аэрокосмической промышленности [8, 64, 65, 72]. Исследование такого рода задач связано с большими математическими трудностями: нелинейность уравнений и граничных условий на поверхностях раздела, неизвестность областей определения решений. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей, содержащих меньшее число независимых переменных. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве "тестовых задач"для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов, а также имеют чрезвычайно важное значение при изучении устойчивости течений.

В условиях, близком к невесомости, существенное влияние на устойчивость её равновесия и движения жидкостей с поверхностью раздела или со свободной поверхностью оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярную неустойчивость (эффект Марангони). В 1958 году выходит первая теоретическая работа, выполненная Пирсоном [66], в которой исследован механизм неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной поверхностью при отсутствии массовых сил. В этой статье был приведён принципиальный результат: наличие только термокапиллярных сил может приводить к возникновению движения в жидкости. В более поздних работах других авторов, например, [70, 71] линейная теория устойчивости в задаче о конвекции Марангони была расширена и уже включала в себя случай двухфазных сред и случаи когда капиллярное число не равно нулю и присутствует сила тяжести. Дальнейшее теоретическое изучение влияния термокапиллярного эффекта на устойчивость равновесия было продолжено рядом авторов [59, 65, 67].

В связи с развитием современной технологии появились новые задачи,когда необходимо учитывать термокапиллярный эффект и в земных условиях. Например, при лазерном отжиге полупроводников или при лазерной обработке материалов с плавлением, которая применяется для легирования поверхностного слоя металла [17]. При этом на поверхности материала появляются относительно протяжённые тонкие слои расплава (глубиной порядка нескольких мкм), в которых, согласно [68, 69], термокапиллярные силы доминируют над силами термогравитации. Возникающие здесь математические вопросы термокапиллярной устойчивости интенсивно исследуются в [14], [55].

В работах [4, 57, 58] получен ряд точных решений уравнений конвекции Марангони. Одно из первых решений было получено в [63]. Это стационарное течение Пуазейля двух несмешивающихся жидкостей в наклонном канале. В данных работах почти все течения были стационарными и однонаправленными, а их устойчивость исследовалось в [2, 5]. Гораздо позже началось изучение нестационарных термокапиллярных течений [9, 56].

В работе [60] была исследована задача о термокапиллярной конвекции двух несжимаемых жидкостей в контейнере, разделённых замкнутой поверхностью раздела. Локальная (по времени) однозначная разрешимость задачи получена в гёльдеровских классах функций. Задача о термокапиллярном движении капли во всём трёхмерном пространстве изучена в работе [61]. При этом её однозначная разрешимость установлена в классах Гёльдера с весом степенного типа. Оказалось, что векторное полу скорости убывает на бесконечности таким же образом, как и начальные данные и массовые силы, а температура стремится к постоянной, которая является пределом начальной температуры на бесконечности.

Из вышесказанного следует, что оценка эффекта Марангони (влияние термокапиллярных сил) в той или иной выбранной модели является актуальной задачей.

В качестве математической модели в диссертации используются уравнения Обербека – Буссинеска, которые записываются в цилиндрической системе координат. Пусть $u, v, w$ — проекции вектора скорости на оси $r, \varphi, z$. Тогда уравнения модели Обербека – Буссинеска, описывающие конвективные движения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в поле тяжести, примут вид

$$
\begin{gathered}
\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho_0}\,p_r = \nu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2v_\varphi}{r^2}\right) + l(\theta)g^r,\\
\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho_0 r}\,p_\varphi = \nu\left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2u_\varphi}{r^2}\right) + l(\theta)g^\varphi,\\
\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho_0}\,p_z = \nu\Delta w + l(\theta)g^z,\\
u_r + \frac{1}{r}\,u + v_\varphi + w_z = 0,\\
\frac{d\theta}{dt} = \chi\Delta\theta.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $p(r,\varphi,z,t)$ — давление; $\theta(r,\varphi,z,t)$ — температура; $\rho_0 = \mathrm{const} > 0$ — средняя плотность жидкости; $\nu$ — кинематическая вязкость; $\chi$ — коэффициент температуропроводности; $l(\theta) = 1 - \beta\theta$ для модели Обербека–Буссинеска, $\beta > 0$ — коэффициент теплового расширения жидкости; $g^r, g^\varphi, g^z$ — проекции плотности внешних сил на оси $r, \varphi, z$. В уравнениях (1) использованы обозначения полной производной

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

и оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Система (1) является нелинейной, она имеет высокий порядок и не относится к какому-либо из классических типов. Всё это повышает роль точных решений указанной системы, в которых понижается их размерность, порядок редуцируемых уравнений, а в ряде случаев происходит их линеаризация. Систематический анализ точных решений основан на применении методов группового анализа дифференциальных уравнений [42]. Применительно к системе (1) это было сделано в работе [23], где рассмотрен плоский стационарный случай, и в работе [20], где изучен общий случай и, кроме того, исследована задача групповой классификации уравнений конвекции с коэффициентами переноса, зависящими от температуры. Групповая природа решения Бириха выявлена в статьях [23, 48]. Во второй из них дано обобщение Бириха на трёхмерный случай. Другие применения теоретико-групповых методов в задачах конвекции описаны в монографиях [5, 7, 58].

Решения системы (1), найденные в работах [4, 12, 51, 21], допускают интерпретацию в виде течений в плоском горизонтальном или наклонном канале. В статье [48] рассмотрено нестационарное движение жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе. Все эти решения объединяет следующее обстоятельство: поле температуры в них представимо в виде $\Theta = -Az + T$, где $A = \text{const}$, а функция $T$ не зависит от продольной координаты $z$. Впервые решения уравнений Обербека – Буссинеска, обладающие этим свойством, были найдены Г.А. Остроумовым [44] при исследовании задачи об устойчивости равновесия жидкости в вертикальной трубе при наличии продольного градиента температуры. В этой задаче возникающие вторичные течения имеют простую природу: в них горизонтальные компоненты скорости равны нулю, а вертикальная компонента и температура находятся из линейной системы уравнений. Возникает естественный вопрос: нельзя ли отказаться от предположения $A = \text{const}$, сохранив относительно простую структуру течения? В статье [49] даётся утвердительный ответ на этот вопрос в случае плоского течения в горизонтальной полосе. Подобное обобщение допускает решение с вращательной симметрией, полученное в работе [13].

В диссертационной работе будут рассматриваться сопряжённые задачи, описывающие двухслойные движения, поэтому введём индекс $j$ для всех величин, за исключением $g^r, g^\varphi, g^z$: $u_j$, $v_j$, $w_j$, $p_j$, $\theta_j$, $\rho_{0j}$, $\nu_j$, $\chi_j$, $\beta_j$, $j = 1, 2$.

Пусть жидкость *1* занимает область $\Omega_{1t}$, а жидкость *2* — область $\Omega_{2t}$, и они контактируют, не смешиваясь, по поверхности раздела $\Gamma_t$. Будем рассматривать два типа границ раздела. В первом из них $\Gamma_t$ описывается уравнением $f(r, \varphi, z, t) \equiv r - h(\varphi, z, t) = 0$, а во втором $f(r, \varphi, z, t) = z - h_1(r, \varphi, t) = 0$. Выпишем условия на поверхности $\Gamma_t$ для каждого случая.

Кинематические условия:

$$h_t + \frac{v}{r} h_\varphi + w h_z = u, \quad r = h(z, \varphi, t); \tag{2}$$

$$h_{1t} + \frac{v}{r} h_{1\varphi} + u h_{1r} = w, \quad z = h_1(r, \varphi, t). \tag{3}$$

В (2), (3) $u, v, w$, суть общее значение скоростей на $\Gamma_t$,

$$u_1 = u_2 \equiv u, \quad v_1 = v_2 \equiv v, \quad w_1 = w_2 \equiv w, \quad r = h(z, \varphi, t) \tag{4}$$

$(z = h_1(r, \varphi, t))$.

Динамическое условие на $\Gamma_t$ в общем случае имеет вид [10, 47]

$$(P_1 - P_2)\mathbf{n} = 2\sigma K \mathbf{n} + \nabla_{11}\sigma, \tag{5}$$

где $P_j = -p_j E + 2\rho_{0j}\nu_j D(\mathbf{u}_j)$ — тензоры напряжений, $D(\mathbf{u}_j)$ — тензор скоростей деформаций $j$-ой жидкости, причём

$$D(\mathbf{u}_j)=\begin{pmatrix} u_{jr} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_{j\varphi}}{r}+v_{jr}-\dfrac{v_j}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(w_{jr}+u_{jz}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_{j\varphi}}{r}+v_{jr}-\dfrac{v_j}{r}\right) & \dfrac{v_{j\varphi}}{r}+\dfrac{u_j}{r} & \dfrac{1}{2}\left(v_{jz}+\dfrac{w_{j\varphi}}{r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(w_{jr}+u_{jz}\right) & \dfrac{1}{2}\left(v_{jz}+\dfrac{w_{j\varphi}}{r}\right) & w_{jz} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$\mathbf{n}$ — единичная нормаль к $\Gamma_t$, $K$ — её средняя кривизна,

$$K=\frac{(h_{\varphi\varphi}-h)(1+h_z^2)h-2h_\varphi(h_\varphi+h_{\varphi z}h_z h)+h_{zz}h(h^2+h_\varphi^2)}{2\sqrt{(h^2+h_\varphi^2+h^2h_z^2)^3}}, \qquad (7)$$

$\sigma(\theta)$ — коэффициент поверхностного натяжения, где $\theta$ — общее значение температур на $\Gamma_t$,

$$\theta_1(r,\varphi,z,t)=\theta_2(r,\varphi,z,t)\equiv\theta(r,\varphi,z,t), \qquad (8)$$

$r=h(z,\varphi,t)$ $(z=h_1(r,\varphi,t))$; $\nabla_{11}\sigma=\nabla_{11}\theta\, d\sigma/d\theta$ — поверхностный градиент, где $\nabla_{11}=\nabla-\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)$.

Выпишем подробнее условия (5) на $\Gamma_t$. Для поверхности $\Gamma_t$, заданной уравнением $r=h(\varphi,z,t)$, нормаль имеет вид (в цилиндрической системе координат)

$$\mathbf{n}=(1,-h_\varphi/r,-h_z)/L, \quad L=\sqrt{1+h_\varphi^2/r^2+h_z^2},$$

а касательные единичные векторы таковы:

$$\mathbf{e}_1=\frac{(h_\varphi/r,1,0)}{\sqrt{1+h_\varphi^2/r^2}}, \quad \mathbf{e}_2=\frac{(h_z,0,1)}{\sqrt{1+h_z^2}}.$$

Векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ образуют локальный базис на $\Gamma_t$. Проектируя векторное равенство (5) с учётом (6) на этот базис, получим [8]

$$\begin{aligned} p_2-p_1+\frac{2\mu_1}{L^2}\Big[u_{1r}-\frac{h_\varphi}{r}\left(v_{1r}-\frac{v_1}{r}+\frac{u_{1\varphi}}{r}\right)-h_z(u_{1z}+w_{1r})+ \\ +\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(v_{1z}+\frac{w_{1\varphi}}{r}\right)+\frac{h_\varphi^2}{r^3}(v_{1\varphi}+u_1)+h_z^2w_{1z}\Big]- \\ -\frac{2\mu_2}{L^2}\Big[u_{2r}-\frac{h_\varphi}{r}\left(v_{2r}-\frac{v_2}{r}+\frac{u_{2\varphi}}{r}\right)-h_z(u_{2z}+w_{2r})+ \\ +\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(v_{2z}+\frac{w_{2\varphi}}{r}\right)+\frac{h_\varphi^2}{r^3}(v_{2\varphi}+u_2)+h_z^2w_{2z}\Big]=2\sigma K; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\mu_1\Bigg[\left(1-\frac{h_\varphi^2}{r^2}\right)\left(v_{1r}-\frac{v_1}{r}+\frac{u_{1\varphi}}{r}\right)+\frac{2h_\varphi}{r}\left(u_{1r}-\frac{v_{1\varphi}}{r}-\frac{u_1}{r}\right)-$$
$$-\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(u_{1z}+w_{1r}\right)-h_z\left(v_{1z}++\frac{w_{1\varphi}}{r}\right)\Bigg]-$$
$$-\mu_2\Bigg[\left(1-\frac{h_\varphi^2}{r^2}\right)\left(v_{2r}-\frac{v_2}{r}+\frac{u_{2\varphi}}{r}\right)+\frac{2h_\varphi}{r}\left(u_{2r}-\frac{v_{2\varphi}}{r}-\frac{u_2}{r}\right)-$$
$$-\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(u_{2z}+w_{2r}\right)-h_z\left(v_{2z}++\frac{w_{2\varphi}}{r}\right)\Bigg]=L\left(\frac{h_\varphi\theta_r}{r}+\frac{\theta_\varphi}{r}\right)\frac{d\sigma}{d\theta}\,; \quad (10)$$

$$\mu_1\Bigg[(1-h_z^2)(u_{1z}+w_{1r})+2h_z(u_{1r}-w_{1z})-\frac{h_\varphi}{r}\left(v_{1z}+\frac{w_{1\varphi}}{r}\right)-$$
$$-\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(v_{1r}-\frac{v_1}{r}+\frac{u_{1\varphi}}{r}\right)\Bigg]-\mu_2\Bigg[(1-h_z^2)(u_{2z}+w_{2r})+2h_z(u_{2r}-w_{2z})-$$
$$-\frac{h_\varphi}{r}\left(v_{2z}+\frac{w_{2\varphi}}{r}\right)-\frac{h_\varphi h_z}{r}\left(v_{2r}-\frac{v_2}{r}+\frac{u_{2\varphi}}{r}\right)\Bigg]=L(h_z\theta_r+\theta_z)\frac{d\sigma}{d\theta}\,, \quad (11)$$

где $\mu_j=\rho_{0j}\nu_j$ — динамические вязкости.

Кроме равенства температур (8) на $\Gamma_t$ необходимо учесть условие [10]

$$k_2\frac{\partial\theta_2}{\partial n}-k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n}=æ\theta\nabla_{11}\cdot\mathbf{u}+\omega(\theta_t+\mathbf{u}\cdot\nabla_{11}\theta), \quad (12)$$

где $k_1,k_2$ — коэффициенты теплопроводностей,

$$æ=-\frac{d\sigma}{d\theta}\,,\quad \omega=\frac{d}{d\theta}\,(\sigma(\theta)+æ\theta), \quad (13)$$

а $\nabla_{11}\cdot\mathbf{u}$ — поверхностная дивергенция общего значения векторов скоростей на $\Gamma_t$. Учитывая, что $\nabla=(\partial/\partial r, r^{-1}\partial/\partial\varphi,\partial/\partial z)$, перепишем равенство (12) в цилиндрических координатах:

$$k_2\left(\theta_{2r}-\frac{1}{r^2}\,h_\varphi\theta_{2\varphi}-h_z\theta_{2z}\right)-k_1\left(\theta_{1r}-\frac{1}{r^2}\,h_\varphi\theta_{1\varphi}-h_z\theta_{1z}\right)=$$
$$=L\left[æ\theta\nabla_{11}\cdot\mathbf{u}+\omega(\theta_t+\mathbf{u}\cdot\nabla_{11}\theta)\right]. \quad (14)$$

Вычислим правую часть выражения (14) в локальных координатах $\varphi,z$. В декартовых координатах поверхность раздела $\Gamma_t$ имеет параметризацию $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\varphi,z,t)=(h(\varphi,z,t)\cos\varphi, h(\varphi,z,t)\sin\varphi,z)$, поэтому векторы, вообще говоря, не единичные, $\mathbf{e}_1'=\partial\mathbf{x}/\partial\varphi=(h_\varphi\cos\varphi-h\sin\varphi, h_\varphi\sin\varphi+h\cos\varphi,0)$, $\mathbf{e}_2'=\partial\mathbf{x}/\partial z=(h_z\cos\varphi,h_z\sin\varphi,1)$ суть ковариантные, касательные к $\Gamma_t$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ в этой системе координат таков:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{e}_1'\times\mathbf{e}_2'}{hL}\,,\quad L=\sqrt{1+\frac{h_\varphi^2}{h^2}+h_z^2}\,.$$

Пусть $n$ — эвклидово расстояние от точки, лежащей вне $\Gamma_t$, до этой поверхности. Поверхность $\Gamma_t$ имеет непрерывную кривизну, значит, тройка чисел $\varphi, z, n$ определяет координаты этих точек, по крайней мере, для достаточно малых $n$ (вблизи $\Gamma_t$). Следовательно, оператор градиента $\nabla = \nabla_{11} + \mathbf{n}\partial/\partial n$, причём поверхностный градиент $\nabla_{11}$ записывается в виде

$$\nabla_{11} = \mathbf{e}^1 \partial/\partial\varphi + \mathbf{e}^2 \partial/\partial z\,. \tag{15}$$

Через $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ в (15) обозначены векторы контрвариантного базиса на $\Gamma_t$: $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}'_1 = 1$, $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}'_2 = 1$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}'_2 = 0$, $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0$. Из ранее вычисленных векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ и последних соотношений взаимности имеем

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{h}\,(-sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \mathbf{e}^2 = (0, 0, 1). \tag{16}$$

Учитывая связь компонент векторов декартовой и цилиндрической систем координат $u_1 = u\cos\varphi - v\sin\varphi$, $u_2 = u\sin\varphi + v\cos\varphi$, $u_3 = w$, найдём

$$\nabla_{11} \cdot (u_1, u_2, u_3) = \mathbf{e}^1 \cdot (u_{1\varphi}, u_{2\varphi}, u_{3\varphi}) + \mathbf{e}^2 \cdot (u_{1z}, u_{2z}, u_{3z}) = \frac{u}{h} + \frac{v_\varphi}{h} + w_z,$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{11}\theta = \frac{v}{h}\,\theta_\varphi + w\theta_z.$$

Поэтому правая часть (14) равна

$$æ\theta\left(\frac{u}{h} + \frac{v_\varphi}{h} + w_z\right) + \omega\left(\theta_t + \frac{v}{h}\,\theta_\varphi + w\theta_z\right). \tag{17}$$

Перейдём к выводу условий на $\Gamma_t$, когда она задана в виде $z = h_1(r, \varphi, t)$. Здесь в цилиндрической системе координат нормаль

$$\mathbf{n} = \left(h_{1r}, \frac{h_{1\varphi}}{h_1}, -1\right)\frac{1}{L_1}\,, \quad L_1 = \sqrt{1 + h_{1r}^2 + \frac{h_{1\varphi}^2}{h_1^2}}\,, \tag{18}$$

а единичные касательные векторы равны

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(1, 0, h_{1r})}{\sqrt{1 + h_{1r}^2}}\,, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{(0, 1, h_{1\varphi}/h_1)}{\sqrt{1 + h_{1\varphi}^2/h_1^2}}\,. \tag{19}$$

Выпишем проекции динамического условия (5) на базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$, имея в виду выражение для средней кривизны в этом случае:

$$K = \frac{rh_{1rr} + h_{1r} + h_{1\varphi\varphi}/r}{2\sqrt{r^2 + r^2 h_{1r}^2 + h_{1\varphi}^2}}\,. \tag{20}$$

Умножая (5) на нормаль $\mathbf{n}$ из (18) и учитывая, что $\nabla_{11}\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$, получим

$$p_2 - p_1 + 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_1) - \mu_2 D(\mathbf{u}_2)]\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2\sigma K.$$

Поскольку тензоры скоростей деформаций по-прежнему определяются формулами (6), то предыдущее равенство в развёрнутой форме примет вид

$$
\begin{aligned}
p_2 - p_1 + \frac{2\mu_1}{L_1^2}\biggl[h_{1r}^2 u_{1r} + \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{u_{1\varphi}}{r} + v_{1r} - \frac{v_1}{r}\right) +& \\
+ \frac{h_{1\varphi}^2}{h_1^2}\,\frac{1}{r}\,(v_{1\varphi} + u_1) - h_{1r}(w_{1r} + u_{1z}) - \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(v_{1z} + \frac{w_{1\varphi}}{r}\right) + w_{1z}\biggr] -& \\
- \frac{2\mu_2}{L_1^2}\biggl[h_{1r}^2 u_{2r} + \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{u_{2\varphi}}{r} + v_{2r} - \frac{v_2}{r}\right) + \frac{h_{1\varphi}^2}{h_1^2}\,\frac{1}{r}\,(v_{2\varphi} + u_2) -& \\
- h_{1r}(w_{2r} + u_{2z}) - \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(v_{2z} + \frac{w_{2\varphi}}{r}\right) + w_{2z}\biggr] = 2\sigma K,& \quad (21)
\end{aligned}
$$

где $K$ определяется равенством (20).

Далее нам понадобятся выражения для $\nabla_{11}\theta$ и $\nabla_{11}\cdot\mathbf{u}$. В декартовых координатах параметризация $\Gamma_t$ такова: $\mathbf{x} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h_1(r,\varphi,t))$, поэтому касательные (не единичные) векторы к ней есть $\mathbf{e}_1' = \mathbf{x}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, h_{1r})$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{x}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, h_{1\varphi})$, а взаимные (контрвариантные) векторы даются формулами $\mathbf{e}^1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)/r$. Значит, поверхностный градиент $\nabla_{11} = \mathbf{e}^1\partial/\partial r + \mathbf{e}^2\partial/\partial\varphi$ и

$$
\begin{gathered}
\nabla_{11}\theta = \frac{d\sigma}{d\theta}(\mathbf{e}^1\theta_r + \mathbf{e}^2\theta_\varphi), \quad \nabla_{11}\cdot\mathbf{u} = u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r}, \\
\mathbf{u}\cdot\nabla_{11}\theta = u\theta_r + \frac{v}{r}\,\theta_\varphi.
\end{gathered} \quad (22)
$$

Умножая скалярно (5) на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, из (19), найдём

$$
\begin{aligned}
\mu_1\biggl[(h_{1r}^2 - 1)(w_{1r} + u_{1z}) + \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\,\frac{1}{r}\,(v_{1\varphi} + u_1) + \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{u_{1\varphi}}{r} + v_{1r} - \frac{v_1}{r}\right) +& \\
+ 2h_{1r}(u_{1r} - w_{1z})\biggr] - \mu_2\biggl[(h_{1r}^2 - 1)(w_{2r} + u_{2z}) + \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\,\frac{1}{r}\,(v_{2\varphi} + u_2) +& \\
+ \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{u_{2\varphi}}{r} + v_{2r} - \frac{v_2}{r}\right) + 2h_{1r}(u_{2r} - w_{2z})\biggr] = \bigl(\theta_r + h_{1r}\theta_z\bigr)\frac{d\sigma}{d\theta}\,L_1;& \quad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_1\biggl[\left(\frac{h_{1\varphi}^2}{h_1^2} - 1\right)\left(v_{1z} + \frac{w_{1\varphi}}{r}\right) + \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\,(w_{1r} + u_{1z}) + h_{1r}\left(\frac{u_{1\varphi}}{r} + v_{1r} - \frac{v_1}{r}\right) +& \\
+ 2\frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{v_{1\varphi}}{r} + \frac{u_1}{r} - w_{1z}\right)\biggr] - \mu_2\biggl[\left(\frac{h_{1\varphi}^2}{h_1^2} - 1\right)\left(v_{2z} + \frac{w_{2\varphi}}{r}\right) +& \\
+ \frac{h_{1r}h_{1\varphi}}{h_1}\,(w_{2r} + u_{2z}) + h_{1r}\left(\frac{u_{2\varphi}}{r} + v_{2r} - \frac{v_2}{r}\right) + 2\frac{h_{1\varphi}}{h_1}\left(\frac{v_{2\varphi}}{r} + \frac{u_2}{r} - w_{2z}\right)\biggr] =& \\
= \left(\frac{\theta_\varphi}{r} + \frac{h_{1r}}{h_1}\,\theta_z\right)\frac{d\sigma}{d\theta}\,L_1.& \quad (24)
\end{aligned}
$$

Условие для потоков тепла (12) с учётом формул (22) на $\Gamma_t$ примет вид

$$k_2\left(h_{1r}\theta_{2r} + \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\,\theta_{2\varphi} - \theta_{2z}\right) - k_1\left(h_{1r}\theta_{1r} + \frac{h_{1\varphi}}{h_1}\,\theta_{1\varphi} - \theta_{1z}\right) =$$
$$= L_1\left[æ\theta\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r}\right) + \omega\left(\theta_t + u\theta_r + \frac{v\theta_\varphi}{r}\right)\right]; \quad (25)$$

$\theta = \theta_1 = \theta_2$ на $\Gamma_t$ в силу непрерывности температуры (8).

**Замечание 1.** В большинстве приложений зависимость поверхностного натяжения от температуры является линейной: $\sigma(\theta) = \sigma^0 - æ(\theta - \theta^0)$, где $\theta^0$ — температура в некоторой точке поверхности. Согласно (13) $\omega = 0$ и в правой части условия (12) отсутствует второе слагаемое, см. также (17), (25).

**Цель диссертационной работы** заключается в: 1 ) исследовании сопряжённых задач о стационарном и нестационарном распределении тепла в конечном цилиндре; 2 ) изучение спектральных задач о потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии плоской границы раздела и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой; 3 ) решение обратной сопряжённой линейной задачи, описывающей осесимметрическое термокапиллярное движении при малом числе Марангони двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе, общая поверхность раздела которых предполагается недеформируемой и в одном случае является подвижной, а в другом – фиксированной.

**Методы исследования.** В данной работе для нахождения решений использовались метод разделения переменных, метод преобразования Лапласа, метод априорных оценок, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

– построены решения в виде рядов Фурье по функциям Бесселя для сопряжённых задач о стационарном и нестационарном распределении тепла в конечном цилиндре, когда температура на всей границе цилиндров известна; доказана сходимость построенных рядов; доказана единственность решения; указаны условия, при которых решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим;

– исследованы спектральные задачи об устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. В обоих случаях получены явные зависимости спектрального параметра от геометрии области и физических параметров жидкостей.

– получены априорные оценки обратных сопряжённых линейных задач, описывающих осесимметричное термокапиллярное движение при малом числе Марангони для двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. При этом их общая поверхность раздела предполагается недеформируемой и в одном случае является подвижной, а в другом – фиксированной. Для обеих сопряжённых задач даны достаточные условия сходимости решений к стационарному режиму; во второй задаче в образах по Лапласу решение найдено в явном виде, получено стационарное решение, и приведённые тестовые расчёты для конкретных жидких сред хорошо согласуются с полученными априорными оценками.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полученные результаты носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений. Результаты также имеют практическую значимость ввиду их приложений в природных (объяснение физических явлений в зонах конвективной неустойчивости Солнца и звёзд, природы конвективных структур атмосферы и океана) и технологических (лазерный отжиг полупроводников, изготовление плёнок) процессах.

**Обоснованность и достоверность** полученных результатов, содержащихся в диссертации, обеспечивается использованием классических математических моделей механики вязких теплопроводных жидкостей и математических методов их исследования, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Перейдём к описанию структуры и содержания диссертационной работы, которая состоит из введения, четырёх основных глав и заключения. В **первой главе** исследуются задачи об осесимметрическом распределении тепла для двух контактирующих цилиндров, когда температура на всей боковой границе цилиндров известна. На поверхности раздела заданы условия сопряжения: равенство температур и потоков тепла. Внутренние источники тепла отсутствуют. Система находится в состоянии покоя. В пункте 1.1 рассматривается решение стационарной задачи. Потому система (1), записанная для конкретных областей $\Omega_j$, сводится к уравнению Лапласа: $\Delta\Theta_j = 0$. Ищется классическое решение поставленной сопряжённой линейной задачи методом разделения переменных сначала для случая, когда: 1 ) температура на боковой поверхности равна нулю ($T_j(z) = 0$), а на основаниях отлична от нуля ($A_j(r) \neq 0$); 2 ) $A_j(r) = 0$, $T_j(r) \neq 0$. И в первом и во втором случаях находится формальное решение в виде рядов. Далее формулируются условия для функций $A_j$, когда $T_j = 0$, а затем для $T_j$, когда $A_j = 0$ при которых записанные решения являются классическими. В итоге функцию $A_j$ разлагаем в ряд Фурье по бесселевым функциям нулевого порядка с коэффициентами $a_m^j$. Тогда, при выполнении условия

$$|a_m^j| \leq \frac{a^j}{\xi_m^{3+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$, $a^j > 0$ – постоянные; $\xi_m$ – $m$-й корень уравнения $J_0(\xi) = 0$, доказывается, что решение поставленной задачи является классическим. Для случая, когда $A_j = 0$, формальное решение сопряжённой задачи является классическим, если функции $T_j \in C^{s-1}(\Omega_j)$ и имеют кусочно-непрерывную производную порядка $s$, где $s \geq 3$.

В пункте 1.2 рассматривается решение нестационарной задачи. Аналогично, как и предыдущем параграфе, так как задача является линейной, то и поиск её решения разбивается на два этапа: 1 ) температура на боковой поверхности равна нулю ($T_j(z,t) = 0$), а на основаниях сосуда отлична от нуля ($A_j(r,t) \neq 0$). Решение задачи ищется в виде рядов Фурье

$$\Theta_j(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^j(z,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{26}$$

с коэффициентами $C_m^j(z,t)$, определяемыми с помощью преобразования Лапласа. Заданные функции $A_j(r,t)$ разлагаются в ряды Фурье по бесселевым функциям $J_0(\xi_m r/R)$ с коэффициентами $c_m^j(t)$. Для доказательства сходимости рядов (26) подробно изучена задача для функций $C_m^j(z,t)$. В итоге доказано, что если выполняется условие $|c_m^j(t)| \leq |c^j(t)|/m^{1+s+\varepsilon}$ при $s \geq 4$, где $\varepsilon > 0$, $c^j(t) \in C^2[0,T]$ и $\|\Theta_j^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, здесь $\Theta_j^0(r,z) = \Theta_j(r,z,0)$, $l_1 = [-h_1, 0]$ при $j = 1$ и $l_2 = [0, h_2]$ при $j = 2$, $\|\Theta_{jrr}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, то решение поставленной задачи является классическим.

В случае, когда $A_j = 0$, а $T_j \neq 0$ выполняется замена, применив которую получаем задачу с однородными граничными условиями. Её решение подобно решению задачи сформулированной для другой функции в случае, когда $T_j = 0$, а $A_j \neq 0$. Заданные функции $T_j(z,t)$ разлагаются в ряд Фурье по $\sin(\pi m z/h_j)$ с коэффициентами $\bar{a}_m^j(t)$. В результате получаем, что решение поставленной задачи будет классическим, если выполняются следующие условия: 1 ) $|\bar{a}_m^j(t)| \leq |\bar{a}^j(t)|/m^{1+s_1+\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 > 0$, $s_1 \geq 3/2$, $f^j(t) \in C^2([0,T])$; 2 ) функции $T_j(z,t)$ имеют непрерывные производные третьего порядка на $l_j$ при $t \in [0,T]$, где $l_1 = [-h_1, 0]$, $l_2 = [0, h_2]$; 3 ) функции $\Theta_j^0(r,z)$, $\Theta_{jzz}^0(r,z)$ ограничены в пространстве $L_2(\Gamma)$, здесь $\Gamma = [0,R] \times l_j$.

Также в этом пункте доказывается, что решение нестационарной начально-краевой задачи с ростом времени выходит на стационарный режим, если

$$\int_0^{\infty} \|A_j^s - A_j\|_{L_2(\Gamma)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty, \quad \int_0^{\infty} \|T_j^s - T_j\|_{L_2(l_j)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty.$$

где $A_j^s = A(r,0)$, $T_j^s = T_j(z,0)$, постоянная $\delta > 0$ определяется по входным данным задачи.

Во **второй главе** исследуются спектральные задачи о потере устойчивости равновесия: 1 ) двух жидкостей в конечном цилиндре при наличии границы раздела (пункт 2.1); 2 ) однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере конечных размеров с верхней свободной границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой (пункт 2.2). В пункте 2.1 рассматривается цилиндрический контейнер, заполненный двумя покоящимися несмешиваемыми теплопроводными жидкостями с общей деформируемой поверхностью раздела. Боковые стенки сосуда проводимые, и на них выполняется условие просачивания жидкости, при этом общий поток жидкости через всю боковую поверхность равен нулю. Данное условие позволяет при решении задачи воспользоваться методом разделения переменных. Цилиндр нагревают снизу, и когда разность температур на основаниях контейнера достигает критического значения, то возникает движение внутри сосуда. Целью задачи является нахождение этой критической разности, а именно её зависимости от геометрии контейнера и физических параметров жидкости. Для этого и рассматривается линеаризованная на равновесном состоянии задача о малых возмущениях системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в безразмерных переменных, решение которой ищется в виде нормальных волн. Для монотонных возмущений в случае деформируемой поверхности раздела были найдены аналитически критические числа Марангони – собственные значения краевой задачи. Эти числа прямо пропорциональны разности температур на нижнем и верхнем основании цилиндра, зависят от безразмерных физических параметров жидкостей и геометрии контейнеров:

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(\mathrm{Ga}, \mathrm{We}, \mathrm{Pr}, h, \alpha, n),$$

где Ga, We, Pr — числа Галилео, Вебера и Прандтля; $h$ — отношение высоты нижнего слоя жидкости к высоте верхнего слоя; $\alpha$ — отношение радиуса цилиндра к высоте нижнего слоя жидкости; $n$ — номер корня уравнения $\mathrm{J}_0(\delta) = 0$. Так как полученная формула, выражающая данную зависимость, имеет громоздкий вид, то для удобства рассматриваются конкретные жидкости: трансформаторное масло, муравьиная кислота, для которых найдены численные результаты, выражающие зависимость числа Марангони от безразмерных физических параметров жидкостей и геометрии контейнеров. Также отдельно разобран случай, когда система находится в условии невесомости.

В пункте 2.2 задача решается аналогичным образом, как и в предыдущем параграфе. В результате также получена зависимость числа Марангони от физических параметров жидкости и геометрии контейнера для случаев, когда $g \neq 0$ и когда $g = 0$. Доказано, что если радиус цилиндра и номер корня функции Бесселя устремить к бесконечности по специальному закону, то выражение, полученное для M совпадёт с число Марангони для бесконечного слоя, приведённого в [52].

**Глава 3** посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта два уравнения, описывающего осесиммтерческое движение вязкой теплопроводной жидкости, построенного на четырёхмерной подалгебре Ли $G_4 = \langle \partial_z, \partial_w + t\partial_z, \partial_p, \partial_\theta \rangle$, допускаемой системой уравнений (1). Оно интерпретируется как двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой стенкой и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. Таким образом, частично инвариантное решение ищется в виде

$$u_j = u_j(r,t), \quad w_j = zv_j(r,t), \quad p_j = d_j(r,t) - \frac{f_j(t)}{2}z^2,$$

$$\theta_j = a_j(r,t)z^2 + b_j(r,t).$$

Начально – краевая задача для функций $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$, $h(z,t)$ (функция поверхности раздела) является нелинейной и обратной, так как функции $f_j(t)$ являются искомыми. Функции $u_j(r,t)$, $b_j(r,t)$, $d_j(r,t)$ определяются по известным $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$, $f_j(r,t)$, $h(z,t)$. Переходя к безразмерных переменным, в уравнениях при нелинейных слагаемых и в кинематических условиях при линейных членах, содержащих скорости, появится сомножитель в виде числа Марангони (M). Проектируя динамические условия на нормали и переходя к безразмерным параметрам в правых частях появятся числа Вебера (We). Предполагая, что $\mathrm{M} \ll 1$ (ползущее термокапиллярное движение), а также $\mathrm{We} \gg 1$ задача заменяется линейной. Также предполагается, что в начальный момент времени поверхность раздела была круглым цилиндром.

В пунктах 3.2, 3.3 получены априорные оценки для решений $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ поставленных задач, равномерные на своих областях определения, и в пункте 3.4 показано, что если выполняется ряд условий, то данные функции с ростом времени экспоненциально стремятся к нулю.

В **четвёртой главе** исследуемая задача отличается от задачи рассматриваемой в предыдущей главе тем, что здесь поверхность раздела между двумя несмешивающимися вязкими теплопроводными жидкостями является фиксированной. В результате чего в постановке задачи для функции $v_j(r,t)$ изменится условие на поверхности раздела. Кроме того, здесь начальные данные считаются ненулевыми. Задача для $a_j(r,t)$ записывается аналогичным образом как и в предыдущей главе. В пункте 4.2 найдено стационарное решение. В пункте 4.3 получены априорные оценки решений $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ и показано, что данные функции с ростом времени равномерно стремятся к нулю. В изображениях по Лапласу получены точные решения нестационарных задач для функций $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$. В пункте 4.5 сформулированы условия, при которых данные решения с ростом времени стремятся к стационарному.

Основные результаты работы сформулированы в виде 7 теорем и 17 лемм.

**Заключение** содержит результаты и выводы проделанной работы.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Решение задач о стационарном и нестационарном распределении тепла для двух контактирующих цилиндров, когда температура на всей границе цилиндров известна. Доказательство единственности решений. Построение решений в виде рядов, доказательство их сходимости. Доказательство того факта, что при некоторых условиях, задаваемых для температуры на всей границе цилиндра, решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим.

2. Решение спектральной задачи об устойчивости равновесия: 1 ) двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела; 2 ) однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. В обоих случаях получение явной зависимости критического числа Марангони от геометрических параметров сосуда и физических параметров жидкостей.

3. Решение линейных задач о термокапиллярном движении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе, когда их общая поверхность раздела недеформируема и: 1 ) подвижная; 2 ) фиксированная. Нахождение стационарного решения второй задачи. Определение априорных оценок обеих задач и формулировка достаточных условий сходимости решений к стационарному режиму. Получение в образах по Лапласу решения второй задачи в явном виде.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах:

– XLIII Краевая научная студенческая конференция по математике и компьютерным науками, Красноярск, 2010;

– XI Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Красноярск, 2010;

– XLIX Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, 2011;

– VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодежь и наука" (Красноярск, 2012);

– L Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, 2012;

– Научная конференция Герценовские чтения – 2013 "Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования", С.-Петербург, 2013;

– Международная научная конференция “Информационно – вычислительные технологии и математическое моделирование”, Кемерово, 2013;

– V Всероссийская конференция с участием зарубежных учёных “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”, Бийск, 2014;

– Конференция молодых учёных математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН, Красноярск, 2015;

– Международная конференция “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”, Улан-Удэ - Байкал, 2015;

– Семинар Института Вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике"под руководством профессора В. К. Андреева;

– Семинар Института математики и фундаментальной информатики сибирского федерального университета "Обратные задачи"под руководством профессора Ю. Я. Белова, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [28] - [38], [62].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф. – м. н., профессору В. К. Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

Результаты диссертации получены в рамках интеграционного проекта СО РАН №38 и проектов РФФИ № 11-01-00283, № 14-01-00067.

# 1 Решение задач о распределении тепла для двух контактирующих цилиндров

В этой главе исследуются задачи о стационарном и нестационарном распределении тепла для двух контактирующих цилиндров, когда температура на всей боковой границе цилиндров известна. На поверхности раздела заданы условия сопряжения: равенство температур и потоков тепла. Доказана единственность решения. Построены решения в виде рядов Фурье по функциям Бесселя, доказана их сходимость. Указаны условия, при которых решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим.

## 1.1 Стационарное решение

Пусть в сосуде цилиндрической формы находятся две покоящиеся жидкости, которые образуют общую поверхность раздела (рисунок 1). Рассмотрим осесиммтерический случай. Обозначим через $\Theta_j\,(r,z)$ — стационарное распределение температур в области $\Omega_j$, $j=1,2$ $(\Omega_1=(0,R)\times(-h_1,0)$, $\Omega_2=(0,R)\times(0,h_2))$. Внутренние источники тепла отсутствуют. Так как система находится

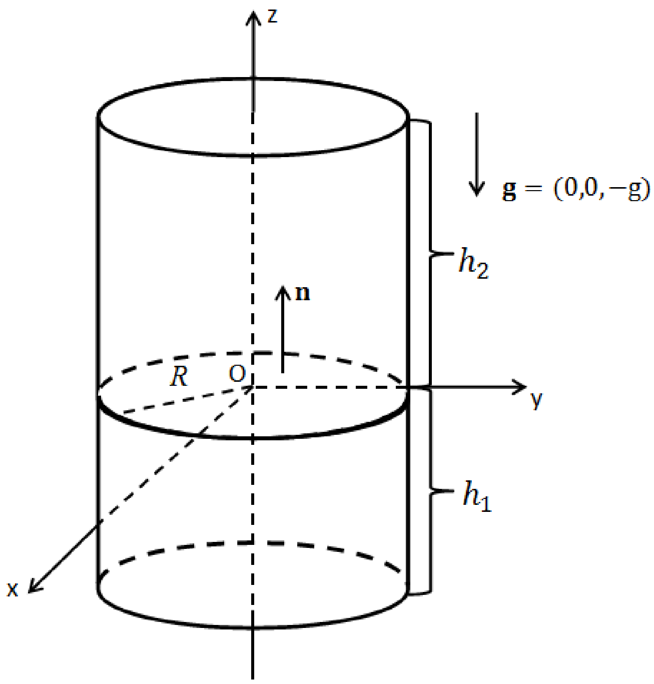


Рисунок 1. Схема области решения

в состоянии покоя ($\mathbf{u}_j=0$, $\mathbf{u}_j$ — вектор скорости) и рассматривается осесимметрический случай, то система (1) введения сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta_j = \frac{\partial^2\Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_j}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta_j}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1.1}$$

Граничные условия таковы ($k_1 \neq k_2$ — коэффициенты теплопроводности сред):

$$\begin{gathered}\Theta_1(r,-h_1) = A_1(r), \quad \Theta_2(r,h_2) = A_2(r),\\ \Theta_j(R,z) = T_j(z),\\ \Theta_1(r,0) = \Theta_2(r,0), \quad k_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial z}(r,0) = k_2\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}(r,0).\end{gathered} \tag{1.1.2}$$

Первые три из них означают, что на всей поверхности цилиндра задана температура, а четвертое и пятое — равенство температур и потоков тепла на поверхности контакта (раздела двух сред) $z = 0$. Заметим, что для непрерывности такого решения должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{gathered}T_1\left(-h_1\right) = A_1\left(R\right), \quad T_2\left(h_2\right) = A_2\left(R\right),\\ T_1\left(0\right) = T_2\left(0\right), \quad k_1\frac{\partial T_1}{\partial z}\left(0\right) = k_2\frac{\partial T_2}{\partial z}\left(0\right).\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

Предположим, что функции $A_j(r)$ непрерывны при $r \in [0,R]$, $T_1(z)$, $T_2(z)$ непрерывны при $z \in [-h_1,0]$ и $z \in [0,h_2]$ соответственно и имеют производные в точке $z = 0$ согласно последнему равенству (1.1.3). Ищется классическое решение сопряжённой задачи (1.1.1), (1.1.2) $\Theta_j(r,z) \in C^2(\Omega_j) \cap C^1(S_j)$, где $S_1 = S_{11} \cup S_{12} \cup \Gamma$, $S_2 = S_{21} \cup S_{22} \cup \Gamma$, причём $S_{11} = \{r,z \mid 0 \le r \le R, z = -h_1\}$, $S_{12} = \{r,z \mid r = R, -h_1 \le z \le 0\}$, $\Gamma = \{r,z \mid 0 \le r \le R, z = 0\}$, $S_{21} = \{r,z \mid 0 \le r \le R, z = h_2\}$, $S_{22} = \{r,z \mid r = R, 0 \le z \le h_2\}$.

Имеет место

**Лемма 1.1.1.** Классическое решение задачи (1.1.1), (1.1.2), если оно существует, определяется единственным образом.

**Доказательство.** Пусть имеется два решения нашей задачи $\Theta_j^1$ и $\Theta_j^2$ с теми же граничными значениями $A_j(r)$, $T_j(z)$. Тогда их разность $\bar\Theta_j = \Theta_j^1 - \Theta_j^2$ удовлетворяет уравнениям (1.1.1), но уже с нулевыми тремя условиями (1.1.2). Умножим уравнения (1.1.1) на $k_j\bar\Theta_j$, затем проинтегрируем их по областям $\Omega_j$ и результаты сложим. Пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского и всеми граничными данными вида (1.1.2) с $A_j = 0$, $T_j = 0$, получим

$$k_1\int\limits_{\Omega_j} |\nabla\bar\Theta_1|^2 d\Omega_1 + k_2\int\limits_{\Omega_2} |\nabla\bar\Theta_2|^2 d\Omega_2 = 0, \quad (\nabla\bar\Theta_j = (\bar\Theta_{jr}, \bar\Theta_{jz}))$$

откуда и следует, что $\bar\Theta_j = 0$ в $\Omega_j$.

**Решение задачи в случае нулевой температуры на боковых стенках**

Поскольку поставленная задача является линейной, будем сначала искать её решение при $T_j(z) \equiv 0$ методом разделения переменных. Разложим функции $A_j(r)$, $(A_j(R) = 0)$ в ряд Фурье по бесселевым функциям нулевого порядка $J_0\left(\xi_m r/R\right)$, $\xi_m$ — $m$-й корень уравнения $J_0(\xi) = 0$ [18], при $m >> 1$ $\xi_m \approx m\pi$ [16],

$$A_j(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^j J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{1.1.4}$$

здесь $a_m^j$ — постоянные. Требование на гладкость $A_j$ будут формулироваться по мере надобности.

Легко проверить, что формальное решение сопряжённой задачи (1.1.1), (1.1.2) в этом случае имеет вид

$$\Theta_1(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)}{\Delta_m}\left[a_m^1\left(k\,\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m z}{R}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\,\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m z}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right)\right) + a_m^2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m (h_1+z)}{R}\right)\right],$$

$$\Theta_2(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)}{\Delta_m}\left[a_m^2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m z}{R}\right) + \right.\right. \tag{1.1.5}$$
$$\left.\left. +k\,\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m z}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)\right) + a_m^1 k\,\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m (h_2-z)}{R}\right)\right],$$

$$\Delta_m = k\,\mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right) + \mathrm{ch}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right), \quad k = k_1/k_2. \tag{1.1.6}$$

Докажем, что решение (1.1.5) задачи (1.1.1), (1.1.2) является классическим решением. Согласно [54], ряды для функций $A_{jr}^{(s)}$ $s = 0,1,2$ сходятся одновременно абсолютно и равномерно на $[0,R]$, если при $m >> 1$

$$|a_m^j| \le \frac{a^j}{(\xi_m)^{3+\varepsilon}} \tag{1.1.7}$$

где $\varepsilon > 0$ и $a^j > 0$ — постоянные. Что касается ряда для функций $r^{-1}A_{jr}$, то, так как $J_0'(x) = -J_1(x)$ [16], он также будет сходиться абсолютно и равномерно на $[0,R]$, если выполняется условие (1.1.7).

Поскольку в области $\Omega_1$ $-h_1 \le z \le 0$, то $z + h_2 \le h_2$ и $h_1 + z \le h_1$, кроме того $\mathrm{sh}\left(\xi_m h_j/R\right)/\,\mathrm{sh}\left(\xi_m(h_1+h_2)/R\right) \le 1$ и из (1.1.6) получаем, что $\Delta_m \ge \min(1,k)\,\mathrm{sh}\left(\xi_m(h_1+h_2)/R\right)$, то тогда из (1.1.5) для $|\Theta_1|$ имеем оценку:

$$|\Theta_1| \leq \frac{\max(1,k)}{\min(1,k)} \sum_{m=1}^{\infty} \left| J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| (|a_m^1| + |a_m^2|) \leq \frac{\max(1,k)}{\min(1,k)} \left(|A_1| + |A_2|\right). \quad (1.1.8)$$

Аналогично получим, что

$$\begin{gathered} |\Theta_{1rr}| \leq \frac{\max(1,k)}{\min(1,k)} \left(|A_{1rr}| + |A_{2rr}|\right), \\ |r^{-1}\Theta_{1r}| \leq \frac{\max(1,k)}{\min(1,k)} \left(|r^{-1}A_{1r}| + |r^{-1}A_{2r}|\right). \end{gathered} \quad (1.1.9)$$

Поэтому ряды для функций $\Theta_1$, $\Theta_{1rr}$, $r^{-1}\Theta_{1r}$ сходятся абсолютно и равномерно на $[0, R]$ при $\varepsilon > 0$ и постоянной $a^j > 0$, если справедливо условие (1.1.7).

Поскольку

$$\left|\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2}\right| \leq \frac{\max(1,k)}{\min(1,k)} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 \left| J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| (|a_m^1| + |a_m^2|), \quad (1.1.10)$$

то совершенно очевидно, что ряд для функций $\Theta_{1zz}$ также сходится абсолютно и равномерно на $[0, R]$, если выполняется условие (1.1.7).

Таким образом, нами доказана:

**Лемма 1.1.2.**: Ряды для функций $\Theta_1$, $\Theta_{1rr}$, $r^{-1}\Theta_{1r}$, $\Theta_{1zz}$ сходятся абсолютно и равномерно на $[0, R]$, если справедливо условие (1.1.7).

Аналогичные рассуждения проводятся и для ряда функций $\Theta_2(r, z)$. Отсюда следует, что решение (1.1.5) задачи (1.1.1), (1.1.2), для случая, когда $A_j(r) \neq 0, T_j(z) = 0$ является классическим. Поэтому $\Theta_j(r, z) \in C^2(\Omega_j) \cap C^1(S_j)$.

#### Решение задачи в случае нулевой температуры на основаниях цилиндра

Теперь будем искать решение задачи (1.1.1), (1.1.2), когда $A_j(r) = 0$, а $T_j(z) \neq 0$. В этом случае воспользуемся решением уравнений (1.1.1) для конечных цилиндров [45]. Для осесиммтерического случая оно записывается в виде

$$\begin{gathered} \Theta_1(r,z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)}{I_0\left(\frac{\pi n R}{h_1}\right)} C_{1n} \sin\frac{\pi n z}{h_1} + \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) D_{1m} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m (h_1 + z)}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)}, \\ \Theta_2(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi n r}{h_2}\right)}{I_0\left(\frac{\pi n R}{h_2}\right)} C_{2n} \sin\frac{\pi n z}{h_2} + \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) D_{2m} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m (h_2 - z)}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right)}, \end{gathered} \quad (1.1.11)$$

с неизвестными постоянными $C_{jn}$, $D_{jm}$, которые находятся из граничных условий (1.1.2). Разложим функции $T_j(z)$ в ряд Фурье по функциям синуса $\sin(\pi nz/h_j)$

$$T_1\left(z\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin\frac{\pi nz}{h_1}, \quad T_2\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \sin\frac{\pi nz}{h_2},$$

откуда

$$C_{1n} = -\frac{1}{h_1}\int\limits_{-h_1}^{0} T_1\left(z\right)\sin\frac{\pi nz}{h_1}\,dz, \quad C_{2n} = \frac{1}{h_2}\int\limits_{0}^{h_2} T_2\left(z\right)\sin\frac{\pi nz}{h_2}\,dz. \tag{1.1.12}$$

Из равенства температур при $z = 0$ (четвёртое условие из (1.1.2)) получаем, что $D_{1m} = D_{2m}$. Тогда из равенства потоков тепла (пятое условие из (1.1.2))

$$\pi\left[\frac{k}{h_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nC_{1n}}{I_0\left(\frac{\pi nR}{h_1}\right)}I_0\left(\frac{\pi nr}{h_1}\right) + \frac{1}{h_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nC_{2n}}{I_0\left(\frac{\pi nR}{h_2}\right)}I_0\left(\frac{\pi nr}{h_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{R}\sum_{m=1}^{\infty} D_{1m}\xi_m q_m J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{1.1.13}$$

где

$$q_m = k\,\mathrm{cth}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right) + \mathrm{cth}\left(\frac{\xi_m h_2}{R}\right). \tag{1.1.14}$$

Разложим в ряд Фурье по функциям Бесселя функцию $I_0\left(\pi nr/h_j\right)$ при $0 \le r < R$ [16]

$$I_0\left(\frac{\pi nr}{h_j}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{jm} J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right),$$

где [46]

$$d_{jm} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\xi_m)}\int\limits_0^R r I_0\left(\frac{\pi nr}{h_j}\right) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2h_j^2\xi_m}{(h_j^2\xi_m^2 + \pi^2 n^2 R^2) J_1(\xi_m)} I_0\left(\frac{\pi nR}{h_j}\right). \tag{1.1.15}$$

Теперь равенство (1.1.13) примет вид

$$2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi_m}{J_1(\xi_m)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{kh_1C_{1n}}{(h_1^2\xi_m^2 + \pi^2n^2R^2)J_1(\xi_m)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{h_2C_{2n}}{(h_2^2\xi_m^2 + \pi^2n^2R^2)J_1(\xi_m)}\right)\right] J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) = \frac{1}{R}\sum_{m=1}^{\infty} D_{1m}\xi_m q_m J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right). \tag{1.1.16}$$

Тогда
$$D_{1m} = D_{2m} = \frac{2\pi R}{q_m J_1(\xi_m)} \left( kH_{1m} + H_{2m} \right), \tag{1.1.17}$$
здесь
$$H_{jm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_j n C_{jn}}{(h_j^2 \xi_m^2 + \pi^2 n^2 R^2)}. \tag{1.1.18}$$
Таким образом, мы получили формальное решение задачи (1.1.1), (1.1.2) в виде рядов (1.1.11) с коэффициентами (1.1.12), (1.1.17), (1.1.18). Докажем, что полученное решение является классическим.

Рассмотри ряд для функции $\Theta_1(r,z)$. Ранее было отмечено, что в области $\Omega_1$ $-h_1 \le z \le 0$, то $z + h_2 \le h_2$ и $h_1 + z \le h_1$. Кроме того $|\sin(\pi nz/h_1)| \le 1$, а также $\mathrm{sh}\left(\xi_m(h_1+z)/R\right) / \mathrm{sh}\left(\xi_m h_1/R\right) \le 1$. Тогда оценка по модулю ряда для функций $\Theta_1(r,z)$, определяемого формулой (1.1.11) имеет вид
$$|\Theta_1| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| I_0\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)\right|}{\left| I_0\left(\frac{\pi n R}{h_1}\right)\right|} |C_{1n}| + \sum_{m=1}^{\infty} \left| J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| |D_{1m}|. \tag{1.1.19}$$
Известно, что [16] при $x >> 1$ для $I_0(x)$ имеет место асимптотическая формула $I_0(x) \approx (2\pi x)^{-1/2} e^x$. Поэтому, так как $0 \le r \le R$, то $I_0\left(\pi n r/h_1\right)/I_0\left(\pi n R/h_1\right) \le 1$. Для функции Бесселя справедливо неравенство [16],
$$|J_p(z)| \le \frac{|z/2|^p e^{|\mathrm{Im} z|}}{\Gamma(p+1)}, \quad p \ge -1/2, \quad \Gamma\text{— гамма-функция.} \tag{1.1.20}$$
Тогда в нашем случае $|J_0\left(\xi_m r/R\right)| \le 1$. Согласно лемме [24], если функции $T_1(z)$ на $[-h_1, 0]$ и $T_2(z)$ на $[0, h_2]$ имеют непрерывные производные до порядка $s-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $s$ ($s \ge 1$), причём $T_1^{(i)}(-h_1) = T_1^{(i)}(0)$, $T_2^{(i)}(0) = T_2^{(i)}(h_2)$, $i = 0, ..s-1$, то тогда для коэффициентов $C_{jn}$ выполняется следующее условие
$$|C_{jn}| \le \frac{\varepsilon_j}{n^s}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.1.21}$$
где $\varepsilon_j > 0$.

Из (1.1.14) имеем $|q_m| \ge \min(1,k)\,\mathrm{cth}(\xi_m z_1/R) \ge \min(1,k)$, где $z_1 = \max(h_1, h_2)$. Таким образом, с учётом выше сказанного, формулы (1.1.18), асимптотической формулы для функции Бесселя, получаем при $m \gg 1$
$$|D_{jm}| \approx \frac{2\pi^{3/2} R \xi_m^{1/2}}{\min(1,k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left| \frac{k h_1 \varepsilon_1}{n^{s-1}(h_1^2 \xi_m^2 + \pi^2 n^2 R^2)} \right| + \left| \frac{h_2 \varepsilon_2}{n^{s-1}(h_2^2 \xi_m^2 + \pi^2 n^2 R^2)} \right| \right). \tag{1.1.22}$$

Используя (1.1.20) - (1.1.22), получим, что ряд (1.1.19) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{\varepsilon_1}{n^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\pi^{3/2}R\xi_m^{1/2}}{\min(1,k)}\left(k\left|\frac{h_1\varepsilon_1}{n^{s-1}(h_1^2\xi_m^2+\pi^2n^2R^2)}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{h_2\varepsilon_2}{n^{s-1}(h_2^2\xi_m^2+\pi^2n^2R^2)}\right|\right)\Big]. \qquad (1.1.23)$$

Так как, при $m \gg 1$ имеем $\xi_m \approx m\pi$ [16], то найдутся такие $m_0$ и $n_0$, что при $m > m_0$, $n > n_0$ и $s > 2$ модуль разности между частичной суммой ряда (1.1.23) и самой суммой этого ряда есть малая величина. Таким образом, по определению [19] сам ряд (1.1.23) сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса [19] исходный ряд для функции $\Theta_1(r,z)$ сходится абсолютно и равномерно, если справедливо условие (1.1.21) при $s > 2$. Рассмотрим теперь ряд для функции $\Theta_{1zz}$

$$\Theta_{1zz}=\frac{\pi^2}{h_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2I_0\left(\frac{\pi nr}{h_1}\right)}{I_0\left(\frac{\pi nR}{h_1}\right)}C_{1n}\sin\frac{\pi nz}{h_1}+\frac{1}{R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\xi_m^2J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)D_{1m}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m(h_1+z)}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)}. \qquad (1.1.24)$$

Известно, что при больших $x$ имеем $\operatorname{sh}x \approx e^x$. Значит при $m \gg 1$ получим, что $|\operatorname{sh}(\xi_m(h_1+z)/R)|/|\operatorname{sh}(\xi_m h_1/R)| \le e^{m\pi z/R}$. Тогда ряд для $|\partial^2\Theta_1/\partial z^2|$ сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{\varepsilon_1}{n^{s-2}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\pi^{3/2}Rm^{3/2}}{\min(1,k)}e^{m\pi z/R}\left(k\left|\frac{h_1\varepsilon_1}{n^{s-1}(h_1^2m^2+\pi^2n^2R^2)}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{h_2\varepsilon_2}{n^{s-1}(h_2^2m^2+\pi^2n^2R^2)}\right|\right)\Big]. \qquad (1.1.25)$$

Так как $-h_1 \le z \le 0$, то ряд (1.1.25) сходится по определению при $s > 3$. Значит, ряд для функции $\Theta_{1zz}$ сходится по признаку Вейерштрасса абсолютно и равномерно если справедливо условие (1.1.21) при $s > 3$.

Далее, с учётом рекуррентных формул для функций $J_p(x)$ и $I_p(x)$, $p = 0, 1$ — порядок функций, ряд для $\Theta_{1rr}$ имеет вид

$$\Theta_{1rr}=\frac{\pi^2}{2h_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2C_{1n}}{I_0\left(\frac{\pi nR}{h_1}\right)}\left[I_0\left(\frac{\pi nr}{h_1}\right)+I_2\left(\frac{\pi nr}{h_1}\right)\right]\sin\frac{\pi nz}{h_1}+$$
$$+\frac{1}{R}\sum_{m=1}^{\infty}D_{1m}\xi_m\left[\frac{1}{r}J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)-\frac{\xi_m}{R}J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right]\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m(h_1+z)}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)}. \qquad (1.1.26)$$

Используя неравенство (1.1.20), получим

$$\left|\frac{1}{r}J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)-\frac{\xi_m}{R}J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right|\le\frac{3}{2}\frac{\xi_m}{R}.$$

Так как асимптотическая формула для модифицированных функций Бесселя не зависит от порядка самих функций, то при $n >> 1$

$$\frac{\left|I_0\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)\right| + \left|I_2\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)\right|}{I_0\left(\frac{\pi n R}{h_1}\right)} \leq 2.$$

Тогда, чтобы ряд для $|\Theta_{1rr}|$ сходится, если сходится ряд (1.1.25). Значит ряд (1.1.26) по признаку Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно, выполнено условие (1.1.21) при $s > 3$.

Теперь рассмотрим ряд для функций $r^{-1}\Theta_{1r}$

$$\frac{1}{r}\,\Theta_{1r} = -\frac{\pi}{h_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nI_1\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)}{rI_0\left(\frac{\pi n R}{h_1}\right)}C_{1n}\sin\frac{\pi n z}{h_1} - \frac{1}{R}\sum_{m=1}^{\infty}D_{1m}\frac{\xi_m}{r}J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m(h_1+z)}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi_m h_1}{R}\right)} \tag{1.1.27}$$

Для доказательства абсолютной и равномерной сходимости данного ряда воспользуемся неравенством (1.1.20), асимптотической формулой для модифицированной функции Бесселя и неравенством: $I_1(x) \leq xI_0(x)/2$, $x \geq 0$. Тогда, учитывая, что $0 \leq r \leq R$, получаем

$$\frac{\left|I_1\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right)\right|}{\left|rI_0\left(\frac{\pi n R}{h_1}\right)\right|} \leq \frac{\pi n}{2h_1}, \quad \left|\frac{1}{r}J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| \leq \frac{\xi_m}{2R}. \tag{1.1.28}$$

Отсюда видно, что ряд (1.1.27) для $|r^{-1}\partial\Theta_1/\partial r|$ сходится, если сходится ряд (1.1.25). Тогда по признаку Вейерштрасса, если выполняется условие (1.1.21) при $s > 3$, ряд (1.1.27) сходится абсолютно и равномерно.

Нами доказана

**Лемма 1.1.3.** Ряды для функций $\Theta_1$, $\Theta_{1rr}$, $r^{-1}\Theta_{1r}$, $\Theta_{1zz}$ сходятся абсолютно и равномерно, если функция $T_1(z) \in C^{s-1}(\Omega_1)$ и имеет кусочно-непрерывную производную порядка $s$, где $s > 3$.

Аналогичные рассуждения проводятся и для ряда функций $\Theta_2(r, z)$. Отсюда следует, что решение (1.1.11) задачи (1.1.1), (1.1.2) для случая, когда $A_j(r) = 0$, $T_j(z) \neq 0$ является классическим.

Таким образом доказана

**Теорема 1.1.1.** Формальное решение (1.1.5) сопряжённой задачи (1.1.1), (1.1.2) для случая, когда $A_j(r) \neq 0$, $T_j(z) = 0$ является классическим, если выполняется условие (1.1.7). Если $A_j(r) = 0$, $T_j(z) \neq 0$, то формальное решение сопряжённой задачи (1.1.1), (1.1.2) имеет вид (1.1.11) и является классическим, если функции $T_j(z) \in C^{s-1}(\Omega_j)$ и имеют кусочно-непрерывную производную порядка $s$, где $s > 3$.

## 1.2 Решение нестационарной задачи

В покоящейся жидкой среде температурное поле может быть нестационарным за счёт молекулярного переноса тепла и нестационарных граничных условий. Рассмотрим осесимметрический случай и пусть, как и в пункте 1.1 жидкости покоятся ($\mathbf{u}_j = 0$) (рисунок 1), $p_j = \text{const}$, а поля температур в своих областях определения $\Omega_1$ и $\Omega_2$ удовлетворяют уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial t} = \chi_j \left( \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2} \right). \tag{1.2.1}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}
\Theta_1(r, -h_1, t) = A_1(r, t), \quad \Theta_2(r, h_2, t) = A_2(r, t), \\
\Theta_1(r, 0, t) = \Theta_2(r, 0, t), \quad k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}(r, 0, t) = k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}(r, 0, t), \\
\Theta_1(R, z, t) = T_1(z, t), \quad -h_1 \le z < 0; \quad \Theta_2(R, z, t) = T_2(z, t), \quad 0 \le z \le h_2
\end{gathered} \tag{1.2.2}$$

с заданными функциями $T_j(z, t)$, $A_j(r, t)$, то есть на боковой поверхности цилиндров, нижнем и верхнем основаниях известно нестационарное распределение температуры.

Кроме того, $|\Theta_j(0, z, t)| < \infty$ и в начальный момент времени

$$\Theta_j(r, z, 0) = \Theta_j^0(r, z). \tag{1.2.3}$$

Для гладких решений должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{gathered}
\Theta_1^0(r, -h_1) = A_1(r, 0), \quad \Theta_2^0(r, h_2) = A_2(r, 0), \\
\Theta_1^0(r, 0) = \Theta_2^0(r, 0), \quad k_1 \frac{\partial \Theta_1^0}{\partial z}(r, 0) = k_2 \frac{\partial \Theta_2^0}{\partial z}(r, 0), \\
T_1(-h_1, t) = A_1(R, t), \quad T_2(h_2, t) = A_2(R, t), \\
T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(0, t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(0, t), \\
T_j(z, 0) = \Theta_j^0(R, z).
\end{gathered} \tag{1.2.4}$$

#### Решение задачи в случае нулевой температуры на боковых стенках

Предположим вначале, что на боковой поверхности цилиндров температура равна нулю: $T_1(z, t) = 0$, $T_2(z, t) = 0$. Ищем решение задачи (1.2.1) - (1.2.4) в виде рядов Фурье

$$\Theta_j(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^j(z, t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{1.2.5}$$

где $\xi_m$ — $m$-й корень уравнения $J_0(\xi) = 0$, причём коэффициенты ряда удовлетворяют параболическим уравнениям

$$\frac{\partial C_m^j}{\partial t} = \chi_j \frac{\partial^2 C_m^j}{\partial z^2} - \chi_j \left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2 C_m^j, \tag{1.2.6}$$

$-h_1 < z < 0$ для $j = 1$ и $0 < z < h_2$ для $j = 2$. Таким образом, произведено частичное разделение переменных.

Разлагая заданные функции $A_j(r,t)$ ($A_j(R,t) = 0$) в ряды Фурье по бесселевым функциям $J_0(\xi_m r/R)$ [18]) с коэффициентами $c_m^j(t)$

$$c_m^j(t) = \frac{\int\limits_0^R r A_j(r,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr}{R^2 J_1^2(\xi_m)}, \tag{1.2.7}$$

получим из первых граничных условий (1.2.2)

$$C_m^1(-h_1,t) = c_m^1(t), \quad C_m^2(h_2,t) = c_m^2(t), \tag{1.2.8}$$

На поверхности раздела при $z = 0$ найдём из соотношений (1.2.2) ещё два равенства для коэффициентов $C_m^j(z,t)$:

$$C_m^1(0,t) = C_m^2(0,t), \quad k_1 \frac{\partial C_m^1}{\partial z}(0,t) = k_2 \frac{\partial C_m^2}{\partial z}(0,t). \tag{1.2.9}$$

Начальные условия (1.2.3) дают аналогичные данные для $C_m^j(z,t)$:

$$C_m^j(z,0) = \frac{\int\limits_0^R r \Theta_j^0(r,z) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr}{R^2 J_1^2(\xi_m)}, \tag{1.2.10}$$

Итак, для уравнений (1.2.6) имеются начальные (1.2.10) и граничные (1.2.8), (1.2.9) условия, причём функции $c_m^j(t)$, определённые из (1.2.7), считаются известными.

**Замечание 1.2.1.** Дальнейшее разделение переменных в начально-краевых задачах для $C_m^j(z,t)$ невозможно, так как из равенства экспоненциальных рядов (рядов Дирихле [27, 39]) не следует равенство коэффициентов этих рядов.

Применим преобразование Лапласа, которое функции $u(t)$ (оригиналу) сопоставляет $\hat{u}(t)$ (изображение) по формуле

$$\hat{u}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} u(t) dt.$$

Свойства преобразования Лапласа и область его применимости изложены, например, в [25]. В изображениях по Лапласу получим из (1.2.6), (1.2.7) - (1.2.10) краевую задачу для ОДУ

$$\frac{d^2\widehat{C}_m^j}{dz^2} - \left[\left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2 + \frac{s}{\chi_j}\right]\widehat{C}_m^j = -\frac{C_m^j(z,0)}{\chi_j}, \tag{1.2.11}$$

$$\begin{gathered}\widehat{C}_m^1(-h_1,s) = \hat{c}_m^1(s), \quad \widehat{C}_m^2(h_2,s) = \widehat{c}_m^2(s), \\ k_1\frac{d\widehat{C}_m^1(0,s)}{dz} = k_2\frac{d\widehat{C}_m^2(0,s)}{dz}, \quad \widehat{C}_m^1(0,s) = \widehat{C}_m^2(0,s).\end{gathered} \tag{1.2.12}$$

Введём обозначение

$$\lambda_m^j = \sqrt{\left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2 + \frac{s}{\chi_j}}, \tag{1.2.13}$$

тогда общее решение уравнений (1.2.11) имеет вид

$$\begin{gathered}\widehat{C}_m^j(z,s) = a_j\sinh(\lambda_m^j z) + b_j\cosh(\lambda_m^j z) - \\ -\frac{1}{\chi_j\lambda_m^j}\int\limits_{l_j}^{z} C_m^j(x,0)\sinh(\lambda_m^j(z-x))dx,\end{gathered} \tag{1.2.14}$$

где $l_1 = -h_1$, $l_2 = 0$; $a_j$, $b_j$ — величины, зависящие от $s$. Подстановка (1.2.14) в граничные условия (1.2.12) приводит к четырём алгебраическим уравнениям на $a_j$, $b_j$ $(j = 1, 2)$:

$$\begin{gathered}-a_1\sinh(\lambda_m^1 h_1) + b_1\cosh(\lambda_m^1 h_1) = \hat{c}_m^1(s), \\ a_2\sinh(\lambda_m^2 h_2) + b_2\cosh(\lambda_m^2 h_2) = \\ = \hat{c}_m^2(s) + \frac{1}{\lambda_m^2}\int\limits_0^{h_2} C_m^2(x,0)\sinh(\lambda_m^2(h_2-x))dx, \\ b_1 = b_2 - \frac{1}{\lambda_m^1}\int\limits_{-h_1}^{0} C_m^1(x,0)\sinh(\lambda_m^1 x)dx, \\ k\lambda_m^1 a_1 = \lambda_m^2 a_2 + k\int\limits_{-h_1}^{0} C_m^1(x,0)\cosh(\lambda_m^1 x)dx, \quad k = k_1/k_2.\end{gathered}$$

Решение полученной системы таково

$$a_1 = \frac{1}{\triangle}\left(\hat{c}^1_m(s)\cosh(\lambda^2_m h_2) + f(s)\cosh(\lambda^1_m h_1)\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{\triangle}\left(f(s)\sinh(\lambda^1_m h_1) + k\lambda_m \sinh(\lambda^2_m h_2)\hat{c}^1_m(s)\right), \quad \lambda_m = \lambda^1_m/\lambda^2_m,$$

$$a_2 = k\lambda_m a_1 - \frac{k}{\lambda^1_m}\int\limits_{h_1}^{0} C^1_m(x,0)\cosh(\lambda^1_m x)dx, \tag{1.2.15}$$

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{\lambda^1_m}\int\limits_{h_1}^{0} C^1_m(x,0)\sinh(\lambda^1_m x)dx,$$

$$\triangle = \sinh(\lambda^1_m h_1)\cosh(\lambda^2_m h_2) + k\lambda_m\cosh(\lambda^1_m h_1)\sinh(\lambda^2_m h_2),$$

$$f(s) = \hat{c}^2_{nm}(s) + \frac{1}{\lambda^2_m}\int\limits_{0}^{h_2} C^2_m(x,0)\sinh(\lambda^2_m(h_2 - x))dx +$$

$$+\frac{1}{\lambda^1_m}\int\limits_{h_1}^{0} C^1_m(x,0)\left(k\sinh(\lambda^2_m h_2)\cosh(\lambda^1_m x) - \cosh(\lambda^2_m h_2)\sinh(\lambda^1_m x)\right)dx.$$

Оригиналы $C^j_m$ восстанавливаются с помощью формулы обратного преобразования Лапласа

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-st}\hat{u}(s)ds,$$

где интеграл берётся вдоль любой прямой $\mathrm{Re} s = a > a_0 \geq 0$ [25].

Следовательно, справедлива

**Лемма 1.2.1.** Решение задачи (1.2.1) - (1.2.3) представимо в виде формальных рядов Фурье (1.2.5) с коэффициентами $C^j_m(z,t)$, определяемые путём обращения преобразования Лапласа формул (1.2.14), (1.2.15).

**Замечание 2.** Если функции $A_j(r,t)$ определены на конечном промежутке $[0,T]$ по времени, то таковыми являются и $c^j_m(t)$ (см. формулы (1.2.7)). Для применения преобразования Лапласа достаточно $A_j$ продолжить нулём при $t > T$, считая, что они в точке $t = T$ имеют разрыв первого рода.

**О сходимости рядов** (1.2.5)

Рассмотрим задачу для $C_m^j(z,t)$. Обозначим для краткости

$$\begin{gathered} v_j(z,t) = C_m^j(z,t), \quad \beta_j = \chi_j \left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2, \\ c_m^1(t) = a_1(t), \quad c_m^2(t) = a_2(t), \\ v_{10}(z) = C_m^1(z,0), \quad v_{20}(z) = C_m^2(z,0). \end{gathered} \tag{1.2.16}$$

Тогда упомянутая выше задача для $C_m^j(z,t)$ в новых терминах перепишется так

$$v_{1t} = \chi_1 v_{1zz} - \beta_1 v_1, \quad -h_1 < z < 0, \tag{1.2.17}$$

$$v_{2t} = \chi_2 v_{2zz} - \beta_2 v_2, \quad 0 < z < h_2; \tag{1.2.18}$$

$$v_1(-h_1,t) = a_1(t), \quad v_2(h_2,t) = a_2(t); \tag{1.2.19}$$

$$v_1(0,t) = v_2(0,t), \quad k_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}(0,t) = k_2 \frac{\partial v_2}{\partial z}(0,t); \tag{1.2.20}$$

$$v_1(z,0) = v_{10}(z), \quad v_2(z,0) = v_{20}(z), \tag{1.2.21}$$

причём выполнены условия согласования

$$\begin{gathered} v_{10}(0) = v_{20}(0), \quad k_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial z}(0) = k_2 \frac{\partial v_{20}}{\partial z}(0), \\ v_{10}(-h_1) = a_1(0), \quad v_{20}(h_2) = a_2(0). \end{gathered} \tag{1.2.22}$$

Замена искомых функций

$$v_j(z,t) = \bar{v}_j(z,t) + \frac{z^2}{h_j^2}\, a_j(t) \tag{1.2.23}$$

приводит к начально-краевой задаче с однородными краевыми условиями

$$\bar{v}_{1t} = \chi_1 \bar{v}_{1zz} - \beta_1 \bar{v}_1 + g_1(z,t), \quad -h_1 < z < 0, \tag{1.2.24}$$

$$\bar{v}_{2t} = \chi_2 \bar{v}_{2zz} - \beta_2 \bar{v}_2 + g_2(z,t), \quad 0 < z < h_2; \tag{1.2.25}$$

$$\bar{v}_1(-h_1,t) = 0, \quad \bar{v}_2(h_2,t) = 0; \tag{1.2.26}$$

$$\bar{v}_1(0,t) = \bar{v}_2(0,t), \quad k_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z}(0,t) = k_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial z}(0,t); \tag{1.2.27}$$

$$\bar{v}_j(z,0) = \bar{v}_{j0}(z) = v_{j0} - \frac{z^2}{h_j^2}\, a_j(0). \tag{1.2.28}$$

Свободные члены в уравнениях (1.2.24), (1.2.25) имеют вид

$$g_j(z,t) = \frac{1}{h_j^2}(2\chi_j - \beta_j z^2)a_j(t) - \frac{z^2}{h_j^2}\, a_j'(t), \tag{1.2.29}$$

где штрих означает дифференцирование по $t$.

Умножим уравнение (1.2.24) на $\rho_1 c_{p_1} \bar{v}_1$, уравнение (1.2.25) на $\rho_2 c_{p_2} \bar{v}_2$, затем проинтегрируем по их областям определения и результаты сложим. Получим тождество

$$\frac{dV}{dt} + \beta_1 \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_1^2 dz + \beta_2 \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_2^2 dz + k_1 \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{1z}^2 dz + k_2 \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{2z}^2 dz =$$

$$= \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} g_1 \bar{v}_1 dz + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} g_2 \bar{v}_2 dz, \tag{1.2.30}$$

где

$$V(t) = \frac{1}{2}\, \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_1^2 dz + \frac{1}{2}\, \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_2^2 dz, \tag{1.2.31}$$

а функции $g_j(z,t)$ определены равенством (1.2.29).

Поскольку функции $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ удовлетворяют однородным условиям (1.2.26), (1.2.27), то для них имеет место неравенство [3]

$$\int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_1^2 dz + \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_2^2 dz \le M_0 \left( k_1 \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{1z}^2 dz + k_2 \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{2z}^2 dz \right) \tag{1.2.32}$$

с положительной постоянной $M_0$, зависящей от $k_1$, $k_2$ и $h_1$, $h_2$. Более точно, $M_0 = h_2^2/k_1 z_0^2$, где $z_0$ — первый положительный корень трансцендентного уравнения

$$\sin(\alpha_1 z)\cos(\alpha_2 z) + \alpha_2 \sin(\alpha_2 z)\cos(\alpha_1 z) = 0, \quad \alpha_1 = h_1/h_2, \quad \alpha_2 = (k_1/k_2)^{1/2}.$$

С учётом (1.2.32) левая часть тождества (1.2.30) оценивается снизу так

$$\frac{dV}{dt} + 2\delta V, \quad \delta = \min_j(\beta_j) + \frac{1}{M_0} \min_j \left( \frac{\chi_j}{k_j} \right). \tag{1.2.33}$$

Для правой части, находим оценку сверху

$$\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0} g_1\bar{v}_1 dz+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2} g_2\bar{v}_2 dz\le \rho_1 c_{p_1}\left(\int\limits_{-h_1}^{0} g_1^2 dz\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{v}_1^2 dz\right)^{1/2}+$$

$$+\rho_2 c_{p_2}\left(\int\limits_{0}^{h_2} g_2^2 dz\right)^{1/2}\left(\int\limits_{0}^{h_2}\bar{v}_2^2 dz\right)^{1/2}\le 2\left[\sqrt{\frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}}\left(\int\limits_{-h_1}^{0} g_1^2 dz\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}}\left(\int\limits_{0}^{h_2} g_2^2 dz\right)^{1/2}\right]V^{1/2}\equiv 2G(t)V^{1/2} \tag{1.2.34}$$

и $V(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV}{dt}+2\delta V\le 2G(t)V^{1/2}. \tag{1.2.35}$$

Значит

$$V(t)\le\left[\sqrt{V(0)}+\int\limits_{0}^{t} G(\tau)e^{\delta\tau}d\tau\right]^2 e^{-2\delta t}, \tag{1.2.36}$$

$$V(0)=\frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{v}_{10}^2 dz+\frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2}\bar{v}_{20}^2 dz,$$

где $\bar{v}_{j0}$ определены в (1.2.28). Из (1.2.31) и (1.2.36) следует ограниченность $\mathrm{L}_2$-норм функций $\bar{v}_j(z,t)$ для всех $t\in[0,T]$ (величина $T$ зависит от области определения $a_j(t)$, $a'_j(t)$).

Для оценки производных $\bar{v}_{jz}$ в этих же нормах воспользуемся ещё одним тождеством справедливым для начально-краевой задачи (1.2.24) - (1.2.29), именно

$$\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{v}_{1t}^2 dz+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2}\bar{v}_{2t}^2 dz+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta_1\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{v}_1^2 dz+\right.$$

$$\left.+\beta_2\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2}\bar{v}_2^2 dz+k_1\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{v}_{1z}^2 dz+k_2\int\limits_{0}^{h_2}\bar{v}_{2z}^2 dz\right]=$$

$$=\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0} g_1\bar{v}_{1t}dz+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2} g_2\bar{v}_{2t}dz. \tag{1.2.37}$$

Оно получается путём умножения уравнений (1.2.24), (1.2.25) на $\rho_1 c_{p_1}\bar{v}_{1t}$, $\rho_2 c_{p_2}\bar{v}_{2t}$, соответственно, интегрирования по $z$ и сложения с учётом равенства $\bar{v}_{1t}(0,t) = \bar{v}_{2t}(0,t)$, которое следует из первого граничного условия (1.2.20).

Правая часть (1.2.37) не превосходит

$$\frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0} g_1^2 dz + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2} g_2^2 dz + \frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{1t}^2 dz + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{2t}^2 dz$$

Поэтому из (1.2.37) выводим необходимое для нас неравенство

$$k_1\int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{1z}^2 dz + k_2\int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{2z}^2 dz \le k_1\int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2\int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz +$$

$$+\,\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h_1}^{0} g_1^2 dz d\tau + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{h_2} g_2^2 dz d\tau \equiv G_1(t), \qquad (1.2.38)$$

откуда

$$\int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{1z}^2 dz \le \frac{G_1(t)}{k_1}, \qquad \int\limits_{0}^{h_2} \bar{v}_{2z}^2 dz \le \frac{G_1(t)}{k_2}. \qquad (1.2.39)$$

Поскольку

$$\bar{v}_1^2(z,t) = 2\int\limits_{-h_1}^{z} \bar{v}_1\bar{v}_{1z} dz, \quad \bar{v}_2^2(z,t) = -2\int\limits_{z}^{h_2} \bar{v}_2\bar{v}_{2z} dz,$$

то в силу оценок (1.2.36), (1.2.39), находим

$$|\bar{v}_j(z,t)| \le \left(\frac{8}{k_j\rho_j c_{p_j}} V(t) G_1(t)\right)^{1/4}. \qquad (1.2.40)$$

Учитывая замену (1.2.23), получим оценки $v_j$:

$$|v_j(z,t)| \le |a_j(t)| + \left(\frac{8}{k_j\rho_j c_{p_j}} V(t) G_1(t)\right)^{1/4}, \qquad (1.2.41)$$

которые означают ограниченность $v_j(z,t)$ при $z \in [-h_1, 0]$ $(j = 1)$, $z \in [0, h_2]$ $(j = 2)$ и $t \in [0, T]$.

Для нахождения оценок производных по времени, достаточно продифференцировать уравнения (1.2.24), (1.2.25) и граничные условия (1.2.26), (1.2.27) по $t$. Для функций $w_j(z,t) = \bar{v}_{jt}(z,t)$ получим задачу аналогичную рассмотренной с заменой в (1.2.29) $a_j(t)$ на $a_j'(t)$, $a_j'(t)$ на $a_j''(t)$, предполагая существование последней при $t \in [0,T]$. Начальные данные таковы

$$w_j(z,0) = w_{j0}(z) = \chi_j \bar{v}_{j0zz} - \beta_j \bar{v}_{j0} + \frac{1}{h_j^2}(2\chi_j - \beta_j z^2) a_j(0) - \frac{z^2}{h_j^2} a_j'(0) \qquad (1.2.42)$$

где $\bar{v}_{j0}(z)$ есть начальные данные из (1.2.28).

Поэтому для $v_{jt}$ имеют место оценки вида (1.2.41)

$$|v_{jt}(z,t)| \leq |a_j'(t)| + \left( \frac{8}{k_j \rho_j c_{p_j}} W(t) G_2(t) \right)^{1/4}, \qquad (1.2.43)$$

в которых

$$\begin{gathered} W(t) = \frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} w_1^2 dz + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} w_2^2 dz, \\ W(0) = \frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} w_{10}^2 dz + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} w_{20}^2 dz, \\ G_2(t) = \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{-h_1}^{0} g_3^2 dz d\tau + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{h_2} g_4^2 dz d\tau + \\ + k_1 \int\limits_{-h_1}^{0} w_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_{0}^{h_2} w_{20z}^2 dz. \end{gathered} \qquad (1.2.44)$$

В (1.2.44) $w_{j0}$ определены формулами (1.2.42), а

$$\begin{aligned} g_3(z,t) &= \frac{1}{h_1^2}(2\chi_1 - \beta_1 z^2) a_1'(t) - \frac{z^2}{h_1^2} a_1''(t), \\ g_4(z,t) &= \frac{1}{h_2^2}(2\chi_2 - \beta_2 z^2) a_2'(t) - \frac{z^2}{h_2^2} a_2''(t). \end{aligned} \qquad (1.2.45)$$

Функция $W(t)$ удовлетворяют неравенству вида (1.2.36)

$$W(t) \leq \left[ \sqrt{W(0)} + \int\limits_0^t G_0(\tau) e^{\delta\tau} d\tau \right]^2 e^{-2\delta t}, \qquad (1.2.46)$$

где (см. (1.2.34))

$$G_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\,\rho_1 c_{p_1}} \left( \int\limits_{-h_1}^{0} g_3^2 dz \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{1}{2}\,\rho_2 c_{p_2}} \left( \int\limits_{0}^{h_2} g_4^2 dz \right)^{1/2}. \qquad (1.2.47)$$

Значит, если $a_j(t)$, $a_j'(t)$, $a_j''(t)$ — непрерывны и ограничены при $t \in [0,T]$, то непрерывны и равномерно ограничены функции $v_{jt}(z,t)$ на своих областях определения. Аналогичным свойством обладают и обладают и вторые производные $v_{jzz}$ – это следуют из уравнений (1.2.17), (1.2.18) и оценок (1.2.41), (1.2.42):

$$|v_{jzz}(z,t)| \leq \frac{1}{\chi_j}\left\{\beta_j|a_j(t)| + |a_j'(t)| + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{8}{k_j\rho_j c_{p_j}}\right)^{1/4}\left[(V(t)G_1(t))^{1/4} + (W(t)G_2(t))^{1/4}\right]\right\}. \qquad (1.2.48)$$

Нами доказана

**Лемма 1.2.2.** Если $a_j^{(k)}(t)$, $k = 0,1,2$ непрерывны при $t \in [0,T]$, $v_{10}(z) \in \mathrm{C}^1[-h_1,0]$, $v_{20}(z) \in \mathrm{C}^1[0,h_2]$ и выполнены условия согласования (1.2.22), то решение сопряжённой задачи (1.2.17) - (1.2.21) единственно и справедливы равномерные по $z$ оценки (1.2.41), (1.2.43), (1.2.48).

Единственность следует из априорных оценок, так как при $a_j(t) \equiv 0$, $v_{j0}(z) \equiv 0$ получим $v_j(z,t) \equiv 0$ на своих областях определения.

Наша ближайшая цель установить сходимость рядов (1.2.5) и привести условия, при которых они дают классическое решение исходной задачи (1.2.1) - (1.2.4). Для этого предположим, что сходятся ряды функций $A_j(r,t)$ и их производных $A_{jt}$, $A_{jtt}$, $A_{jr}$, $A_{jrr}$. Для $A_j(r,t)$, $A_{jt}$, $A_{jtt}$ имеем (равенства Парсеваля-Стеклова [18]).

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m^j(t)\right)^2 = \|A_j\|^2, \quad \|A_j\|^2 = \int\limits_0^R rA_j^2dr,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{dc_m^j(t)}{dt}\right)^2 = \|A_{jt}\|^2, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{d^2c_m^j(t)}{dt^2}\right)^2 = \|A_{jtt}\|^2. \qquad (1.2.49)$$

Ясно, что нормы в правых частях равенств (1.2.49) есть непрерывные функции, а из выражений (1.2.7) следует, что $c_m^j(t)$ — непрерывны на $[0,T]$. Следовательно, по теореме Дини [50] ряды для функций $A_j(r,t)$ равномерно сходятся на $[0,T]$.

Докажем сначала равномерную сходимость ряда (1.2.5) при $t \in [0,T]$. Коэффициенты ряда $C_m^j(z,t)$ удовлетворяют оценке (1.2.41) с $a_j(t) = c_m^j(t)$:

$$|C_m^j(z,t)| \leq |c_m^j(t)| + \left(\frac{8V(t)G_1(t)}{k_j\rho_j c_{p_j}}\right)^{1/4}. \qquad (1.2.50)$$

Из определения (1.2.38) функции $G_1(t)$ и (1.2.29) имеем

$$G_1(t) \leq \frac{2\rho_1 c_{p_1}}{h_1^3}\left[\left(4\chi_1^2 - \frac{4}{3}\,\chi_1\beta_1 h_1^2 + \frac{\beta_1^2 h_1^4}{5}\right)\int\limits_0^t (c_m^1(\tau))^2 d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{h_1^4}{5}\int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right] +$$
$$+ \frac{2\rho_2 c_{p_2}}{h_2^3}\left[\left(4\chi_2^2 - \frac{4}{3}\,\chi_2\beta_2 h_2^2 + \frac{\beta_2^2 h_2^4}{5}\right)\int\limits_0^t (c_m^2(\tau))^2 d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2^4}{5}\int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right] + k_1\int\limits_{-h_1}^0 \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2\int\limits_0^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz. \qquad (1.2.51)$$

Функция $V(t)$ удовлетворяет оценке (1.2.36), в которой

$$G(t) = \left(\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{-h_1}^0 g_1^2 dz\right)^{1/2} + \left(\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_0^{h_2} g_2^2 dz\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \left\{\frac{\rho_1 c_{p_1}}{h_1^3}\left[\left(4\chi_1^2 - \frac{4}{3}\,\chi_1\beta_1 h_1^2 + \frac{\beta_1^2 h_1^4}{5}\right)(c_m^1(t))^2 + \frac{h_1^4}{5}\left(\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} +$$
$$+ \left\{\frac{\rho_2 c_{p_2}}{h_2^3}\left[\left(4\chi_2^2 - \frac{4}{3}\,\chi_2\beta_2 h_2^2 + \frac{\beta_2^2 h_2^4}{5}\right)(c_m^2(t))^2 + \frac{h_2^4}{5}\left(\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2}, \qquad (1.2.52)$$

$$V(0) = \frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{-h_1}^0 \left[v_{10}(z) - \frac{z^2}{h_1^2}c_m^1(0)\right]^2 dz + \frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_0^{h_2}\left[v_{20}(z) - \frac{z^2}{h_2^2}c_m^2(0)\right]^2 dz \leq$$
$$\leq \rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^0 v_{10}^2(z)dz + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^{h_2} v_{20}^2(z)dz + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5}(c_m^1(0))^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5}(c_m^2(0))^2. \qquad (1.2.53)$$

Полученные априорные оценки (1.2.41), (1.2.43) позволяют оценить зависимость $C_m^j(z,t)$ от $c_m^j(t)$. При больших $m$ имеем $\xi_m \approx m\pi$ [18], тогда, согласно (1.2.16),

$$\beta_j \approx \frac{\chi_j m^2 \pi^2}{R^2}, \qquad (1.2.54)$$

поэтому из (1.2.51), (1.2.52) получим

$$G_1(t) \approx \beta_1^2 \int\limits_0^t (c_m^1(\tau))^2 d\tau + \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau + \beta_2^2 \int\limits_0^t (c_m^2(\tau))^2 d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau + k_1 \int\limits_{-h_1}^0 \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz \equiv I_1, \qquad (1.2.55)$$

$$G(t) \approx \left[\beta_1^2 (c_m^1(t))^2 + \left(\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right)^2\right]^{1/2} + \left[\beta_2^2 (c_m^2(t))^2 + \left(\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right)^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \beta_1 |c_m^1(t)| + \left|\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right| + \beta_2 |c_m^2(t)| + \left|\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right|. \qquad (1.2.56)$$

Используя неравенства (1.2.36), (1.2.53), (1.2.56), $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ и неравенство Гёльдера, получим

$$V(t) \le 2e^{-2\delta t} \left(\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^0 v_{10}^2(z) dz + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^{h_2} v_{20}^2(z) dz\right.$$

$$\left. + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5} (c_m^1(0))^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5} (c_m^2(0))^2 \right) + 4tI_1. \qquad (1.2.57)$$

Снова воспользовавшись неравенствами Гёльдера, $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, а также (1.2.55) и неравенством (1.2.50), в итоге из (1.2.50) при $m >> 1$ имеем

$$|C_m^j(z,t)| \le |c_m^j(t)| + \left\{ \frac{16 e^{-2\delta t}}{k_j \rho_j c_{p_j}} \left[\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^0 v_{10}^2(z) dz + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^{h_2} v_{20}^2(z) dz + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5} (c_m^1(0))^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5} (c_m^2(0))^2 \right] I_1 + \frac{128 t^2}{k_j \rho_j c_{p_j}} I_2 \right\}^{1/4}, \qquad (1.2.58)$$

здесь

$$I_2 = \beta_1^4 \int\limits_0^t (c_m^1(\tau))^4 d\tau + \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^4 d\tau + \beta_2^4 \int\limits_0^t (c_m^2(\tau))^4 d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^4 d\tau + \left[k_1 \int\limits_{-h_1}^0 \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz\right]^2. \qquad (1.2.59)$$

Если

$$|c_m^j(t)| \le \frac{|c^j(t)|}{m^{1+s+\varepsilon}}, \qquad (1.2.60)$$

где $\varepsilon > 0$, $|c^j(t)| \le M_1 \equiv \text{const}$ и $|dc^j(t)/dt| \le M_2 \equiv \text{const}$ при $t \in [0,T]$, то, принимая во внимание (1.2.54), получаем оценку

$$|C_m^j(z,t)| \le \frac{|c^j(t)|}{m^{1+s+\varepsilon}} + \left\{ \frac{16e^{-2\delta t}}{k_j\rho_j c_{p_j} m^{2(1+s+\varepsilon)}} \left[ \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^{0} v_{10}^2(z)dz + \right.\right.$$

$$\left. + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{0}^{h_2} v_{20}^2(z)dz + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5} \frac{(c_m^1(0))^2}{m^{2(1+s+\varepsilon)}} + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5} \frac{(c_m^2(0))^2}{m^{2(1+s+\varepsilon)}} \right]$$

$$\left[ \frac{\chi_1^2 m^4 \pi^4}{R^4} \int\limits_0^t (c^1(\tau))^2 d\tau + \int\limits_0^t \left( \frac{dc^1(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau + \frac{\chi_2^2 m^4 \pi^4}{R^4} \int\limits_0^t (c^2(\tau))^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \left( \frac{dc^2(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau + k_1 \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz \right] +$$

$$+ \frac{128t^2}{k_j \rho_j c_{p_j} m^{4(1+s+\varepsilon)}} \left[ \frac{\chi_1^4 m^8 \pi^8}{R^8} \int\limits_0^t (c^1(\tau))^4 d\tau + \int\limits_0^t \left( \frac{dc^1(\tau)}{d\tau} \right)^4 d\tau + \right.$$

$$+ \frac{\chi_2^4 m^8 \pi^8}{R^8} \int\limits_0^t (c^2(\tau))^4 d\tau + \int\limits_0^t \left( \frac{dc^2(\tau)}{d\tau} \right)^4 d\tau +$$

$$\left.\left. + \left( k_1 \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{v}_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} \bar{v}_{20z}^2 dz \right)^2 \right] \right\}^{1/4} \tag{1.2.61}$$

С учётом обозначений (1.2.16), потребуем, чтобы функции $\Theta_{jz}^0(r,z)$ и $\Theta_j^0(r,z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m^j(z,0) J_0(\xi_m r/R)$ были ограничены в пространстве $L_2([0,R] \times l_j)$ $(l_1 = [-h_1, 0],\ l_2 = [0, h_2])$, то есть

$$\|\Theta_j^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{l_j} \int\limits_0^R r (C_m^j(z,0))^2 J_0^2 \left( \frac{\xi_m r}{R} \right) dr dz \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^2}{2} J_1^2(\xi_m) \int\limits_{l_j} (C_m^j(z,0))^2 dz \right)^{1/2} < \infty$$

и

$$\left\|\frac{\partial\Theta_j^0}{\partial z}\right\|_{L_2([0,R]\times l_j)} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R^2}{2}J_1^2(\xi_m)\int\limits_{l_j}\left(\frac{C_m^j(z,0)}{\partial z}\right)^2 dz\right)^{1/2} < \infty.$$

Откуда (см. обозначения (1.2.16)),

$$\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0} v_{10}^2(z)dz + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_{0}^{h_2} v_{20}^2(z)dz < \infty$$

и

$$k_1\int\limits_{-h_1}^{0} v_{10z}^2(z)dz + k_2\int\limits_{0}^{h_2} v_{20z}^2(z)dz < \infty.$$

Тогда при $m >> 1$

$$|C_m^j(z,t)| \approx \frac{|c^j(t)|}{m^{1+s+\varepsilon}} + \left\{\frac{S_1 e^{-2\delta t}}{m^{2(s+\varepsilon)-2}} + \frac{S_2 e^{-2\delta t}}{m^{4(s+\varepsilon)}} + \frac{S_3 e^{-2\delta t}}{m^{2(1+s+\varepsilon)}} + \frac{S_4 e^{-2\delta t}}{m^{4(1+s+\varepsilon)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{S_5}{m^{4(s+\varepsilon)-4}} + \frac{S_6}{m^{4(1+s+\varepsilon)}}\right\}^{1/4}, \tag{1.2.62}$$

здесь $S_i = \mathrm{const}$, $i = 1, ..6$. Используя (1.2.33), делаем вывод, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|c^j(t)|}{m^{1+s+\varepsilon}} + \left\{\frac{S_1 e^{-2\delta t}}{m^{2(s+\varepsilon)-2}} + \frac{S_2 e^{-2\delta t}}{m^{4(s+\varepsilon)}} + \frac{S_3 e^{-2\delta t}}{m^{2(1+s+\varepsilon)}} + \frac{S_4 e^{-2\delta t}}{m^{4(1+s+\varepsilon)}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{S_5}{m^{4(s+\varepsilon)-4}} + \frac{S_6}{m^{4(1+s+\varepsilon)}}\right\}^{1/4}\right)$$

сходится при $s \geq 2$, значит, ряд для функций $C_m^j(z,t)$, в силу неравенств (1.2.36) - (1.2.61), сходится по признаку Вейерштрасса [19] абсолютно и равномерно.

Далее, с учётом неравенства (1.2.43) и введённых обозначений (1.2.16), получим

$$\left|\frac{\partial C_m^j(z,t)}{\partial t}\right| \leq \left|\frac{dc_m^j(t)}{dt}\right| + \left(\frac{8}{k_j\rho_j c_{p_j}}W(t)G_2(t)\right)^{1/4}, \tag{1.2.63}$$

Из определения (1.2.44) функции $G_2(t)$ и (1.2.45) имеем

$$G_2(t) \le \frac{2\rho_1 c_{p_1}}{h_1^3}\left[\left(4\chi_1^2 - \frac{4}{3}\,\chi_1\beta_1 h_1^2 + \frac{\beta_1^2 h_1^4}{5}\right)\int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{h_1^4}{5}\int\limits_0^t \left(\frac{d^2 c_m^1(\tau)}{d\tau^2}\right)^2 d\tau\right] +$$

$$+ \frac{2\rho_2 c_{p_2}}{h_2^3}\left[\left(4\chi_2^2 - \frac{4}{3}\,\chi_2\beta_2 h_2^2 + \frac{\beta_2^2 h_2^4}{5}\right)\int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau + \right.$$

$$\left. \frac{h_2^4}{5}\int\limits_0^t \left(\frac{d^2 c_m^2(\tau)}{d\tau^2}\right)^2 d\tau\right] + k_1 \int\limits_{-h_1}^0 w_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} w_{20z}^2 dz. \qquad (1.2.64)$$

Функция $W(t)$ удовлетворяет оценке (1.2.46), в которой

$$G_0(t) = \left(\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{-h_1}^0 g_3^2 dz\right)^{1/2} + \left(\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_0^{h_2} g_4^2 dz\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\frac{\rho_1 c_{p_1}}{h_1^3}\left[\left(4\chi_1^2 - \frac{4}{3}\,\chi_1\beta_1 h_1^2 + \frac{\beta_1^2 h_1^4}{5}\right)\left(\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right)^2 + \frac{h_1^4}{5}\left(\frac{d^2 c_m^1(t)}{dt^2}\right)^2\right]\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\frac{\rho_2 c_{p_2}}{h_2^3}\left[\left(4\chi_2^2 - \frac{4}{3}\,\chi_2\beta_2 h_2^2 + \frac{\beta_2^2 h_2^4}{5}\right)\left(\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right)^2 + \frac{h_2^4}{5}\left(\frac{d^2 c_m^2(t)}{dt^2}\right)^2\right]\right\}^{1/2}, \qquad (1.2.65)$$

$$W(0) = \frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{-h_1}^0 \left[\chi_1 v_{10zz}(z) - \beta_1 v_{10} - \frac{z^2}{h_1^2}\frac{dc_m^1(0)}{dt}\right]^2 dz +$$

$$+ \frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_0^{h_2} \left[\chi_2 v_{20zz}(z) - \beta_2 v_{20} - \frac{z^2}{h_2^2}\frac{dc_m^2(0)}{dt}\right]^2 dz \le$$

$$\le \rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^0 [\chi_1^2 v_{10zz}^2(z) + \beta_1^2 v_{10}^2(z)]dz + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^{h_2} [\chi_1^2 v_{20zz}^2(z) + \beta_1^2 v_{20}^2(z)]dz +$$

$$+ \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5}\left(\frac{dc_m^1(0)}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5}\left(\frac{dc_m^2(0)}{dt}\right)^2. \qquad (1.2.66)$$

Учитывая (1.2.54), из (1.2.64), (1.2.65) получим

$$G_2(t) \approx \beta_1^2 \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau + \int\limits_0^t \left(\frac{d^2c_m^1(\tau)}{d\tau^2}\right)^2 d\tau + \beta_2^2 \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\frac{d^2c_m^2(\tau)}{d\tau^2}\right)^2 d\tau + k_1 \int\limits_{-h_1}^0 w_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} w_{20z}^2 dz \equiv I_3, \qquad (1.2.67)$$

$$G_0(t) \approx \left[\beta_1^2 \left(\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2c_m^1(t)}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2} +$$

$$+ \left[\beta_2^2 \left(\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2c_m^2(t)}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \beta_1 \left|\frac{dc_m^1(t)}{dt}\right| + \left|\frac{d^2c_m^1(t)}{dt^2}\right| + \beta_2 \left|\frac{dc_m^2(t)}{dt}\right| + \left|\frac{d^2c_m^2(t)}{dt^2}\right|. \qquad (1.2.68)$$

Используя неравенства (1.2.46), (1.2.66), (1.2.68), Гёльдера и $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, имеем

$$W(t) \leq 2e^{-2\delta t} \left(\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^0 \left[\beta_1^2 v_{10}^2(z) + \chi_1^2 \left(\frac{d^2 v_{10}(z)}{dz^2}\right)^2\right] dz + \right.$$

$$+\rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^{h_2} \left[\beta_2^2 v_{20}^2(z) + \chi_2^2 \left(\frac{d^2 v_{20}(z)}{dz^2}\right)^2\right] dz +$$

$$\left. + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5} \left(\frac{dc_m^1(0)}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5} \left(\frac{dc_m^2(0)}{dt}\right)^2\right) + 4tI_3. \qquad (1.2.69)$$

Снова воспользовавшись неравенствами Гёльдера и $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, а также (1.2.67) и неравенством (1.2.63), в итоге получаем

$$\left|\frac{\partial C_m^j(z,t)}{\partial t}\right| \leq \left|\frac{dc_m^j(t)}{dt}\right| + \left\{\frac{16e^{-2\delta t}}{k_j \rho_j c_{p_j}} \left[\rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^0 \left[\beta_1^2 v_{10}^2(z) + \chi_1^2 \left(\frac{d^2 v_{10}(z)}{dz^2}\right)^2\right] dz + \right.\right.$$

$$+\rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^{h_2} \left[\beta_2^2 v_{20}^2(z) + \chi_2^2 \left(\frac{d^2 v_{20}(z)}{dz^2}\right)^2\right] dz +$$

$$\left.\left. + \frac{\rho_1 c_{p_1} h_1}{5} \left(\frac{dc_m^1(0)}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_2 c_{p_2} h_2}{5} \left(\frac{dc_m^2(0)}{dt}\right)^2\right] I_3 + \frac{128t^2}{k_j \rho_j c_{p_j}} I_4 \right\}^{1/4}. \qquad (1.2.70)$$

Здесь

$$I_4 = \beta_1^4 \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^1(\tau)}{d\tau}\right)^4 d\tau + \int\limits_0^t \left(\frac{d^2c_m^1(\tau)}{d\tau^2}\right)^4 d\tau + \beta_2^4 \int\limits_0^t \left(\frac{dc_m^2(\tau)}{d\tau}\right)^4 d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\frac{d^2c_m^2(\tau)}{d\tau^2}\right)^4 d\tau + \left(k_1 \int\limits_{-h_1}^0 w_{10z}^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} w_{20z}^2 dz\right)^2. \quad (1.2.71)$$

Очевидно, что ряд для функций $\partial C_m^j/\partial t$ также будет сходиться абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса, если выполняется условие (1.2.60) при $s \geq 2$, при этом $c^j(t) \in C^2([0,T])$ и $\|\Theta_{jrr}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzzz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$.

Используя неравенство (1.2.48), из (1.2.52), (1.2.53), (1.2.55), (1.2.64) – (1.2.66) следует ограниченность функции $|\partial^2 C_m^j/\partial z^2|$. Кроме того, если выполняется условие (1.2.60) при $s \geq 2$ и $|d^2c^j(t)/dt^2| \leq M_3 \equiv \text{const}$, то ряд для функций $\partial^2 C_m^j/\partial z^2$ сходится абсолютно и равномерно.

Поскольку $|J_0(\xi_m r/R)| \leq 1$ [16], то

$$|\Theta_j| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |C_m^j(z,t)|, \quad \left|\frac{\partial \Theta_j}{\partial t}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial C_m^j(z,t)}{\partial t}\right|,$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 C_m^j(z,t)}{\partial z^2}\right|. \quad (1.2.72)$$

Так как было показано, что ряды для функций $C_m^j(z,t)$, $\partial C_m^j(z,t)/\partial t$, а также $\partial^2 C_m^j(z,t)/\partial z^2$ сходятся абсолютно и равномерно, значит, по признаку Вейерштрасса [19] ряды для функций $\Theta_j(r,z,t)$, $\partial\Theta_j(r,z,t)/\partial t$ и $\partial^2\Theta_j(r,z,t)/\partial z^2$ также сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя рекуррентную формулу для функции Бесселя и неравенство (1.1.20), получим

$$\left|\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2}\right| \leq \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} |C_m^j(z,t)|\, \xi_m \left[\left|\frac{1}{r} J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| + \left|\frac{\xi_m}{R} J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right|\right] \leq$$
$$\leq \frac{3}{2R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 |C_m^j(z,t)|, \quad (1.2.73)$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_j}{\partial r}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{R} |C_m^j(z,t)|\, \xi_m \left|\frac{1}{r} J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| \leq \frac{1}{2R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 |C_m^j(z,t)|. \quad (1.2.74)$$

Очевидно, что ряды для функций $r^{-1}\partial\Theta_j(r,z,t)/\partial r$, $\partial^2\Theta_j(r,z,t)/\partial r^2$ сходятся абсолютно и равномерно, если справедливо условие (1.2.60) при $s \geq 4$.

Таким образом, нами доказана

**Теорема 1.2.1.** Ряды для функций $\Theta_j$, $\Theta_{jt}$, $\Theta_{jzz}$, $r^{-1}\Theta_{jr}$, $\Theta_{jrr}$ сходятся абсолютно и равномерно, если справедливо условие (1.2.60) при $s \geq 4$, где $\varepsilon > 0$, $|c^j(t)| \leq M_1 \equiv \text{const}$, $|dc^j(t)/dt| \leq M_2 \equiv \text{const}$, $|d^2c^j(t)/dt^2| \leq M_3 \equiv \text{const}$ при $t \in [0,T]$ и $\|\Theta_j^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jrr}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzzz}^0\|_{L_2([0,R]\times l_j)} < \infty$.

Таким образом, при сформулированных условиях решение является классическим.

#### Решение задачи в случае нулевой температуры на основаниях цилиндра

Теперь рассмотрим случай, когда температура, задаваемая на основаниях цилиндра равна нулю, то есть $A_j(r,t) = 0$, а на боковых стенках сосуда она отлична от нуля ($T_j(z,t) \neq 0$). Выполним замену

$$\Theta_j(r,z,t) = \bar{\Theta}_j(r,z,t) + \frac{r^2}{R^2}T_j(z,t), \tag{1.2.75}$$

тогда задача (1.2.1) - (1.2.3) примет вид

$$\bar{\Theta}_{jt} = \chi_j \Delta\bar{\Theta}_j + \bar{F}_j(r,z,t), \tag{1.2.76}$$

$$\begin{gathered} \bar{\Theta}_1(r,-h_1,t) = 0, \quad \bar{\Theta}_2(r,h_2,t) = 0, \quad \bar{\Theta}_j(R,z,t) = 0, \\ \bar{\Theta}_1(r,0,t) = \bar{\Theta}_2(r,0,t), \quad k_1\bar{\Theta}_{1z}(r,0,t) = k_2\bar{\Theta}_{2z}(r,0,t). \end{gathered} \tag{1.2.77}$$

$$\bar{\Theta}_j(r,z,0) = \Theta_j^0(r,z) - \frac{r^2}{R^2}T_j(z,0). \tag{1.2.78}$$

Здесь

$$\bar{F}_j(r,z,t) = \frac{\chi_j}{R^2}(4T_j + r^2T_{jzz}) - \frac{r^2}{R^2}T_{jt}. \tag{1.2.79}$$

Таким образом, потребуем, чтобы $T_j(z,t) \in C^2(l_j) \bigcap C^1([0,T])$, где $l_1 = [-h_1, 0]$, $l_2 = [0, h_2]$. Разложим в ряд функцию $\bar{F}_j(r,z,t)$ на $0 < r < R$ [54]

$$\bar{F}_j(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^j(z,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{1.2.80}$$

где с учётом (1.2.79) [46]

$$\begin{aligned} F_m^j(z,t) &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\xi_m)} \int\limits_0^R r\bar{F}_j(r,z,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{\xi_m J_1(\xi_m)} \left[\frac{\chi_j}{R^2}\left(4T_j + \frac{R^2}{\xi_m^2}(\xi_m^2 - 4)T_{jzz}\right) - \frac{1}{\xi_m^2}(\xi_m^2 - 4)T_{jt}\right]. \end{aligned} \tag{1.2.81}$$

Будем искать решение задачи (1.2.75) - (1.2.78) виде рядов Фурье

$$\bar{\Theta}_j(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m^j(z,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right), \tag{1.2.82}$$

где $\xi_m$ — $m$-й корень уравнения $J_0(\xi) = 0$. Подставив (1.2.82) с учётом (1.2.79), (1.2.80) в (1.2.75), получим задачу для функций $D_m^j(z,t)$

$$\frac{\partial D_m^j}{\partial t} = \chi_j \frac{\partial^2 D_m^j}{\partial z^2} - \chi_j \frac{\xi_m^2}{R^2} D_m^j + F_m^j. \tag{1.2.83}$$

Из граничных условий следует, что

$$\begin{gathered} D_m^1(-h_1,t) = 0, \quad D_m^2(h_2,t) = 0, \\ D_m^1(0,t) = D_m^2(0,t), \quad k_1 \frac{\partial D_m^1}{\partial z}(0,t) = k_2 \frac{\partial D_m^2}{\partial z}(0,t). \end{gathered} \tag{1.2.84}$$

Начальные условия (1.2.78) дают аналогичные данные для $D_m^j(z,t)$

$$D_m^j(z,0) = \frac{2}{R^2 J_1(\xi_m)} \int\limits_0^R r \left[\Theta_j^0(r,z) - \frac{r^2}{R^2} T_j(z,0)\right] J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr. \tag{1.2.85}$$

Далее, как и в первом параграфе, применим преобразование Лапласа. В изображениях по Лапласу получим из (1.2.83) - (1.2.85) краевую задачу для ОДУ

$$\frac{d^2 \widehat{D}_m^j}{dz^2} - \left[\left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2 + \frac{s}{\chi_j}\right] \widehat{D}_m^j = -\frac{D_m^j(z,0)}{\chi_j} - \widehat{F}_m^j, \tag{1.2.86}$$

$$\begin{gathered} \widehat{D}_m^1(-h_1,s) = 0, \quad \widehat{D}_m^2(h_2,s) = 0, \\ k_1 \frac{d\widehat{D}_m^1(0,s)}{dz} = k_2 \frac{d\widehat{D}_m^2(0,s)}{dz}, \quad \widehat{D}_m^1(0,s) = \widehat{D}_m^2(0,s). \end{gathered} \tag{1.2.87}$$

Введём обозначение

$$\lambda_m^j = \sqrt{\left(\frac{\xi_m}{R}\right)^2 + \frac{s}{\chi_j}}, \quad d_m^j = -\frac{D_m^j(z,0)}{\chi_j} - \widehat{F}_m^j, \tag{1.2.88}$$

тогда общее решение уравнений (1.2.86) имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{D}_m^j(z,s) = \bar{a}_j \sinh(\lambda_m^j z) + \bar{b}_j \cosh(\lambda_m^j z) - \\ - \frac{1}{\lambda_m^j} \int\limits_{y_j}^{z} d_m^j \sinh(\lambda_m^j (z-x)) dx, \end{aligned} \tag{1.2.89}$$

где $y_1 = -h_1$, $y_2 = 0$; $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j$ — величины, зависящие от $s$. Подстановка (1.2.89) в граничные условия (1.2.87) приводит к четырём алгебраическим уравнениям на $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j$ $(j = 1, 2)$:

$$
\begin{gathered}
-\bar{a}_1 \sinh(\lambda_m^1 h_1) + \bar{b}_1 \cosh(\lambda_m^1 h_1) = 0, \\
\bar{a}_2 \sinh(\lambda_m^2 h_2) + \bar{b}_2 \cosh(\lambda_m^2 h_2) = \\
= \frac{1}{\lambda_m^2} \int\limits_0^{h_2} d_m^j \sinh(\lambda_m^2 (h_2 - x)) dx, \\
\bar{b}_1 = \bar{b}_2 - \frac{1}{\lambda_m^1} \int\limits_{-h_1}^{0} d_m^j \sinh(\lambda_m^1 x) dx, \\
k \lambda_m^1 \bar{a}_1 = \lambda_m^2 \bar{a}_2 + k \int\limits_{-h_1}^{0} d_m^j \cosh(\lambda_m^1 x) dx, \quad k = k_1/k_2.
\end{gathered}
\tag{1.2.90}
$$

Решение системы (1.2.90) таково

$$
\begin{gathered}
\bar{a}_1 = \frac{\bar{f}(s) \cosh(\lambda_m^1 h_1)}{\triangle}, \\
\bar{b}_1 = \frac{\bar{f}(s) \sinh(\lambda_m^1 h_1)}{\triangle}, \\
\bar{a}_2 = k \lambda_m \bar{a}_1 - \frac{k}{\lambda_m^2} \int\limits_{h_1}^{0} d_m^1 \cosh(\lambda_m^1 x) dx, \quad \lambda_m = \lambda_m^1/\lambda_m^2, \\
\bar{b}_2 = \bar{b}_1 + \frac{1}{\lambda_m^1} \int\limits_{h_1}^{0} d_m^1 \sinh(\lambda_m^1 x) dx,
\end{gathered}
\tag{1.2.91}
$$

$$
\triangle = \lambda_m^2 \sinh(\lambda_m^1 h_1) \cosh(\lambda_m^2 h_2) + k \lambda_m^1 \cosh(\lambda_m^1 h_1) \sinh(\lambda_m^2 h_2),
$$

$$
\bar{f}(s) = \int\limits_0^{h_2} d_m^2 \sinh(\lambda_m^2 (h_2 - x)) dx +
$$

$$
+ \int\limits_{h_1}^{0} d_m^1 \left( \frac{1}{\lambda_m} \cosh(\lambda_m^2 h_2) \sinh(\lambda_m^1 x) - k \sinh(\lambda_m^2 h_2) \cosh(\lambda_m^1 x) \right) dx.
$$

Оригиналы $D_m^j$ восстанавливаются с помощью формулы обратного преобразования Лапласа. Следовательно, справедлива

**Лемма 2.2.1.** Решение задачи (1.2.83) - (1.2.85) представимо в виде формальных рядов Фурье (1.2.82) с коэффициентами $D_m^j(z,t)$, определяемые путём обращения преобразования Лапласа формул (1.2.89), (1.2.91).

**О сходимости рядов** (1.2.82)

Рассмотрим задачу для $D_m^j(z,t)$. Обозначим для краткости

$$u_j(z,t) = D_m^j(z,t), \quad \beta_j = \chi_j \frac{\xi_m^2}{R^2}, \tag{1.2.92}$$

$$u_{j0}(z) = D_m^j(z,0), \quad f_j(z,t) = F_m^j(z,t). \tag{1.2.93}$$

Тогда, с учётом (1.2.92), (1.2.93), задача (1.2.83) - (1.2.85) примет вид

$$u_{1t} - \chi_1 u_{1zz} + \beta_1 u_1 + f_1(z,t) = 0, \quad -h_1 < z < 0, \tag{1.2.94}$$

$$u_{2t} - \chi_2 u_{2zz} + \beta_2 u_2 + f_2(z,t) = 0, \quad 0 < z < h_2, \tag{1.2.95}$$

$$u_1(-h_1,t) = 0, \quad u_2(h_2,t) = 0, \tag{1.2.96}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad u_{1z}(0,t) = u_{2z}(0,t), \tag{1.2.97}$$

$$u_{j0} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\xi_m)} \int\limits_0^R r \left[\Theta_j^0(r,z) - \frac{r^2}{R^2} T_j(z,0)\right] J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right) dr. \tag{1.2.98}$$

**Замечание 1.2.3.** Полученная начально-краевая задача (1.2.94) - (1.2.98) для функции $u_j(z,t)$ подобна задаче (1.2.24) - (1.2.28) для функции $\bar{v}_j(z,t)$. Тогда, учитывая (1.2.92), оценки для следующих функций $|D_m^j(z,t)|$, $|\partial D_m^j(z,t)/\partial t|$, $|\partial^2 D_m^j(z,t)/\partial^2 z|$ будут также подобны оценкам для функций $|\bar{v}_j(z,t)|$, $|\bar{v}_{jt}(z,t)|$, $|\bar{v}_{jzz}(z,t)|$ соответственно ((1.2.41), (1.2.43), (1.2.48)).

Значит для функций $|D_m^j(z,t)|$ при $t \in [0,T]$ имеем следующую оценку

$$|D_m^j(z,t)| \le \left\{ \frac{8}{k_j \rho_j c_{p_j}} Q_1(t) \left[2TQ_1(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + e^{-2\delta t} \left( \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{-h_1}^0 u_{10}^2 dz + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^{h_2} u_{20}^2 dz \right)\right]\right\}^{1/4}, \tag{1.2.99}$$

где $\delta$ определяется формулой (1.2.33) и

$$Q_1(t) = \rho_1 c_{p_1} \int\limits_0^t \int\limits_{-h_1}^0 f_1^2(z,\tau) dz d\tau + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_0^t \int\limits_0^{h_2} f_2^2(z,\tau) dz d\tau +$$
$$+ k_1 \int\limits_{-h_1}^0 \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial z}\right)^2 dz + k_2 \int\limits_0^{h_2} \left(\frac{\partial u_{20}}{\partial z}\right)^2 dz. \tag{1.2.100}$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ и асимптотическую формулу для функции Бесселя, получим при $m >> 1$

$$
\begin{gathered}
f_j^2 \le \frac{4\pi}{\xi_m}\left[\frac{4\chi_j^2}{R^4}\left(8T_j^2+\frac{R^4}{\xi_m^4}(\xi_m^4+16)T_{jzz}^2\right)+\frac{1}{\xi_m^4}(\xi_m^4+16)T_{jt}^2\right],\\
u_{j0}^2 \le \frac{4\pi^2\xi_m^2}{R^2}\left[\int\limits_0^R r^2(\Theta_j^0)dr+\frac{4R^4}{\pi^2\xi_m^8}(\xi_m^4+16)T_j^2(z,0)\right].
\end{gathered}
\tag{1.2.101}
$$

Далее, для функция $|\partial D_m^j(z,t)/\partial t|$ имеем следующую оценку ($\bar{u}_j = u_{jt}$, $\bar{u}_j(z,0)=\bar{u}_{j0}$)

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{\partial D_m^j(z,t)}{\partial t}\right| \le \left\{\frac{8}{k_j\rho_j c_{p_j}}Q_2(t)\left[2TQ_2(t)+\right.\right.\\
\left.\left.+e^{-2\delta t}\left(\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{-h_1}^{0}\bar{u}_{10}^2dz+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^{h_2}\bar{u}_{20}^2dz\right)\right]\right\}^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.2.102}
$$

где

$$
\begin{gathered}
Q_2(t)=\rho_1 c_{p_1}\int\limits_0^t\int\limits_{-h_1}^{0}f_{1t}^2(z,\tau)dzd\tau+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{h_2}f_{2t}^2(z,\tau)dzd\tau+\\
+k_1\int\limits_{-h_1}^{0}\left(\frac{\partial\bar{u}_{10}}{\partial z}\right)^2dz+k_2\int\limits_0^{h_2}\left(\frac{\partial\bar{u}_{20}}{\partial z}\right)^2dz,\\
\bar{u}_{j0}=\chi_j\frac{d^2u_{j0}}{dz^2}-\beta_j u_{j0}+f_{jt}(z,0).
\end{gathered}
\tag{1.2.103}
$$

Используя уравнения (1.2.83), обозначения (1.2.93), оценки для функций $|D_m^j(z,t)|$, $|\partial D_m^j(z,t)/\partial t|$, находим оценку для функции $|\partial^2 D_m^j(z,t)/\partial^2 z|$

$$
\left|\frac{\partial^2 D_m^j(z,t)}{\partial z^2}\right| \le \frac{1}{\chi_j}\left(\left|\frac{\partial D_m^j(z,t)}{\partial t}\right|+\beta_j|D_m^j(z,t)|+|f_j(z,t)|\right).
\tag{1.2.104}
$$

Разложим в ряд Фурье функцию температуры на боковой поверхности цилиндра с учётом (1.2.4)

$$
T_j(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{a}_m^j(t)\sin\left(\frac{\pi m z}{h_j}\right),
$$

откуда

$$
\bar{a}_m^j(t)=\frac{(-1)^j}{h_j}\int\limits_{l_j}T_j(z,t)\sin\frac{\pi n z}{h_j}dz,
\tag{1.2.105}
$$

Пусть функции $|\bar{a}^j_m(t)|$ удовлетворяют следующим условиям

$$|\bar{a}^j_m(t)| \leq \frac{|\bar{a}^j(t)|}{m^{1+s_1+\varepsilon_1}}, \qquad (1.2.106)$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $s_1 \geq 3/2$, функции $|\bar{a}^j(t)|$, а также её производные $|\bar{a}^j_t(t)|$ и $|\bar{a}^j_{tt}(t)|$ ограниченны при $t \in [0, T]$. Потребуем, чтобы: 1 ) функции $T_j(z,t)$ имели непрерывные производные третьего порядка на $l_j$ при $t \in [0, T]$; 2 ) функции $\Theta^0_j(r,z)$, $\Theta^0_{jz}(r,z)$, $\Theta^0_{jzz}(r,z)$ были ограничены в пространстве $L_2([0,R] \times l_j)$, то есть $\|\Theta^0_j(r,z)\|_{L_2)([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta^0_{jz}(r,z)\|_{L_2)([0,R]\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta^0_{jzz}(r,z)\|_{L_2)([0,R]\times l_j)} < \infty$. Так как при больших $m$ имеем $\xi_m \approx \pi m$ [16], используя неравенство $|\sin(x) \leq 1|$, получим, что по признаку Вейерштрасса [19] с учётом (1.2.100) и неравенств (1.2.101) ряд для функций $D^j_m(z,t)$ будет сходиться абсолютно и равномерно. При тех же условиях будет абсолютно и равномерно сходиться ряд для функций $\partial D^j_m(z,t)/\partial t$. Что касается ряда для функции $\partial^2 D^j_m(z,t)/\partial z^2$, то в виду второго слагаемого в неравенстве (1.2.104), с учётом (1.2.92) он будет сходиться абсолютно и равномерно при $s_1 \geq 7/2$.

Как уже было отмечено ранее, $|J_0(\xi_m r/R)| \leq 1$ [16]. Поэтому, с учётом (1.2.82), справедливы следующие неравенства

$$\begin{gathered} |\Theta_j| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |D^j_m(z,t)|, \quad \left|\frac{\partial \Theta_j}{\partial t}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial D^j_m(z,t)}{\partial t}\right|, \\ \left|\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 D^j_m(z,t)}{\partial z^2}\right|. \end{gathered} \qquad (1.2.107)$$

Так как было показано, что выражения для функций $D^j_m(z,t)$, $\partial D^j_m(z,t)/\partial t$ и $\partial^2 D^j_m(z,t)/\partial z^2$ сходятся абсолютно и равномерно, то, с учётом поставленных условий для функции $T_j(z,t)$ и $\Theta^0_j(r,z)$, по признаку Вейерштрасса [19] ряды для функций $\Theta_j(r,z,t)$, $\partial \Theta_j(r,z,t)/\partial t$ и $\partial^2 \Theta_j(r,z,t)/\partial z^2$ также сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя рекуррентные формулы для функции Бесселя $J_0(x)$, неравенство (1.1.20), получим

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2}\right| &\leq \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} |D^j_m(z,t)|\, \xi_m \left[\left|\frac{1}{r} J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| + \left|\frac{\xi_m}{R} J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right|\right] \leq \\ &\leq \frac{3}{2R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 |D^j_m(z,t)|, \end{aligned} \qquad (1.2.108)$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_j}{\partial r}\right| \leq \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} |D^j_m(z,t)|\, \xi_m \left|\frac{1}{r} J_1\left(\frac{\xi_m r}{R}\right)\right| \leq \frac{1}{2R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 |D^j_m(z,t)|. \quad (1.2.109)$$

Очевидно, что ряды для функций $r^{-1}\partial\Theta_j(r,z,t)/\partial r,\ \partial^2\Theta_j(r,z,t)/\partial r^2$ сходятся абсолютно и равномерно, если справедливо условие (1.2.106) при $s_1 \geq 3.5$.

Таким образом, нами доказана

**Теорема 1.2.2.** Ряды для функций $\Theta_j$, $\Theta_{jt}$, $\Theta_{jzz}$, $r^{-1}\Theta_{jr}$, $\Theta_{jrr}$ сходятся абсолютно и равномерно, если: 1 ) справедливо условие (1.2.106) при $s_1 \geq 3.5$, где $\varepsilon_1 > 0$ и функции $|\bar{a}^j(t)|$, а также её производные $|\bar{a}^j_t(t)|$ и $|\bar{a}^j_{tt}(t)|$ ограниченны при $t \in [0,T]$; 2 ) функции $T_j(z,t)$ имеют непрерывные производные третьего порядка на $l_j$ при $t \in [0,T]$; 3 ) функции $\Theta^0_j(r,z)$, $\Theta^0_{jz}(r,z)$, $\Theta^0_{jzz}(r,z)$, $\Theta^0_{jzzz}(r,z)$ ограничены в пространстве $L_2([0,R]\times l_j)$.

Таким образом, при сформулированных условиях решение задачи (1.2.1) - (1.2.4) для случая, когда $T_j(z,t) \neq 0$, $A_j(r,z) = 0$ является классическим.

#### Выход решения на стационарный режим

Докажем, что решение задачи (1.2.1) - (1.2.4) сходится при $t \to \infty$ к решению стационарной задачи (1.1.1), (1.1.2), представленной в виде линейной комбинации (1.1.5) и (1.1.11). Произведём замену

$$\Theta_j(r,z,t) = \bar{\Theta}_j(r,z,t) + \frac{z^2}{h_j^2}\left[A_j(r,t) - A_j(R,t)\right] + T_j(z,t). \tag{1.2.110}$$

тогда $\bar{\Theta}_j$ есть решение начально-краевой задачи

$$\bar{\Theta}_{jt} = \chi_j \Delta\bar{\Theta}_j + g_j, \tag{1.2.111}$$

$$\bar{\Theta}_j(r,z,0) = \Theta^0_j(r,z) - \frac{z^2}{h_j^2}\left[A_j(r,0) - A_j(R,0)\right] - T_j(z,0), \tag{1.2.112}$$

$$\begin{gathered}\bar{\Theta}_j(R,z,t) = 0, \quad \bar{\Theta}_1(r,-h_1,t) = 0, \bar{\Theta}_1(r,h_2,t) = 0,\\ \bar{\Theta}_1(r,0,t) = \bar{\Theta}_2(r,0,t), \quad k_1\frac{\partial\bar{\Theta}_1}{\partial z}(r,0,t) = k_2\frac{\partial\bar{\Theta}_2}{\partial z}(r,0,t),\end{gathered} \tag{1.2.113}$$

где

$$\begin{aligned} g_j(r,z,t) = {} & \frac{\chi_j}{h_j^2}\left[2A_j(r,t) + z^2\Delta_1 A_j(r,t) - 2A_j(R,t)\right] + \\ & + \frac{z^2}{h_j^2}\left[A_{jt}(R,t) - A_{jt}(r,t)\right] + \chi_j T_{jzz} - T_{jt}, \end{aligned} \tag{1.2.114}$$

$$\Delta_1 A_j = A_{jrr} + \frac{1}{r}A_{jr}.$$

Заметим, что для функций $\bar{\Theta}_j$ имеют место неравенства Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega_j} |\bar{\Theta}_j|^2 d\Omega \le \frac{h_j^2}{2} \int\limits_{\Omega_j} |\nabla \bar{\Theta}_j|^2 d\Omega_j. \qquad (1.2.115)$$

Действительно,

$$\bar{\Theta}_1(r,z,t) = \int\limits_{-h_1}^{z} \bar{\Theta}_{1z}(r,z,t)dz, \quad \bar{\Theta}_2(r,z,t) = \int\limits_{h_2}^{z} \bar{\Theta}_{2z}(r,z,t)dz,$$

откуда, используя неравенство Коши Буняковского,

$$\bar{\Theta}_1^2 \le (z+h_1) \int\limits_{-h_1}^{0} \bar{\Theta}_{1z}^2 dz, \quad \bar{\Theta}_2^2 \le (h_2 - z) \int\limits_{0}^{h_2} \bar{\Theta}_{2z}^2 dz.$$

Интегрируя последние неравенства по $\Omega_j$, приходим к (1.2.115), так как $\bar{\Theta}_{jz}^2 \le |\nabla \bar{\Theta}_j|^2 = \bar{\Theta}_{jr}^2 + \bar{\Theta}_{jz}^2$.

Умножим уравнение (1.2.111) при $j=1$ на $\rho_1 c_{p_1} \bar{\Theta}_1$ и при $j=2$ на $\rho_2 c_{p_2} \bar{\Theta}_2$, проинтегрируем по $\Omega_j$ и результаты сложим, получим тождество

$$E_t + k_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla \bar{\Theta}_1|^2 d\Omega_1 + k_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla \bar{\Theta}_2|^2 d\Omega_2 =$$
$$= \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{\Omega_1} g_1 \bar{\Theta}_1 d\Omega_1 + \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{\Omega_2} g_2 \bar{\Theta}_2 d\Omega_2, \qquad (1.2.116)$$

с функцией $E(t)$, равной

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 c_{p_1} \int\limits_{\Omega_1} \bar{\Theta}_1^2 d\Omega_1 + \frac{1}{2} \rho_2 c_{p_2} \int\limits_{\Omega_2} \bar{\Theta}_2^2 d\Omega_2. \qquad (1.2.117)$$

Левая часть (1.2.116), в силу неравенств (1.2.115), больше или равна

$$E_t + 4\delta E, \quad \delta = \min_{j=1,2} \left( \frac{k_j}{h_j^2 \rho_j c_{p_j}} \right) = \min_{j=1,2} \left( \frac{\chi_j}{h_j^2} \right), \qquad (1.2.118)$$

а правая часть не превосходит

$$\rho_1 c_{p_1} \left( \int\limits_{\Omega_1} g_1^2 d\Omega_1 \right)^{1/2} \left( \int\limits_{\Omega_1} \bar{\Theta}_1^2 d\Omega_1 \right)^{1/2} +$$
$$+ \rho_2 c_{p_2} \left( \int\limits_{\Omega_2} g_2^2 d\Omega_2 \right)^{1/2} \left( \int\limits_{\Omega_2} \bar{\Theta}_2^2 d\Omega_2 \right)^{1/2} \le 2G(t)\sqrt{E(t)} \qquad (1.2.119)$$

с функцией

$$G(t)=\left(\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{\Omega_1} g_1^2 d\Omega_1\right)^{1/2}+\left(\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_{\Omega_2} g_2^2 d\Omega_2\right)^{1/2}. \qquad (1.2.120)$$

Теперь из (1.2.118) - (1.2.120) следует неравенство

$$E_t+4\delta E\leq 2G(t)\sqrt{E(t)},$$

интегрирование которого приводит к оценке

$$E(t)\leq\left(\sqrt{E(0)}+\int\limits_0^t G(\tau)e^{2\delta\tau}d\tau\right)^2 e^{-4\delta t}. \qquad (1.2.121)$$

Тем самым $L_2$ - нормы $\bar{\Theta}_j$ ограничены при $t\in[0,T]$, если ограничены на этом промежутке аналогичные нормы $A_j$, $A_{jt}$, $\Delta_1 A_1$, $T_{jt}$, $T_{jzz}$.

Оценим $L_2$ - нормы $\nabla\bar{\Theta}_j$. Для этого умножим уравнения (1.2.111) на $\rho_j c_{p_j}\bar{\Theta}_{jt}$, проинтегрируем по области $\Omega_j$ и результаты сложим. Получим другое интегральное тождество

$$\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{\Omega_1}\bar{\Theta}_{1t}^2 d\Omega_1+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{\Omega_2}\bar{\Theta}_{2t}^2 d\Omega_2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\bar{\Theta}_1|^2 d\Omega_1+\right.$$

$$\left.+k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla\bar{\Theta}_2|^2 d\Omega_2\right)=\rho_1 c_{p_1}\int\limits_{\Omega_1}\bar{\Theta}_{1t}g_1 d\Omega_1+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_{\Omega_2}\bar{\Theta}_{2t}g_2 d\Omega_2. \qquad (1.2.122)$$

В выводе (1.2.122) использована теорема Гаусса - Остроградского и равенство $\bar{\Theta}_{1t}(r,0,t)=\bar{\Theta}_{2t}(r,0,t)$. Поскольку правая часть тождества (1.2.122) не превосходит

$$\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{\Omega_1}\bar{\Theta}_{1t}^2 d\Omega_1+\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_{\Omega_2}\bar{\Theta}_{2t}^2 d\Omega_2+\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_{\Omega_1} g_1^2 d\Omega_1+\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_{\Omega_2} g_2^2 d\Omega_2,$$

приходим к оценке

$$k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\bar{\Theta}_1|^2 d\Omega_1+k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla\bar{\Theta}_2|^2 d\Omega_2\leq k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\bar{\Theta}_1^0|^2 d\Omega_1+$$

$$+k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla\bar{\Theta}_2^0|^2 d\Omega_2+\rho_1 c_{p_1}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_1} g_1^2 d\Omega_1 d\tau+\rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} g_2^2 d\Omega_2 d\tau\equiv F(t),$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega_j} |\nabla\bar{\Theta}_j|^2 d\Omega_j \leq \frac{F(t)}{k_j}, \tag{1.2.123}$$

Из полученных оценок (1.2.115), (1.2.123) следует

**Лемма 1.2.4.** Решение начально-краевой задачи (1.2.1) - (1.2.3) единственно при $t \in [0, T]$, причём $\Theta_j$, $\nabla\Theta_j$, $\Theta_{jt}$, $\Delta\Theta_j \in L_2(\Omega_j)$, если $\Theta_j^0$, $\nabla\Theta_j^0$, $\Delta\Theta_j^0 \in L_2(\Omega_j)$, $A_j$, $A_{jt}$, $A_{jtt}$, $\Delta_1 A_j$, $\Delta_1 A_{jt} \in L_2(\Gamma)$, где $\Gamma = [0, R]$ и $T_{jt}$, $T_{jzz}$, $T_{jtt}$, $T_{jtzz} \in L_2(l_j)$, здесь $l_1 = [-h_1, 0]$, $l_2 = [0, h_2]$

Действительно, согласно замене (1.2.110) и оценкам (1.2.115), (1.2.123) имеем

$$\int\limits_{\Omega_j} |\Theta_j|^2 d\Omega_j \leq \frac{4E(t)}{\rho_j c_{p_j}} + \frac{2}{5} h_j \int\limits_{\Gamma} |A_j|^2 d\Gamma + 2 \int\limits_{l_j} |T_j|^2 dz, \quad (d\Gamma = r dr),$$

$$\int\limits_{\Omega_j} |\nabla\Theta_j|^2 d\Omega_j \leq \frac{2F(t)}{k_j} + \frac{2}{5} h_j \int\limits_{\Gamma} |A_{jr}|^2 d\Gamma + \frac{8}{3h_j} \int\limits_{\Gamma} |A_j|^2 d\Gamma + 2 \int\limits_{l_j} |T_{jz}|^2 dz. \tag{1.2.124}$$

При $\Theta_j^0 \equiv 0$, $A_j \equiv 0$, $T_j \equiv 0$ имеем $E(t) \equiv 0$, $F(t) \equiv 0$, значит $\Theta_j \equiv 0$, откуда и следует единственность решения.

Дифференцированием по времени задачи (1.2.1) - (1.2.3), проводя аналогичные оценки, получим $\Theta_{jt} \in L_2(\Omega_j)$. Для этого необходимо предполагать, что $A_{jtt}$, $\Delta_1 A_{jt} \in L_2(\Gamma)$, $T_{jtt}$, $T_{jtzz} \in L_2(l_j)$, $\Delta\Theta_j^0 \in L_2(\Omega_j)$. Первые два возникают при дифференцировании функций $g_j$ из (1.2.114), а третье – при нахождении начальных условий для $\bar{\Theta}_{jt}(r, z, 0) = \chi_j \Delta\Theta_j^0 + g_{jt}(r, z, 0)$. Принадлежность $\Delta\Theta_j \in L_2(\Omega_j)$ теперь вытекает из уравнений (1.2.1). Лемма доказана.

**Теорема 1.2.3.** Решение нестационарной начально-краевой задачи (1.2.1) - (1.2.3) с ростом времени выходит на стационарный режим в пространстве $L_2$, если

$$\int\limits_0^\infty \|A_j^s - A_j\|_{L_2(\Gamma)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \|T_j^s - T_j\|_{L_2(l_j)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty. \tag{1.2.125}$$

**Доказательство.** Пусть $\Theta_j^s(r, z)$ — есть линейная комбинация стационарных решений (1.1.5) и (1.1.11) задачи (1.1.1), (1.1.2) с данными

$$\Theta_1^s(r, -h_1) = A_1^s(r), \quad \Theta_2^s(r, h_2) = A_2^s(r),$$

$$\Theta_j^s(R, z) = T_j^s(z).$$

Введём обозначения

$$N_j(r, z, t) = \Theta_j^s(r, z) - \Theta_j(r, z, t),$$

$$N_{j0}(r,z,0) = \Theta_j^s(r,z) - \Theta_j^0(r,z,0).$$

Тогда $N_j(r,z,t)$ удовлетворят той же сопряжённой задаче, что и $\Theta_j(r,z,t)$, но с изменёнными данными.

Значит справедливы оценки вида (1.2.121), (1.2.123) уже для $N_j$ и при выполнении (1.2.125) получим неравенства

$$\|\Theta_j - \Theta_j^s\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} \leq C_j e^{-\delta t}. \tag{1.2.126}$$

и решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим, найденный в пункте 1.1.1.

Полученная оценка (1.2.126) показывает, что стационарное решение $\Theta_j^s(r,z)$ является экспоненциально устойчивым в $L_2$-нормах, если выполнены условия (1.2.125).

# 2 Решение спектральных задач о потере устойчивости равновесия жидкостей в конечном цилиндре

В данной главе рассматриваются задачи о потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой. В первом и во втором случае получена явная зависимость числа Марангони (спектрального параметра) от геометрических параметров сосуда и физических параметров жидкостей.

## 2.1 Возникновение конвекции в двухслойной системе жидкостей в конечном цилиндре

Рассмотрим стационарный осесимметрический случай, когда цилиндрический контейнер, заполненный двумя покоящимися жидкостями с общей поверхность раздела (рисунок 1). Обозначим через $\Omega_1 = (0, R) \times (-h_1, 0)$ и $\Omega_2 = (0, R) \times (0, h_2)$ области, которые занимают соответственно первая и вторая жидкости. Здесь $R$, $h_1$, $h_2$ — радиус цилиндра и высоты слоёв соответственно. Тогда из (1) получим

$$\mathbf{u}_j = 0, \tag{2.1.1}$$

$$p_{jz} = \rho_{oj} g \beta_j \Theta_j, \tag{2.1.2}$$

$$\Theta_j = A_j z + B_j. \tag{2.1.3}$$

На общей поверхности раздела $\Gamma$ $(z = 0)$ условия равенства температур (8), потоков тепла (25), динамическое и кинематическое условия (21), (3) соответственно примут вид

$$\Theta_1 = \Theta_2, \quad k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}, \tag{2.1.4}$$

$$(-p_2 + p_1)\, \mathbf{n} = \nabla_{11} \sigma, \quad V_n = 0, \tag{2.1.5}$$

где $V_n$ – скорость перемещения поверхности раздела $\Gamma$ в направлении $\mathbf{n}$. Заметим, что поверхность раздела суть плоскость, поэтому её средняя кривизна равна нулю. Для давления получаем следующее выражение

$$p_j = \rho_{oj} g \beta_j \left( \frac{A_j}{2} z^2 + B_j z \right) + C_j, \quad C_j = \text{const}.$$

На основаниях соответственно задаётся температура $\Theta_{01}$ и $\Theta_{02}$. Исходя из этого и из условий (2.1.4) температурные коэффициенты вычисляются следующим образом

$$A_1 = \frac{k\left(\Theta_{02} - \Theta_{01}\right)}{h_2 + kh_1}, \quad A_2 = \frac{\Theta_{02} - \Theta_{01}}{h_2 + kh_1},$$
$$B_1 = B_2 = \frac{kh_1\Theta_{02} + h_2\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad k = k_2/k_1. \tag{2.1.6}$$

Заметим, что $A_1 = kA_2$, причём $A_1$, $A_2$ зависят от разности температур на основаниях цилиндров. Далее предполагаем, что $\Theta_{02} = 0$, так что

$$A_1 = -\frac{k\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad A_2 = -\frac{\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad B_1 = B_2 = \frac{h_2\Theta_{01}}{h_2 + kh_1} \tag{2.1.7}$$

### 2.1.1 Возмущённое решение

Когда температура на нижнем основании достигает некоторого критического значения, то возникает движение – конвекция. С целью определения $\Theta_{01}$ рассматривается линеаризованная на равновесном состоянии (2.1.1) - (2.1.6) задача о малых осесимметрических возмущениях системы в рамках модели Обербека-Буссинеска (1), решение которой ищется в виде нормальных волн

$$\left(\boldsymbol{U}_j, P_j, T_j, N\right) = \left(\mathbf{U}_j\left(r,z\right), P_j\left(r,z\right), T_j\left(r,z\right), N\left(r\right)\right) exp\left[-iCt\right],$$

где $P_j$, $T_j$, $\boldsymbol{U}_j = (U_j, V_j, W_j)$ — возмущение основного решения $p_j$, $\Theta_j$ и $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$; $N$ — отклонение амплитуды возмущений свободной границы по нормали; $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент. Далее применяем принцип монотонности возмущений, то есть полагаем $C = 0$. Тогда в безразмерных переменных (в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно $h_1$, $h_1^2/\nu_1$, $\nu_1/h_1$, $\rho_1\nu_1^2/h_1^2$, $A_1h_1$) получим в областях $\Omega_1 = (0, 1/\alpha) \times (-h, 0)$ и $\Omega_2 = (0, 1/\alpha) \times (0, 1)$, где $\alpha = h_1/R$, $h = h_1/h_2$ задачу в безразмерных переменных

$$P_{jr} = \frac{\mu_j}{\mu_1}\left(U_{jrr} + \frac{1}{r}U_{jr} + U_{jzz} - \frac{1}{r^2}U_j\right), \tag{2.1.8}$$

$$P_{jz} - \frac{\beta_j\rho_j}{\beta_1\rho_1}\mathrm{G}T_j = \frac{\mu_j}{\mu_1}\left(W_{jrr} + \frac{1}{r}W_{jr} + W_{jzz}\right), \tag{2.1.9}$$

$$U_{jr} + \frac{1}{r}U_j + W_{jz} = 0, \tag{2.1.10}$$

$$\frac{k_1}{k_j}W_j = \frac{\chi_j}{\chi_1\mathrm{Pr}}\left(T_{jrr} + \frac{1}{r}T_{jr} + T_{jzz}\right). \tag{2.1.11}$$

где $\rho = \rho_2/\rho_1$; $\mu = \mu_2/\mu_1$; $\beta = \beta_2/\beta_1$; $\chi = \chi_2/\chi_1$; $k = k_2/k_1$; $\mathrm{Pr} = \nu_1/\chi_1$ – число Прандтля; $\mathrm{G} = A_1 g\beta_1 h_1^4/\nu_1^2$ – число Грасгофа.

Граничные условия на поверхности раздела таковы

$$kT_1 + kN = T_2 + N, \tag{2.1.12}$$
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \tag{2.1.13}$$
$$P_1 - P_2 + 2\left(\mu W_{2z} - W_{1z}\right) = \left\{(\rho\beta - 1)\,\mathrm{G}' + (1-\rho)\,\mathrm{Ga}\right\} N + \\ + \mathrm{We}\left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r\right), \tag{2.1.14}$$
$$\mu(W_{2r} + U_{2z}) - (W_{1r} + U_{1z}) = -\mathrm{M}\left(N_r + T_{1r}\right), \tag{2.1.15}$$
$$kT_{2z} - T_{1z} = \mathrm{M}_1\left(U_{1r} + \frac{1}{r}U_1 + \frac{1}{r}V_1\right), \tag{2.1.16}$$
$$W_1 = 0, \tag{2.1.17}$$

где $\mathrm{We} = \sigma h_1/\rho_1\nu_1^2$ – число Вебера; $\mathrm{M} = A_1 æ h_1^2/\rho_1\nu_1^2$ – число Марангони; $\mathrm{Ga} = gh_1^3/\nu_1^2$ – число Галилео; $\mathrm{G}' = B_1 g\beta_1 h_1^3/\nu_1^2$ – число Грасгофа; $\mathrm{M}_1 = æ^2 B_1\nu_1/k_1\rho_1\nu_1$. Параметр $\mathrm{M}_1$ характеризует энергию, затрачиваемую на деформацию поверхности раздела. Заметим, что в силу (2.1.6), числа M, G′ и G прямо пропорциональны искомой температуре на нижнем основании цилиндра. Выразим G, G′ и $M_1$ через M

$$\mathrm{G} = \frac{g\beta_1 h_1^2\rho_1}{æ}\mathrm{M}, \quad \mathrm{G}' = -\frac{g\beta_1 h_1^2\rho_1}{khæ}\mathrm{M}, \quad M_1 = -\frac{æ\nu_1}{k_2 h_1 h}\mathrm{M}. \tag{2.1.18}$$

Таким образом задача (2.1.8) - (2.1.17) является спектральной относительно параметра M – числа Марангони. Особенностью этой задачи является, в силу (2.1.18), вхождение спектрального параметра в систему уравнений (2.1.8) - (2.1.11) и граничные условия (2.1.12) - (2.1.17).

На основаниях цилиндра выполняются условия прилипания и возмущения температур равны нулю $(0 < r < 1/\alpha)$

$$U_1(r,-h) = W_1(r,-h) = 0, \quad T_1(r,-h) = 0. \tag{2.1.19}$$

$$U_2(r,1) = W_2(r,1) = 0, \quad T_2(r,1) = 0. \tag{2.1.20}$$

На боковых стенках контейнера справедливо условие просачивания жидкости по нормали к ним

$$U_j\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) \neq 0, \quad W_j\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) = 0, \quad T_j\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) = 0, \tag{2.1.21}$$

то есть жидкость может просачиваться по нормали к стенке, при этом её общий поток через всю боковую поверхность равен нулю.

**Замечание 2.1.1.** Общий поток жидкости через всю боковую поверхность равен нулю.

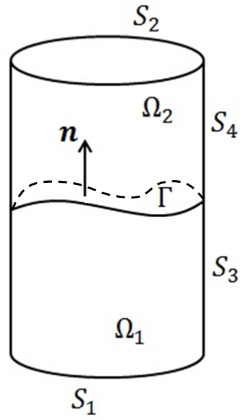


Рисунок 2. Цилиндр с поверхностью раздела

Действительно, рассмотрим рисунок 2. Пусть $\mathbf{u}_j$ – скорость перемещения частиц $j$-ой жидкости. В области $\Omega_1 = (0, a) \times (-h_1, 0)$ имеем

$$0 = I_1 = \int\limits_{\Omega_1} div \mathbf{u}_1 d\Omega_1 = \int\limits_{S_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{S_1} dS_1 + \int\limits_{S_3} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{S_3} dS_3 + \int\limits_{\Gamma} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma.$$

Так как, на основаниях цилиндра выполняется условие прилипания, то в итоге получим, что

$$I_1 = \int\limits_{S_3} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{S_3} dS_3 + \int\limits_{\Gamma} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma.$$

Аналогичные рассуждения проводим для области $\Omega_2 = (0, a) \times (0, h_2)$

$$0 = I_2 = \int\limits_{\Omega_2} div \mathbf{u}_2 d\Omega_2 = \int\limits_{S_4} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_{S_4} dS_4 - \int\limits_{\Gamma} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma.$$

Так как, на поверхности раздела $\Gamma$ $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, то

$$I_1 + I_2 = \int\limits_{S_3} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_{S_3} dS_3 + \int\limits_{S_4} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_{S_4} dS_4 = 0$$

На всей боковой поверхности $S$ нормаль $\mathbf{n}_S = (1, 0, 0)$; $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$. Обозначим через

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_1 & \text{на } S_3, \\ \mathbf{u}_2 & \text{на } S_4. \end{cases}$$

В итоге

$$\int\limits_{S_3} \mathbf{u}_1 dS_3 + \int\limits_{S_4} \mathbf{u}_2 dS_4 = \int\limits_{S} \mathbf{u} dS = 0.$$

Данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $2\pi a \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{u}\,(a,z) = 0$, то есть расход $Q = 0$ через боковую поверхность (следствие уравнения сохранения масс). Если $\mathbf{u}|_S = 0$, то это тоже выполняется автоматически.

### 2.1.2 Зависимость числа Марангони от геометрии контейнера и физических параметров жидкости

Задача (2.1.8) - (2.1.21) допускает разделение переменных, именно

$$U_j = R_r(r)F_{jz}\,(z)\,, \tag{2.1.22}$$

$$W_j = m^2 R(r)F_j\,(z)\,, \tag{2.1.23}$$

$$T_j = m^2 R(r)D_j\,(z)\,, \tag{2.1.24}$$

$$P_j = m^2 R(r)\Psi_j\,(z)\,, \tag{2.1.25}$$

где

$$R = R_n\,(r) = \mathrm{J}_0\,(mr)\,, \tag{2.1.26}$$

здесь $m = \alpha\delta_n = h_1\delta_n/a$, а $\delta_n,\ n = 1, 2...$ есть решение уравнения

$$J_0\,(\delta) = 0. \tag{2.1.27}$$

Из (2.1.26), (2.1.27) получим, что условия на боковой поверхности для возмущения температуры и касательной скорости заведомо выполнены. Также заметим, что согласно (2.1.22) - (2.1.24) величина $N$ пропорциональна $R(r)$, то есть

$$N \equiv N_0 m^2 J_0\,(mr)\,, \quad N_0 = \mathrm{const}.$$

Подстановка выражений (2.1.22) - (2.1.25) в уравнения (2.1.8) - (2.1.11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} L^3 D_j - m^2 \mathrm{G} D_j = 0, \tag{2.1.28}$$

где $L = d^2/dz^2 - m^2$. В результате функции $D_j$ определяется с точностью до двенадцати постоянных, которые находятся из тринадцати граничных условий ($N_0$ входит в число неизвестных постоянных) (2.1.12) - (2.1.21). Функция $F_j(z)$ определяется равенством

$$F_j = \frac{k_j\chi_j}{k_1\chi_1\mathrm{Pr}} L D_j. \tag{2.1.29}$$

В свою очередь $\Psi_j(z)$ есть

$$\Psi_j(z) = F_{jzzz} - m^2 F_{jz}.$$

Решение уравнения (2.1.28) выглядит следующим образом

$$D_j = \frac{H_{j1}}{3m^2}\left(\frac{8(\cosh(\lambda_{j1}z) - \cos(\lambda_{j3}z)\cosh(\lambda_{j2}z) - \sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\sinh(\lambda_{j2}z))}{b_j^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{4\sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\sinh(\lambda_{j2}z)}{b_j}\right)+$$
$$+\frac{H_{j2}}{3m^2}\left(\frac{8(\cosh(\lambda_{j1}z) - \cos(\lambda_{j3}z)\sinh(\lambda_{j2}z) - \sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\cosh(\lambda_{j2}z))}{b_j^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{4\sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\cosh(\lambda_{j2}z)}{b_j}\right)+$$
$$+\frac{H_{j3}}{3mb_j}\frac{4\sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\cosh(\lambda_{j2}z)}{b_j}+\frac{H_{j4}}{3m}\frac{4\sqrt{3}\sin(\lambda_{j3}z)\sinh(\lambda_{j2}z)}{b_j}+$$
$$+H_{j5}\cosh(\lambda_{j1}z)+H_{j6}\sinh(\lambda_{j1}z), \tag{2.1.30}$$

где

$$\lambda_{j1} = m(1+b_j)^{1/2},$$
$$\lambda_{j2} = \frac{\sqrt{2}}{2}m[1-\frac{b_j}{2}+((1-b_j)^2+b_j)^{1/2}]^{1/2},$$
$$\lambda_{j3} = \frac{mb_j\sqrt{6}}{4[1-\frac{b_j}{2}+((1-b_j)^2+b_j)^{1/2}]^{1/2}},$$
$$b_j = \sqrt[3]{\frac{k_2\nu_2\chi_2\beta_j \mathrm{PrG}}{k_j\nu_j\chi_j\beta_2 m^4}},$$

а $H_{ji}$, $i = 1..6$, $j = 1,2$ — неизвестные постоянные. Используя (2.1.29), находим функцию $F_j(z)$, а затем, подставляя найденное решение в условия (2.1.12) - (2.1.20), получим систему уравнений, которая будет являться однородной относительно постоянных $H_{ji}$, $i = 1..6$, $j = 1,2$. Нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. Это даёт возможность найти критические числа Марангони путём аналитических вычислений в системе Maple. В результате доказана

**Лемма 2.1.1.** Критические числа Марангони зависят от геометрии контейнера и физических параметров жидкости $M(\alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Ga}, \mathrm{Pr}, \delta_n)$ и находятся в явном виде.

Формула, выражающая данную зависимость, приводиться не будет, так как имеет слишком громоздкий вид. Поэтому для анализа данной зависимости далее были рассмотрены конкретные жидкости, когда в нижней части цилиндра расположена муравьиная кислота, а в верхней – трансформаторное масло. Их физические параметры таковы: $\rho_2 = 0.86 \cdot 10^3$ кг/м$^3$, $\rho_1 = 1.2196 \cdot 10^3$ кг/м$^3$,

$\nu_2 = 18.49 \cdot 10^{-6}$ м$^2$/с, $\nu_1 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ м$^2$/с, $\chi_2 = 1.21 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с, $\chi_1 = 1.7 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с, $k_2 = 0.63519 \cdot 10^{-4}$ кг м/с$^3$К, $k_1 = 1.55 \cdot 10^{-4}$ кг м/с$^3$К, $\beta_2 = 0.7 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, $\beta_1 = 1.025 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, æ $= 0.0022$ Н/мК, $\sigma = 3.81 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Ниже приведен ряд таблиц, в которых можно проследить зависимость $\mathrm{M}(\delta_n, \alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Ga})$

| Таблица 1. We $= 10^4$, Ga $= 1.32 \cdot 10^7$, $h = 1$, $\alpha = 1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | 2.40482 | 5.52 | 14.93 | 21.212 | 27.493 | 33.776 |
| M | -2.0067 | -80.67 | -475.86 | -2643.11 | -3600 | -4645.4 |

| Таблица 2. We $= 10^4$, Ga $= 1.32 \cdot 10^7$, $\delta_1 = 2.40482$, $h = 1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1 | 3 | 5 |
| M | -1477.305 | -373.5675 | -21.2636 | -2.0067 | -25.491 | -263.25 |

| Таблица 3. We $= 10^4$, $\delta_1 = 2.40482$, $h = 1$, $\alpha = 1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ga | 0.13 | 13.4 | 1344.2 | $1.3 \cdot 10^6$ | $6.7 \cdot 10^6$ | $1.32 \cdot 10^7$ |
| M | -3.96 | -3.93 | -3.79 | -3.187 | -2.74 | -2.0067 |

| Таблица 4. We $= 10^4$, Ga $= 1.32 \cdot 10^7$, $\delta_1 = 2.40482$, $\alpha = 1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.8 | 1 | 5 |
| M | -126.37 | -135.499 | -156.4 | -135.459 | -2.0067 | -7.855 |

Из представленных данных можно сделать следующие выводы, а именно, что при увеличении номера корня функции Бесселя (табл. 1, здесь $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$) критические числа Марангони также увеличиваются по модулю. При изменении $\alpha$ от 0.05 до 1, |M| убывает. Увеличение Ga приводит к незначительному уменьшению значения числа Марангони по модулю. При изменении $h$ от 0.1 до 0.5, |M| убывает (табл. 4). При увеличении числа Вебера значение числа Марангони убывает. Так, для We $= 10^4$, M $= -2.0067$, когда $\delta_1 = 2.404$, $h = 1$, $\alpha = 1$ и Ga $==$ $1.32 \cdot 10^7$. То есть, используя формулу для числа Марангони (2.1.6) и предположение о том, что $\Theta_{02} = 0$, получим, что температура на нижнем основании цилиндра $\Theta_{01} \approx 0.03$К.

Предположим, что Ga $= 0$ (условие полной невесомости), тогда решение уравнения (2.1.28) есть

$$D_j = \left(H_{j1} z^2 + H_{j3} z + H_{j5}\right) \cosh mz + \left(H_{j2} z^2 + H_{j4} z + H_{j6}\right) \sinh mz, \quad (2.1.31)$$

где $H_{ji}, i = 1, 2, ..6$ также некоторые неизвестные постоянные.

**Замечание 2.1.2.** Формула для функции $D_j(z)$ (2.1.30), являющееся решением уравнения (2.1.28) для случая, когда $g \neq 0$, при $g \to 0$ совпадает с решением этого же уравнения при $g = 0$ (условие полной невесомости) (2.1.31).

Далее, доказана

**Лемма 2.1.2.** В условии полной невесомости зависимость числа Марангони от геометрии контейнеров и физических параметров жидкости выражается следующим образом

$$M = \frac{4m^2\mathrm{Pr}\left(A - k\mu S_1 S_2 \mathrm{M}_1\left(m^2 - S_2^2\right)\left(m^2h^2 - S_1^2\right)\right)}{\mathrm{Pr}Z - Q\mathrm{We}^{-1}}, \qquad (2.1.32)$$

где

$$\begin{aligned}
&A = 2\left(kS_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^3h^2\mu + m^3h - m^2S_1C_1 - m^2h^2\mu S_2C_2 - \right.\\
&\left. - mhS_2^2 - m\mu S_1^2 + \mu S_2 S_1^2 C_2 + S_2^2 S_1 C_1\right);\\
&Z = k\mu\left(m^5h^3\chi S_2C_1 - m^3h^3\chi S_2^3C_1 + m^3S_1^3C_2 + m^2h^2S_2^3S_1 - m^5h^2S_1C_2 - \right.\\
&\left. - m^2\chi S_1^3 S_2 + \chi S_1^3 S_2^3 - S_1^3 S_2^3\right);\\
&Q = 8km^3\left(S_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^2h^2\mu - m^2h^2 + h^2S_2^2 - \mu S_1^2\right);
\end{aligned}$$

где, $\mu = \rho_2\nu_2/\rho_1\nu_1$, $S_1 = \operatorname{sh} mh$, $C_1 = \operatorname{ch} mh$, $S_2 = \operatorname{sh} m$, $C_2 = \operatorname{ch} m$.

**Замечание 2.1.3.** Если в формуле, выражающей зависимость числа Марангони от физических параметров жидкости и геометрии контейнера в лемме 2.1.1 перейти к пределу при $g \to 0$, то получим выражение для M (2.1.32).

Для той же конфигурации жидкостей: муравьиная кислота и трансформаторное масло приведена зависимость спектрального параметра $\mathrm{M}(\alpha)$, следующая из формулы (2.1.32), при различных значениях $\delta_n$ (рисунок 3) и при различных значениях $h$ (рисунок 4).

Из рисуноках 3,4 видно, что с ростом номера корня функции Бесселя и с увеличением $h$, критическая температура на нижнем основании уменьшается по модулю, но, при этом, чем больше $\alpha$, тем меньше влияния оказывают рост номера корня функции Бесселя и увеличение $h$ на M.

**Замечание 2.1.4.** Если рассмотреть табл. 3 и рисунок 3, то увидим, что значение числа Марангони при $\mathrm{Ga} = 0.13$ совпадает со значением M на рисунке 3 при $\alpha = 1$, то есть имеет место указанный выше предельный переход при $g \to 0$.

## 2.2 Зависимость числа Марангони от геометрических параметров в случае однослойной жидкости

Предположим, что у нас имеется однослойная жидкость ($h_2 = 0$) с верхней свободной деформируемой границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Равновесное состояние системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в цилиндрической системе координат $r$, $z$ описывается уравнениями (2.1.1) - (2.1.3). На свободной границе $\Gamma$ ($z = 0$) справедливы следующие

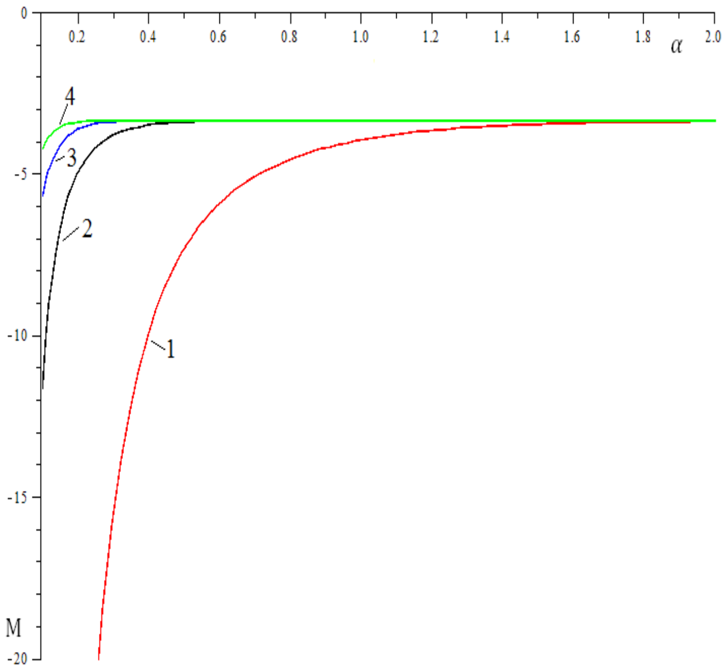


Рисунок 3. График зависимости числа Марангони от $\alpha$ при $\mathrm{We} = 10^4$, $h = 1$, кривая 1: $\delta_1 = 2.40482$; кривая 2: $\delta_3 = 8.654$; кривая 3: $\delta_5 = 14.9309$; кривая 4: $\delta_7 = 21.2116$.

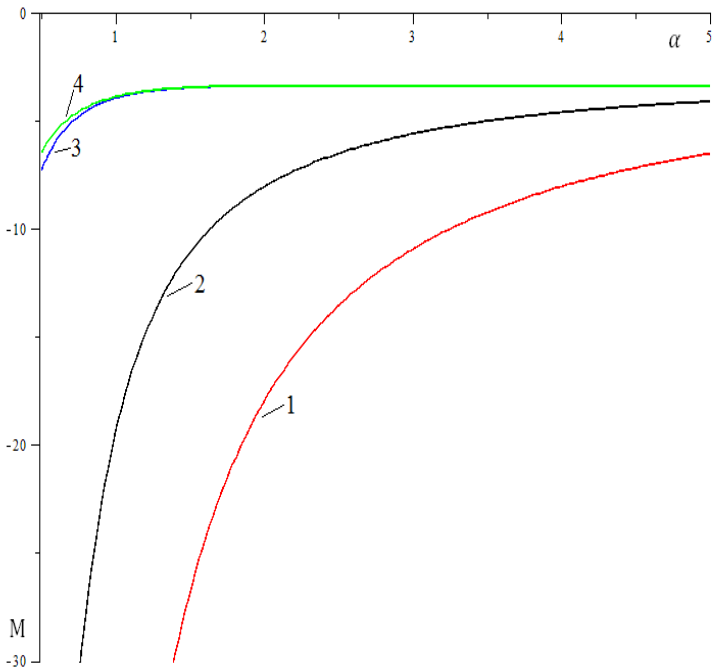


Рисунок 4. График зависимости числа Марангони от $\alpha$, $\delta_1 = 2.40482$, $\mathrm{We} = 10^4$, кривая 1: $h = 0.01$; кривая 2: $h = 0.1$; кривая 3: $h = 1$; кривая 4: $h = 10$.

условия [8]

$$k\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma\Theta = 0, \tag{2.2.1}$$

$$(p_{\mathrm{out}} - p)\boldsymbol{n} = \nabla_{11}\sigma, \qquad V_n = 0, \tag{2.2.2}$$

здесь $k$ — коэффициент теплопроводности; $\gamma$ — коэффициент межфазного теплообмена; $p_{\mathrm{out}}$ — постоянное давление окружающей среды; $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор нормали к $\Gamma$, направленный из $\Omega$; $V_n$ — скорость перемещения свободной границы в направлении $\boldsymbol{n}$. На нижнем основании цилиндра задаётся температура $\Theta_{1\mathrm{in}}$. Исходя из этого и из условия теплового контакта (2.2.1) температурные коэффициенты вычисляются следующим образом

$$A = -\frac{\mathrm{Bi}\Theta_1}{(1 + \mathrm{Bi})h}, \quad B = \frac{\Theta_1}{1 + \mathrm{Bi}}, \tag{2.2.3}$$

здесь $\Theta_1 = \Theta_{1\mathrm{in}} - \Theta_{\mathrm{out}}$; $\mathrm{Bi} = \gamma h/k$ — число Био. Заметим, что $\mathrm{Bi} \neq 0$, так как в противном случае получим, что $\Theta = \mathrm{const}$, то есть состояние равновесия и свободная поверхность будут изотермическими. В силу равенства (2.1.3) $\nabla_{11}\sigma = 0$ и с помощью первого равенства (2.2.2) давление квадратично зависит от $z$ и имеет вид

$$p = \rho_0 g\beta \left(\frac{A}{2}z^2 + Bz\right) + p_{\mathrm{out}}.$$

Аналогично, как и для случая двухслойной системы жидкостей, для определения критической разности температур на основаниях цилиндра рассматривается линеаризованная на равновесном состоянии задача о малых возмущениях системы в рамках модели Обербека-Буссинеска, решение которой ищется в виде нормальных волн. Сама задача для монотонных возмущений в безразмерных переменных описывается уравнениями

$$P_r = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + U_{zz} - \frac{1}{r^2}U, \tag{2.2.4}$$

$$P_z - \mathrm{G}T = W_{rr} + \frac{1}{r}W_r + W_{zz}, \tag{2.2.5}$$

$$U_r + \frac{U}{r} + W_z = 0, \tag{2.2.6}$$

$$W = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(T_{rr} + \frac{1}{r}T_r + T_{zz}\right), \tag{2.2.7}$$

На свободной границе выполняются следующие условия [8]

$$-P + 2W_z = (\mathrm{G}' + \mathrm{Ga}) + \mathrm{We}\left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r\right), \tag{2.2.8}$$

$$W_r + U_z = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Pr}}\left(N_r + T_r\right), \tag{2.2.9}$$

$$T_z + \mathrm{Bi}\left(T + N\right) = 0, \tag{2.2.10}$$

$$W = 0, \tag{2.2.11}$$

Условия на нижнем основании ($z = -1$) дают

$$U(r, -1) = W(r, -1) = 0, \quad T(r, -1) = 0. \tag{2.2.12}$$

На боковой поверхности ($r = 1/\alpha$, где $\alpha = h/R$) выполняются условия (2.1.21). Также выполняется условие сохранения объёма жидкости в сосуде.

Задача (2.2.4) - (2.2.12), (2.1.21) также решается методом разделения переменных (2.1.22) - (2.1.25). В результате получается однородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид (2.1.30). Далее, как и в случае двухслойной системы путём аналитических вычислений в системе Maple находим критические числа Марангони.

**Лемма 2.2.1.** Критические числа Марангони зависят от геометрии контейнера и физических параметров жидкости $M(\alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Ga}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Bi}, \delta_n)$ и определяются в явном виде.

Так как формула, выражающая данную зависимость имеет громоздкий вид, то для её анализа далее рассмотрена конкретнуая жидкость, а именно, когда в сосуде расположено трансформаторное масло, физические параметры которой были даны в предыдущем параграфе. Ниже приведён ряд таблиц, в которых можно проследить зависимость $\mathrm{M}(\delta_n, \alpha, \mathrm{Ga}, \mathrm{Bi}, \mathrm{We})$

Таблица 5. $\mathrm{We} = 129.58$, $\mathrm{Ga} = 29.25$, $\alpha = 1$, $\mathrm{Bi} = 2$

| $\delta_n$ | 2.40482 | 8.6537 | 14.9309 | 21.2116 | 27.493 |
|---|---|---|---|---|---|
| M | -145.65 | -737.56 | -2022.32 | -3938.8 | -6487 |

Таблица 6. $\mathrm{We} = 129.58$, $\mathrm{Ga} = 29.25$, $\delta_1 = 2.40482$, $\mathrm{Bi} = 2$

| $\alpha$ | 0.4 | 0.8 | 1 | 2 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | -195.1356 | -148.0515 | -145.65 | -269.32 | -894.12 | -5011.313 |

Таблица 7. $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = 129.58$, $\delta_1 = 2.40482$, $\alpha = 1$

| Ga | $2.925 \cdot 10^{-7}$ | $2.925 \cdot 10^{-3}$ | 0.2925 | 29.25 |
|---|---|---|---|---|
| M | -146.057 | -145.5103 | -145.5097 | -145.65 |

Таблица 8. $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{Ga} = 29.25$, $\delta_1 = 2.40482$, $\alpha = 1$

| We | 1.2958 | 12.958 | 129.58 | 1295.8 | 129580 |
|---|---|---|---|---|---|
| M | -87.3485 | -119.995 | -145.65 | -150.09375 | -150.6187 |

Таблица 9. $\mathrm{We} = 129.58$, $\mathrm{Ga} = 29.25$, $\delta_1 = 2.40482$, $\alpha = 1$

| Bi | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| M | -112.8857 | -145.65 | -243.9331 | -407.67 |

Из представленных данных можно сделать следующие выводы, а именно, что при увеличении номера корня функции Бесселя (табл. 5, здесь $n = 1, 3, 5, 7, 9$), при $\alpha \geqslant 1$ (табл. 6), при увеличении значения чисел Вебера и Био (табл. 8,9) критические числа Марангони возрастают по модулю. Увеличение Ga (табл. 7) приводит к незначительному понижению значения $|\mathrm{M}|$.

Приведённые результаты имеют место в области значения параметров Буссинеска $\beta\Theta_1$ и числа Грасгофа G для которых справедлива модель Обербека-Буссинеска [22]. Именно, $\beta\Theta_1 \to 0$, где $\Theta_1$ – характерная разность температур на нижней стенке цилиндра и воздуха, а число Грасгофа конечно. Так как коэффициент теплового расширения жидкости фиксирован ($\beta = 0.7 \cdot 10^{-3}$ K$^{-1}$), то чем меньше значение критической разности температур $\Theta_1$, тем меньше значения параметра $\beta\Theta_1$. Из формулы для числа Марангони находим $\Theta_1 = \rho_0\nu\chi(1+\mathrm{Bi})\mathrm{M}/æh\mathrm{Bi}$. Таким образом можно сделать вывод, что при фиксированной высоте цилиндра, значение $\Theta_1$ уменьшается при уменьшении значения M. Из входящих в таблицы результатов при максимальном по модулю критическом значении числа Марангони $|\mathrm{M}| = 6487$ (табл. 5 при $n = 9$) получим, что $\Theta_1 = 851$K, тогда параметр $\beta\Theta_1 \approx 0.596$, а $\mathrm{G} \approx 5.808$. При минимальном по модулю критическом значении числа Марангони $|\mathrm{M}| = 87.3485$ (табл. 6 при $\mathrm{We} = 1.2958$) имеем $\Theta_1 = 11.459$K, значит, параметр $\beta\Theta_1 \approx 0.008$, а $\mathrm{G} \approx 0.08$. Из формулы для $\Theta_1$ и полученных результатов из табл. 9 можно сделать вывод, что увеличивая высоту цилиндра, то есть чем больше We, тем меньше значение параметра Буссинеска. Заметим, что температура застывания трансформаторного масла от 208.15K до 228.15K, температура вспышки от 430.15K до 423.15K, а температура самовоспламнения 623.15 - 673.15K.

На основании выше изложенного можно сделать вывод о том, что для данной жидкости, чтобы $\beta\Theta_1 \to 0$ и при этом $\mathrm{G} \nrightarrow 0$ необходимо изменять геометрию контейнера, а именно уменьшать отношение высоты цилиндра к его радиусу (параметр $\alpha$), либо увеличивая только высоту, при фиксированном $\alpha$.

Если в формуле для спектрального параметра M, определяемого леммой 2.2.1 $g \to 0$, то в пределе получим результат

**Лемма 2.2.2.** В условии полной невесомости зависимость числа Марангони от геометрии контейнеров и физических параметров жидкости выражается следующим образом

$$\mathrm{M} = \frac{8m\,(\mathrm{Bi}\,\mathrm{sh}\,m + m\,\mathrm{ch}\,m)\,(m - \mathrm{sh}\,m\cosh m)}{m^3\,\mathrm{ch}\,m - \mathrm{sh}^3\,m - 8m^3\,\mathrm{ch}\,m\,(\mathrm{PrWe})^{-1}}. \qquad (2.2.13)$$

**Замечание 2.2.1** Если $R \to \infty$, $n \to \infty$ таким образом, что $m = h\delta_{0n}/R \to m_0 = const$, то выражение (2.2.13) в точности совпадает с числом Марангони для бесконечного слоя [52].

Далее, пусть в цилиндрическом контейнере расположено трансформаторное масло, физические параметры которого приведены выше.

На рисунках 5, 6 показана зависимость числа Марангони от физических параметров жидкости и геометрии контейнера при $0.1 \le \alpha \le 3$. На рисунке 5 кривые 1 – 5 показывают, что с ростом номера корня функции Бесселя, критическая температура на нижнем основании сосуда увеличивается по модулю. На рисунке 6, рассмотрев кривые 2 – 4, 6 можно сказать, что чем больше

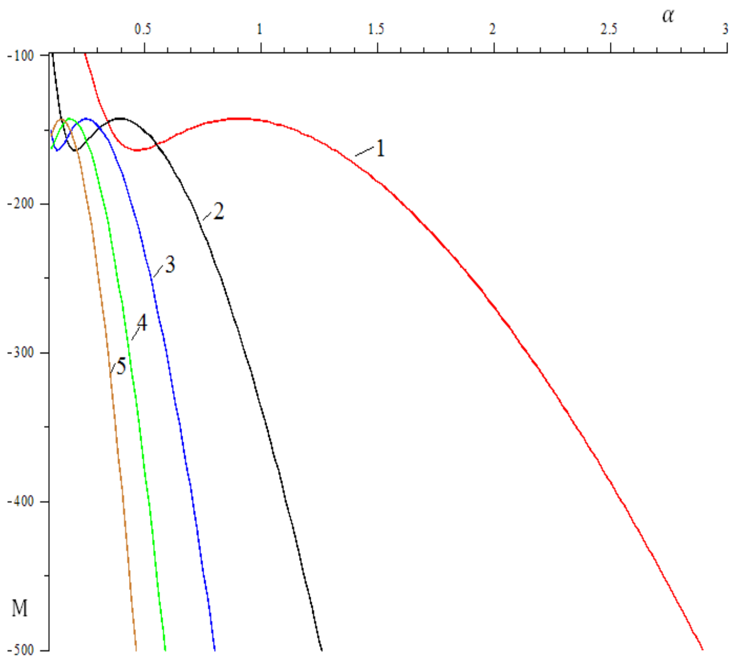


Рисунок 5. График зависимости числа Марангони от $\alpha$ при $\mathrm{We} = 10^4$ и $\mathrm{Bi} = 2$, кривая 1: $\delta_1 = 2.40482$; кривая 2: $\delta_2 = 5.52$; кривая 3: $\delta_3 = 8.654$; кривая 4: $\delta_4 = 11.7915$; кривая 5: $\delta_5 = 14.9309$.

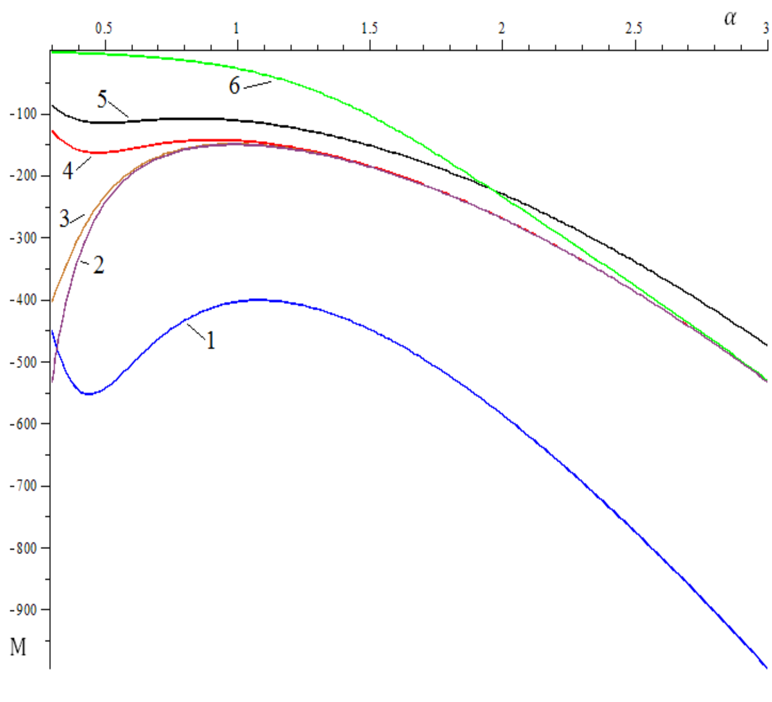


Рисунок 6. График зависимости числа Марангони от $\alpha$ при $\delta_1 = 2.4048$, кривая 1: $\mathrm{Bi} = 10$, $\mathrm{We} = 10^4$; кривая 2: $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = \infty$; кривая 3: $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = 10^5$; кривая 4: $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = 10^4$; кривая 5: $\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = 10^2$.

значение числа Вебера, тем значение числа Марангони по модулю больше, но, начиная с $\mathrm{We} = 10^5$, влияние данного параметра на M уменьшается. Также можно добавить, что с ростом $\alpha$ кривые 2 – 4, 6 стремятся к кривой 2. Рассмотрев остальные графики на рисунке 6, можно заметить, что с ростом числа Био, растёт критическая температура на нижнем основании по модулю.

Если сравнить полученные данные из таблицы 7 для $\mathrm{Ga} = 2.925 \cdot 10^{-7}$ и рисунок 5 (кривая 1), то можно увидеть, что при малых Ga значение числа Марангони, когда система находится в поле силы тяжести, совпадает со значением числа Марангони при $\mathrm{Ga} = 0$ (случай полной невесомости).

Таким образом, из всего выше представленного, можно сделать следующий вывод, что зная заранее геометрию контейнера, физические параметры жидкости, находящейся в нём, можно определить спектральный параметр – число Марангони, а по нему и критическую разность температур, при которой возникнет конвекция.

# 3 Априорные оценки сопряжённой задачи, описывающей осесимметричное термокапиллярное движение при малом числе Марангони с подвижной общей поверхностью раздела

В данной главе исследуется линейная задача об осесимметрическом термокапиллярном движении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. Их общая поверхность раздела является подвижной и недеформируемой. Задача является обратной, так как градиенты давлений есть искомые функции. Установлены априорные оценки. Доказано, что решение с ростом времени экспоненциально стремится к нулю.

## 3.1 Постановка задачи

Уравнения, описывающие осесимметричное движение вязкой теплопроводной жидкости в отсутствие массовых сил имеют вид (1), в которой $v = 0$, $\mathbf{g} = (0, 0, 0)$.

Система (1) допускает четырёхмерную подалгебру Ли $G_4 = \langle \partial_z, \partial_w + t\partial_z, \partial_p, \partial_\theta \rangle$ [10]. Инварианты подалгебры $G_4$ суть $t, r$ и частично инвариантные решения ранга 2 и дефекта 3 [42] системы (1) следует искать в виде

$$u = u(r,t), \quad w = w(r,z,t), \quad p = p(r,z,t), \quad \theta = \theta(r,z,t). \tag{3.1.1}$$

Подстановка выражений для $u$, $w$ и $p$ из (3.1.1) в уравнения движения (1) приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} w = v(r,t)z + g(r,t), \quad u_r + \tfrac{1}{r}\,u + v = 0, \\ v_t + uv_r + v^2 = \nu(v_{rr} + \tfrac{1}{r}\,v_r) + f(t), \\ \frac{1}{\rho}\,p = d(r,t) - \frac{f(t)}{2}z^2, \quad d_r = \nu(u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r - \frac{u}{r^2}) - u_t - uu_r, \\ g_t + ug_r + vg = 0 \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

с пока произвольной функцией $f(t)$.

Уравнение для температуры из (1) перепишется так

$$\theta_t + u(r,t)\theta_r + (v(r,t)z + g(r,t))\theta_z = \chi\Delta\theta.$$

Среди его решений имеются квадратичные относительно переменной $z$:

$$\theta(r,z,t) = a(r,t)z^2 + m(r,t)z + b(r,t). \tag{3.1.3}$$

Далее, для простоты предполагается, что $g(r,t) \equiv 0$, $m(r,t) \equiv 0$. Последнее означает, что в точке $z = 0$ температура экстремальная: при $a(r,t) < 0$ она имеет максимум, а при $a(r,t) > 0$ – минимум.

Применим решения (3.1.2), (3.1.3) для описания двухслойного движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой стенкой $r = R_2 =$ const и общей поверхностью раздела $r = h(z,t)$, $0 < h(z,t) < R_2$, (рисунок 7).

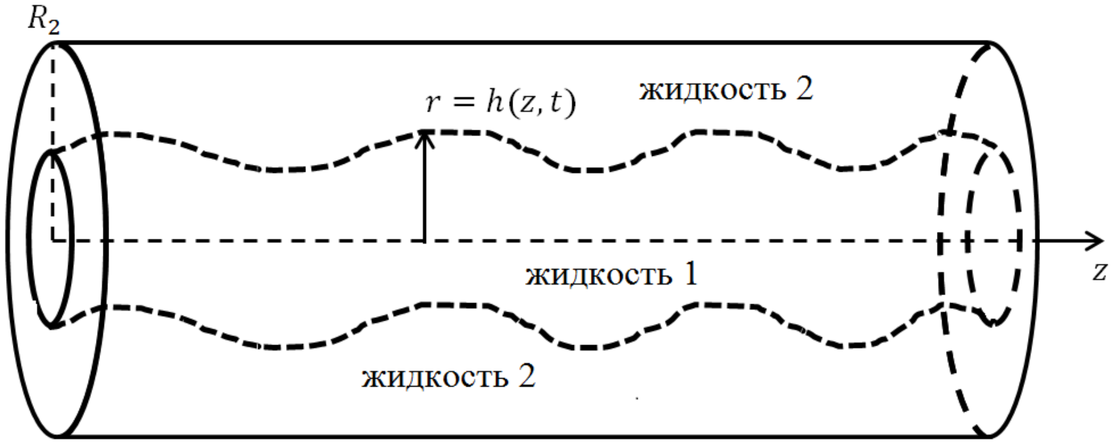


Рисунок 7. Схема области движения

Введём индекс $j = 1, 2$, фиксирующий жидкость. Тогда в области $0 < r < h(z,t)$ функции $v_1(r,t)$, $u_1(r,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} v_{1t} + u_1 v_{1r} + v_1^2 = \nu_1(v_{1rr} + \tfrac{1}{r}\, v_{1r}) + f_1(t), \\ u_{1r} + \tfrac{1}{r}\, u_1 + v_1 = 0. \end{gathered} \tag{3.1.4}$$

При этом

$$\frac{1}{\rho_1} p_1 = d_1(r,t) - \frac{f_1(t)}{2} z^2, \quad d_{1r} = \nu_1(u_{1rr} + \frac{1}{r}\, u_{1r} - \frac{u_1}{r^2}) - u_{1t} - u_1 u_{1r}. \tag{3.1.5}$$

Точно также, в области $h(z,t) < r < R_2$

$$\begin{gathered} v_{2t} + u_2 v_{2r} + v_2^2 = \nu_2(v_{2rr} + \tfrac{1}{r}\, v_{2r}) + f_2(t), \\ u_{2r} + \tfrac{1}{r}\, u_2 + v_2 = 0. \end{gathered} \tag{3.1.6}$$

$$\frac{1}{\rho_2} p_2 = d_2(r,t) - \frac{f_2(t)}{2} z^2, \quad d_{2r} = \nu_2(u_{2rr} + \frac{1}{r}\, u_{2r} - \frac{u_2}{r^2}) - u_{2t} - u_2 u_{2r}. \tag{3.1.7}$$

Кроме того, в тех же областях определения

$$a_{jt} + 2v_j a_j + v_j a_{jr} = \chi_j(a_{jrr} + \frac{1}{r}\, a_{jr}), \tag{3.1.8}$$

$$b_{jt} + u_j b_{jr} = \chi_j(b_{jrr} + \frac{1}{r}\, b_{jr}) + 2\chi_j a_j. \tag{3.1.9}$$

На поверхности раздела $r = h(z,t)$ выполнены условия сопряжения (4) и равенства температур (8), и потоков тепла (25), которые в нашем случае, с учётом (3.1.3) запишутся так

$$v_1(h(z,t),t) = v_2(h(z,t),t), \quad u_1(h(z,t),t) = u_2(h(z,t),t), \tag{3.1.10}$$

$$a_1(h(z,t),t) = a_2(h(z,t),t), \quad k_1\frac{\partial a_1}{\partial n}(h(z,t),t) = k_2\frac{\partial a_2}{\partial n}(h(z,t),t), \tag{3.1.11}$$

$$b_1(h(z,t),t) = b_2(h(z,t),t), \quad k_1\frac{\partial b_1}{\partial n}(h(z,t),t) = k_2\frac{\partial b_2}{\partial n}(h(z,t),t), \tag{3.1.12}$$

где $k_1$, $k_2$ — постоянные коэффициенты теплопроводности жидкостей, нормаль к поверхности $r = h(z,t)$ в цилиндрической системе координат есть $\mathbf{n} = (1 + h_z^2)^{-1/2}(1, 0, -h_z)$.

Дополнительно на поверхности раздела выполнены ещё два условия: (21) – динамическое

$$(p_2 - p_1)\mathbf{n} + 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_1) - \mu_2 D(\mathbf{u}_2)] = 2\sigma K\mathbf{n} + \nabla_{11}\sigma \tag{3.1.13}$$

и кинематическое (2)

$$h_t + z v_1(h(z,t),t) h_z = u_1(h(z,t),t). \tag{3.1.14}$$

Граничные условия на твёрдой стенке $r = R_2$ таковы:

$$u_2(R_2,t) = 0, \quad v_2(R_2,t) = 0, \tag{3.1.15}$$

$$a_2(R_2,t) = \alpha(t), \quad b_2(R_2,t) = \beta(t), \tag{3.1.16}$$

с заданными функциями $\alpha(t)$, $\beta(t)$.

Начальные данные для скоростей — нулевые, поскольку рассматривается чисто термокапиллярное движение жидкостей за счёт изменения температуры вдоль твёрдой стенки, то есть функций (3.1.16):

$$u_j(r,t) = 0, \quad v_j(r,t) = 0. \tag{3.1.17}$$

Кроме того

$$h(z,0) = R_1 = \mathrm{const} > 0, \quad 0 < R_1 < R_2 \tag{3.1.18}$$

$$a_j(r,0) = a_j^0(r), \quad b_j(r,0) = b_j^0(r) \tag{3.1.19}$$

и функции $u_1(r,t)$, $v_1(r,t)$, $a_1(r,t)$, $b_1(r,t)$ ограничены при $r = 0$.

Конечно, для гладких решений начальные данные должны быть согласованными. Эти условия будут выписаны ниже для более простой задачи.

Отметим, что поставленная задача является сильно нелинейной и обратной, поскольку наряду с $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$, $b_j(r,t)$, $h(z,t)$ функции $f_j(t)$ также являются искомыми. Действительно, если из вторых уравнений (3.1.4), (3.1.6) исключить $u_j(r,t)$, то получим сопряжённую задачу для нахождения функций $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$ и $h(z,t)$. При известных $u_j(r,t)$, $a_j(r,t)$ задача для функций $b_j(r,t)$ отделяется. Функции $d_j(r,t)$ восстанавливаются квадратурами из (3.1.5), (3.1.7). Проекция динамического условия (3.1.13) на нормаль и второе условие (3.1.10) дают возможность найти функции $f_j(t)$.

Предположим, что в начальный момент времени поверхность раздела была круглым цилиндром: $R_1 = h(z,0) = \text{const},\ \ 0 < R_1 < R_2$. Введём характерные масштабы длины, времени функций $v_j$, $u_j$, $a_j$, $d_j$, $f_j$, $b_j$, соответственно,

$$R_1, \quad \frac{R_1^2}{\chi_1}, \quad \frac{\text{æ} a^1 R_1^2}{\mu_1}, \quad a^1, \quad \frac{\text{æ} a^1 R_1}{\rho_1}, \quad \frac{\text{æ} a^1}{\rho_1 R_1}, \quad a^1 R_1^2, \tag{3.1.20}$$

здесь $a^1 = \max\limits_{t\in[0,T]} |\alpha(t)|$. Функция $\alpha(t)$ по физическому смыслу ограничена для всех $t$ из отрезка $[0,T]$, где $T$ — время существования $\alpha(t)$, а величина $a^1 R_2^2$ есть характерная температура вдоль твёрдой стенки.

В безразмерных переменных в уравнениях (3.1.4), (3.1.6), (3.1.8), (3.1.9) при нелинейных слагаемых появится сомножитель

$$\mathrm{M} = \frac{\text{æ} a^1 R_1^3}{\mu_1 \chi_1} \, - \tag{3.1.21}$$

число Марангони. Кинематическое условие (3.1.14) примет вид

$$\bar h_{\bar t} + \bar z \mathrm{M} \bar v_1(\bar h(\bar z, \bar t), \bar t) \bar h_{\bar z} = \mathrm{M} \bar u_1(\bar h(\bar z,\bar t), \bar t), \tag{3.1.22}$$

где черта означает безразмерную величину. Положив $\bar h = 1 + \mathrm{M}\bar h_1(\bar z, \bar t)$ при $\mathrm{M} \ll 1$ (ползущее термокапиллярное движение), из (3.1.22) в пределе находим уравнение

$$\bar h_{1\bar t} = \bar u_1(1, \bar t), \tag{3.1.23}$$

и уравнения (3.1.4), (3.1.6), (3.1.8), (3.1.9) будут линейными. В размерных переменных в этом случае поверхность раздела есть

$$r = h(t) = R_1[1 + \mathrm{M} h_1(t)]. \tag{3.1.24}$$

Поэтому при $\mathrm{M} \to 0$ нормаль $\mathbf{n} = (1,0,0)$ и $\partial/\partial n = \partial/\partial r$. Нормальная составляющая динамического условия даёт соотношение

$$\mathrm{M}[\frac{\rho_2}{\rho_1}\bar d_2 - \bar d_1 + (\frac{1}{2}\bar f_1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}\bar f_2 + \bar a_1)\bar z^2 + 2\bar u_{1\bar r} - \frac{2\mu_2}{\mu_1}\bar u_{2\bar r}] = \mathrm{We} - \mathrm{M}\bar b_1, \tag{3.1.25}$$

где $\mathrm{We} = \sigma^0 R_1/\mu_1\chi_1$ — число Вебера. Ясно, что при наших условиях должно быть $\mathrm{We} = O(\mathrm{M})$.

Касательная составляющая динамического условия (3.1.13) в сделанных предположениях даст соотношение

$$\mathrm{M}(\bar{v}_{1\bar{r}} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{v}_{2\bar{r}}) = -2\mathrm{M}\bar{a}_1. \tag{3.1.26}$$

Сокращая в (3.1.26) на M и возвращаясь к исходным размерным переменным, приходим к следующей линейной сопряжённой обратной начально-краевой задаче

$$v_{1t} = \nu_1(v_{1rr} + \frac{1}{r}\,v_{1r}) + f_1(t), \quad 0 < r < R_1 + \mathrm{M}h_1(t), \tag{3.1.27}$$

$$v_{2t} = \nu_2(v_{2rr} + \frac{1}{r}\,v_{2r}) + f_2(t), \quad R_1 + \mathrm{M}h_1(t) < r < R_2, \tag{3.1.28}$$

$$v_1(R_1,t) = v_2(R_1,t), \quad \int\limits_0^{R_1} rv_1(r,t)dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} rv_2(r,t)dr = 0 \tag{3.1.29}$$

$$\mu_1 v_{1r}(R_1,t) - \mu_2 v_{2r}(R_1,t) = -2æ a_1(R_1,t), \tag{3.1.30}$$

$$v_2(R_2,t) = 0, \tag{3.1.31}$$

$$v_1(r,0) = 0, \quad |v_1(0,t)| < \infty, \quad v_2(r,0) = 0, \tag{3.1.32}$$

$$\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t) - \frac{2æ a_1(R_1,t)}{R_1}. \tag{3.1.33}$$

Задача для функций $a_j(r,t)$ является замкнутой:

$$a_{jt} = \chi_j(a_{jrr} + \frac{1}{r}\,a_{jr}), \tag{3.1.34}$$

$$a_j(r,0) = a_j^0(r), \quad |a_1(0,t)| < \infty, \tag{3.1.35}$$

$$a_2(R_2,t) = \alpha(t), \tag{3.1.36}$$

$$a_1(R_1,t) = a_2(R_1,t), \quad k_1 a_{1r}(R_1,t) = k_2 a_{2r}(R_2,t). \tag{3.1.37}$$

Функции $u_j(r,t)$ определяются равенствами

$$u_1(r,t) = -\frac{1}{r}\int\limits_0^r rv_1(r,t)dr, \quad u_2(r,t) = -\frac{1}{r}\int\limits_{R_2}^r rv_2(r,t)dr. \tag{3.1.38}$$

С учётом (3.1.38) функция $h_1(t)$ находится из (3.1.23), именно

$$h_1(t) = -\frac{1}{R_1}\int\limits_0^t rv_1(R_1,t)dt. \tag{3.1.39}$$

Наконец, из (3.1.17) в размерных переменных получим

$$\rho_2 d_2(R_1,t) - \rho_1 d_1(R_1,t) + 2\mu_1 u_{1r}(R_1,t) - 2\mu_2 u_{2r}(R_1,t) = \\ = \frac{\sigma^0}{R_1} - \frac{æ}{R_1} b_1(R_1,t). \tag{3.1.40}$$

Равенство (3.1.40) позволяет определить одну из функций времени. возникающей при определении, например, $d_2$ из соотношения (3.1.7)

**Замечание 3.1.1.** Второе равенство (3.1.29) и конечное соотношение (3.1.33) позволяют найти градиенты давлений вдоль оси $z$ — функции $f_j(t)$.

## 3.2 Оценки функций $a_j(r,t)$

Поскольку функция $a_1(R_1,t)$ входит в постановку задачи для $v_j(r,t)$, то необходимо начать с оценки $a_j(r,t)$, удовлетворяющим начально-краевой задаче (3.1.34) – (3.1.37). Для гладких решений должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{gathered} a_2^0(R_2) = \alpha(0), \quad a_1^0(R_1) = a_2^0(R_1), \\ k_1 a_{1r}^0(R_1) = k_2 a_{2r}^0(R_1), \quad |a_1^0(0)| < \infty. \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

Произведём замену

$$a_2(r,t) = \bar{a}_2(r,t) + \frac{\alpha(t)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}\,. \tag{3.2.2}$$

Тогда граничное условие (3.1.16) для функции $\bar{a}_2(r,t)$ становится однородным и она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\bar{a}_{2t} - \chi_2\left(\bar{a}_{2rr} + \frac{1}{r}\,\bar{a}_{2r}\right) = \frac{2\chi_2\alpha(t)}{(R_2-R_1)^2}\,\left(2 - \frac{R_1}{r}\right) - \\ - \frac{\alpha'(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2} \equiv g_2(r,t), \tag{3.2.3}$$

где штрих означает дифференцирование по $t$. Что касается условий (3.1.37) на поверхности раздела, то они остаются без изменений для $\bar{a}_2(r,t)$, $a_1(r,t)$.

Умножим уравнение (3.1.34) ($j=1$) на $\rho_1 c_{p_1} r a_1(r,t)$, уравнение (3.2.3) на $\rho_2 c_{p_2} r a_2(r,t)$, где $c_{p_j}$ — удельные теплоёмкости жидкостей при постоянном давлении. Затем, интегрируя их по областям определения и складывая, приходим к интегральному равенству ($k_j = \rho_j c_{p_j}\chi_j$)

$$\frac{d}{dt}\,A + k_1\int\limits_0^{R_1} r a_{1r}^2\,dr + k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2r}^2\,dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2 g_2(r,t)\,dr \tag{3.2.4}$$

с функцией

$$A(t)=\frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} r a_1^2(r,t)\,dr+\frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2^2(r,t)\,dr. \tag{3.2.5}$$

Области, в которых ищутся решения уравнений (3.1.34) таковы: $0 < r < R_1+\mathrm{M}h_1(t)$ при $j=1$ и $R_1+\mathrm{M}h_1(t) < r < R_2$ при $j=2$. Однако, интегралы

$$\int\limits_0^{R_1+\mathrm{M}h_1(t)} m^2(r,t)dr\sim\int\limits_0^{R_1} m^2(r,t)dr,\quad \int\limits_{R_1+\mathrm{M}h_1(t)}^{R_2} m^2(r,t)dr\sim\int\limits_{R_1}^{R_2} m^2(r,t)dr,\quad \mathrm{M}\to 0,$$

поэтому в (3.2.4), (3.2.5) и всюду ниже фактически интегрирование ведётся по фиксированным отрезкам. Имеет место неравенство [3]

$$\int\limits_0^{R_1} r a_1^2\,dr+\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2^2\,dr\leqslant M_0\Bigg(k_1\int\limits_0^{R_1} r a_{1r}^2\,dr+k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2r}^2\,dr\Bigg) \tag{3.2.6}$$

с положительной постоянной $M_0=R_1^2/k_1x_0^2$, где $x_0$ — наименьший положительный корень трансцендентного уравнения [3]

$$\begin{gathered}J_0(x)[J_1(\gamma_2 x)Y_0(\gamma_1\gamma_2 x)-J_0(\gamma_1\gamma_2 x)Y_1(\gamma_2 x)]+\\ +\gamma_2 J_1(x)[J_0(\gamma_1\gamma_2 x)Y_0(\gamma_2 x)-J_0(\gamma_2 x)Y_0(\gamma_1\gamma_2 x)]=0,\end{gathered} \tag{3.2.7}$$

$\gamma_1=R_2/R_1$; $\gamma_2=\sqrt{k_1/k_2}=\sqrt{k}$; $J_i$, $Y_i$ $(i=1,2)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

Используя неравенство (3.2.6), получим, что левая часть равенства (3.2.4) больше или равна

$$\frac{d}{dt}A+\frac{1}{M_0}\Bigg(\int\limits_0^{R_1} r a_1^2\,dr+\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2^2\,dr\Bigg). \tag{3.2.8}$$

Для правой части имеем оценку сверху

$$\begin{aligned}&\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2 g_2\,dr\leqslant\Bigg(\int\limits_{R_1}^{R_2} r g_2^2\,dr\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2^2\,dr\Bigg)^{1/2}\leqslant\\ &\qquad\leqslant\max_j\left(\frac{2}{\rho_j c_{p_j}}\right)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{R_1}^{R_2} r g_2^2\,dr\Bigg)^{1/2}\sqrt{A}\equiv G(t)\sqrt{A}\,.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Теперь из (3.2.8) и (3.2.9) получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\,A + 2\eta A \leqslant G(t)\sqrt{A}, \quad \eta = \frac{1}{M_0}\,\min_j\left(\frac{1}{\rho_j c_{p_j}}\right) = \frac{1}{M_0}\,\min_j\left(\frac{\chi_j}{k_j}\right). \tag{3.2.10}$$

Из (3.2.10) следует оценка

$$A(t) \leqslant \left(\sqrt{A_0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t G(\tau)e^{\eta\tau}d\tau\right)^2 e^{-2\eta t}, \tag{3.2.11}$$

здесь $A_0$ — значение функции $A(t)$ при $t = 0$:

$$\begin{gathered} A(0) = \frac{\rho_1 c_{p_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} r(a_1^0)^2(r)\,dr + \frac{\rho_2 c_{p_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}_2^0)^2(r)\,dr, \\ \bar{a}_2^0(r) = a_2^0(r) - \frac{\alpha_0(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}\,, \quad \alpha_0 = \alpha(0). \end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Поэтому из (3.2.5)

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{R_1} ra_1^2(r)\,dr \leqslant \frac{2}{\rho_1 c_{p_1}}\,A(t), \\ \int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_2^2(r)\,dr \leqslant \frac{2}{\rho_2 c_{p_2}}\,A(t). \end{gathered} \tag{3.2.13}$$

Докажем ограниченность интегралов

$$\int\limits_0^{R_1} ra_{1r}^2\,dr, \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2r}^2\,dr. \tag{3.2.14}$$

Для этого возведём уравнения (3.1.34) ($j = 1$), (3.2.3) в квадрат, затем умножим их последовательно на $\rho_1 c_{p_1} r$, $\rho_2 c_{p_2} r$, проинтегрируем по их областям определения и по времени, результаты сложим. Получим другое интегральное тождество

$$\begin{gathered} \rho_1 c_{p_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1} r\left[a_{1t}^2 + \chi_1^2\left(a_{1rr} + \frac{1}{r}\,a_{1r}\right)^2\right]dr\,dt + \\ + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\left[\bar{a}_{2t}^2 + \chi_2^2\left(\bar{a}_{2rr} + \frac{1}{r}\,\bar{a}_{2r}\right)^2\right]dr\,dt + k_1\int\limits_0^{R_1} ra_{1r}^2\,dr + k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2r}^2\,dr = \\ = k_1\int\limits_0^{R_1} r(a_{1r}^0)^2\,dr + k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}_{2r}^0)^2\,dr + \rho_2 c_{p_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} rg_2(r,t)\,dr\,dt \equiv A_1(t), \end{gathered} \tag{3.2.15}$$

откуда и следует ограниченность интегралов (3.2.14) $\forall t \in [0, T]$.

Далее, с учётом (3.2.13), (3.2.15),

$$\bar{a}_2^2(r,t) = \left| \int\limits_r^{R_2} (\bar{a}_2^2)_r \, dr \right| \leqslant 2 \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \sqrt{r}\, |\bar{a}_2| \sqrt{r}\, |\bar{a}_{2r}| \, dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{R_1} \left( \int\limits_{R_1}^{R_2} r \bar{a}_2^2 \, dr \right)^{1/2} \left( \int\limits_{R_1}^{R_2} r a_{2r}^2 \, dr \right)^{1/2} \leqslant \frac{4}{R_1} \left( \frac{1}{k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A(t) A_1(t) \right)^{1/2}. \quad (3.2.16)$$

Значит

$$|\bar{a}_2(r,t)| \leqslant 2 \left( \frac{1}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A(t) A_1(t) \right)^{1/4} \quad (3.2.17)$$

равномерно для любых $r \in [R_1, R_2]$, $t \in [0, T]$.

Из замены (3.2.2) находим оценку

$$|a_2(r,t)| \leqslant |\alpha(t)| + 2 \left( \frac{1}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A(t) A_1(t) \right)^{1/4}. \quad (3.2.18)$$

**Замечание 3.2.1.** Если продифференцировать по времени уравнения (3.1.34) ($j = 1$), (3.2.3) и граничные условия, то точно так же получим оценку

$$|a_{2t}(r,t)| \leqslant |\alpha'(t)| + 2 \left( \frac{1}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A_2(t) A_3(t) \right)^{1/4}, \quad (3.2.19)$$

где функция $A_2(t)$ отличается от $A(t)$ тем, что в формуле (3.2.5) $a_1(r,t)$, $\bar{a}_2(r,t)$ надо заменить на $a_{1t}(r,t)$, $\bar{a}_{2t}(r,t)$. Аналогичные отличия имеет функция $A_3(t)$ от $A_1(t)$.

Точно также

$$|a_{2tt}(r,t)| \leqslant |\alpha''(t)| + 2 \left( \frac{1}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A_4(t) A_5(t) \right)^{1/4}. \quad (3.2.20)$$

Здесь функция $A_4(t)$ отличается от $A(t)$ тем, что в (3.2.5) вместо $a_1(r,t)$, $\bar{a}_2(r,t)$ будут их вторые производные по времени. Функция $A_5(t)$ вполне аналогична $A_1(t)$, однако $g_2(r,t)$ из (3.2.3) будет содержать вместо $\alpha(t)$ её вторую производную $\alpha''(t)$, а вместо $\alpha'(t)$ её третью производную $\alpha'''(t)$. Оценки (3.2.19) и (3.2.20) нам понадобятся позднее в пункте 4. Там же будут приведены выражения для $A_k(t)$, $k = 2, 3, 4, 5$; здесь же отметим, что эти функции непрерывны при $t \in [0, T]$, если таковыми являются функции $\alpha^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, 3$. Кроме того $A_2(t)$, $A_4(t)$ удовлетворяют неравенствам вида (3.2.11) со своими функциями $G(t)$.

Однако подобные рассуждения не годятся для оценки $|a_1(r,t)|$. Поступим следующим образом: из неравенства (3.2.18) и первого равенства (3.1.37) имеем оценку

$$|a_1(R_1,t)| = |a_2(R_1,t)| \leqslant |\alpha(t)| + 2\left(\frac{1}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} A(t) A_1(t)\right)^{1/4}. \qquad (3.2.21)$$

Для $a_1(r,t)$ получим задачу при $0 < r < R_1$

$$a_{1t} = \chi_1 \left(a_{1rr} + \frac{1}{r}\, a_{1r}\right); \qquad (3.2.22)$$

$$a_1(R_1,t) = a_2(R_1,t), \quad |a_1(0,t)| < \infty; \qquad (3.2.23)$$

$$a_1(r,0) = a_1^0(r). \qquad (3.2.24)$$

Начально-краевая задача для уравнения (3.2.22) – (3.2.24) при заданной $a_1(R_1,t)$ с оценкой (3.2.21) имеет решение [11]

$$a_1(r,t) = \frac{2\chi_1}{R_1^2} \int\limits_0^t a_1(R_1,\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n J_0(\xi_n r/R_1)}{J_1(\xi_n)} \exp\left[-\frac{\chi_1 \xi_n^2 (t-\tau)}{R_1^2}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{2}{R_1^2} \int\limits_0^{R_1} \zeta a_1^0(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r/R_1) J_0(\xi_n \zeta/R_1)}{J_1^2(\xi_n)} \exp\left(-\frac{\chi_1 \xi_n^2 t}{R_1^2}\right) d\zeta, \qquad (3.2.25)$$

где $\xi_n$ — корни уравнения $J_0(\xi) = 0$. Из оценки (3.2.21) и формулы (3.2.25) следует ограниченность $|a_1(r,t)|$ для всех $r \in [0,R_1]$ и $t \in [0,T]$. Действительно, первое слагаемое в (3.2.25) не превосходит

$$2\left[\max_{t\in[0,T]} |\alpha(t)| + \frac{1}{(R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2})^{1/4}} \max_{t\in[0,T]} (A(t)A_1(t))^{1/4}\right]. \qquad (3.2.26)$$

Использовано неравенство (3.2.21) и соотношение [6, с. 690]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r/R_1)}{\xi_n J_1(\xi_n)} = \frac{1}{2} \quad 0 \le r < R_1. \qquad (3.2.27)$$

Второе слагаемое в (3.2.25) не превосходит

$$\max_{r\in[0,R_1]} |a_1^0(r)|. \qquad (3.2.28)$$

Нами доказана

**Лемма 3.2.1.** Решение начально-краевой задачи (3.1.34) – (3.1.37) ограничено для всех $r \in [0, R_1]$ $(j = 1)$ и $r \in [R_1, R_2]$ $(j = 2)$, и $t \in [0, T]$ и справедливы оценки

$$|a_1(r,t)| \leqslant 2\left[\max_{t\in[0,T]}|\alpha(t)| + \frac{1}{(R_1^2 k_2\rho_2 c_{\rho_2})^{1/4}}\max_{t\in[0,T]}(A(t)A_1(t))^{1/4}\right] + \max_{r\in[0,R_1]}|a_1^0(r)|. \tag{3.2.29}$$

$$|a_2(r,t)| \leqslant |\alpha(t)| + 2\left(\frac{1}{R_1^2 k_2\rho_2 c_{\rho_2}}A(t)A_1(t)\right)^{1/4}.$$

## 3.3 Оценки функций $v_j(r,t)$

Перейдём к получению априорных оценок функций $v_j(r,t)$, удовлетворяющих уравнениям (3.1.27), (3.1.28), граничным условиям (3.1.29) – (3.1.31) и начальным данным (3.1.32). Для того, чтобы сделать граничное условие (3.1.30) однородным, произведём замену функции $v_2(r,t)$, именно, положим,

$$v_2(r,t) = \bar{v}_2(r,t) - \frac{2\text{æ} a_1(R_1,t)}{\mu_2}P_4(r). \tag{3.3.1}$$

Полином четвёртого порядка $P_4(r)$ удовлетворяет условиям: 1) $P_4(R_1) = 0$, $P_4(R_2) = 0$; 2) $dP_4/dr = 1$ при $r = R_1$; 3) $\int_{R_1}^{R_2} rP_4(r)dr = 0$. В качестве такого полинома берём

$$P_4(r) = \frac{1}{R_1^2(R_1 - R_2)}(r^2 - (R_1+R_2)r + R_1R_2)(r^2 + C_1r + C_2) \tag{3.3.2}$$

с постоянными

$$C_1 = -\frac{(R_1+R_2)(2R_1^2 + 2R_2^2 + R_1R_2)}{(R_2 - R_1)(3R_2 + 2R_1)}, \quad C_2 = -R_1C_1. \tag{3.3.3}$$

Кратко поясним построение полинома $P_4(r)$. Из условия 1) вытекает, что $P_4 = g(R_1,R_2) \times (r-a)(r-b)(r^2 + C_1r + C_2)$. При выборе $g(R_1,R_2) = [R_1^2(R_1 - R_2)]^{-1}$ из условия 2) выводим равенство $R_1C_1 + C_2 = 0$. Из равенства 3) следует ещё одно уравнение на $C_1$ и $C_2$:

$$(3R_1^2 + 3R_2^2 + 4R_1R_2)C_1 + 5(R_1+R_2)C_2 = -(R_1+R_2)(2R_1^2 + 2R_1^2 + R_2R_1),$$

откуда и следуют формулы (3.3.3)

При замене (3.3.1) граничные условия (3.1.29), (3.1.31) останутся прежними (конечно, вместо $v_2$ надо взять $\bar{v}_2$). Уравнение на $\bar{v}_2(r,t)$ будет неоднородным

$$\bar{v}_{2t} = \nu_2(\bar{v}_{2rr} + \frac{1}{r}\bar{v}_{2r}) - \frac{2\nu_2\text{æ}}{\mu_2}a_1(R_1,t)(P_{4rr} + \frac{1}{r}P_{4r}) + \frac{2\text{æ}}{\mu_2}a_{1t}(R_1,t)P_4(r) +$$
$$+ f_2(t) \equiv \nu_2(\bar{v}_{2rr} + \frac{1}{r}\bar{v}_{2r}) + f_2(t) + Q_2(r,t). \tag{3.3.4}$$

Учитывая третье условие (3.1.32) находим для функции $\bar{v}_2$ начальные данные:

$$\bar{v}_2(r,0) = \frac{2æ}{\mu_2} a_1^0(R_1) P_4(r) \equiv \bar{v}_2^0(r). \tag{3.3.5}$$

Умножим уравнение (3.1.27) на $\rho_1 r v_1$, уравнение (3.3.4) на $\rho_2 r v_2$, проинтегрируем их по областям определения и результаты сложим:

$$\frac{dE}{dt} + \mu_1 \int\limits_0^{R_1} r v_{1r}^2 dr + \mu_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r \bar{v}_{2r}^2 dr = \rho_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r \bar{v}_2 Q_2 dr - \frac{2æ a_1(R_1,t)}{R_1} \int\limits_0^{R_1} r v_1 dr, \tag{3.3.6}$$

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int\limits_0^{R_1} r v_1^2 dr + \frac{\rho_2}{2} \int\limits_{R_1}^{R_2} r \bar{v}_2^2 dr.$$

При выводе тождества (3.3.6) были использованы первое условие (3.1.29), (3.1.30), (3.1.31), а также равенство (3.1.33).

Левая часть (3.3.6) больше или равна

$$\frac{dE}{dt} + \frac{1}{M} \left( \int\limits_0^{R_1} r v_1^2 dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} r \bar{v}_{2r}^2 dr \right) \tag{3.3.7}$$

с постоянной $M = R_1^2 (\mu_1 x_0^2)^{-1}$, где $x_0$ — наименьший положительный корень известного трансцендентного уравнения (3.2.7) с $\gamma_2 = \sqrt{\mu_1/\mu_2} = \sqrt{\mu}$.

Правая часть (3.3.6) не превосходит

$$\left[ \sqrt{2\rho_2} \left( \int\limits_{R_1}^{R_2} r Q_2^2 dr \right)^{1/2} + \frac{2æ}{\sqrt{\rho_1}} |a_1(R_1,t)| \right] \sqrt{E(t)}. \tag{3.3.8}$$

Из (3.3.7) и (3.3.8) получим неравенство

$$\frac{dE}{dt} + 2\delta E \le 2\sqrt{E} \left[ \sqrt{\frac{\rho_2}{2}} \left( \int\limits_{R_1}^{R_2} r Q_2^2 dr \right)^{1/2} + \frac{æ}{\sqrt{\rho_1}} |a_1(R_1,t)| \right] \equiv 2\sqrt{E} H_1(t) \tag{3.3.9}$$

с постоянной $\delta = M^{-1} \min(\rho_1^{-1}, \rho_2^{-1})$. Из (3.3.9) находим оценку величины $E(t)$:

$$E(t) \le \left[ \sqrt{E(0)} + \int\limits_0^t H_1(\tau) e^{\delta\tau} d\tau \right]^2 e^{-2\delta t}, \tag{3.3.10}$$

где, согласно первому равенству (3.1.32) и (3.3.5),

$$E(0) = \frac{\rho_2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_2^0(r)dr = \frac{2æ^2\rho_2}{\mu_2^2}(a_1^0(R_1))^2\int\limits_{R_1}^{R_2} rP_4^2(r)dr. \qquad (3.3.11)$$

Таким образом, из (3.3.10) следуют оценки величин $v_1$ и $\bar{v}_2$ в $L_2$-нормах $\forall t \in [0,T]$, где определены $\alpha(t)$ и $\alpha^{'}(t)$.

Для оценки производных $v_{1r}$, $\bar{v}_{2r}$ в $L_2$-нормах умножим уравнение (3.1.27) на $\rho_1 r v_{1t}$, уравнение (3.3.4) — на $\rho_2 r\bar{v}_{2t}$, проинтегрируем по их областям определения и результаты сложим, получим ещё одно тождество

$$\rho_1\int\limits_0^{R_1} v_{1t}^2dr + \rho_2\int\limits_{R_1}^{R_2}\bar{v}_{2t}^2dr + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_1\int\limits_0^{R_1} rv_{2r}^2dr + \mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{1r}^2dr\right] =$$
$$= \rho_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2t}Q_2dr - \frac{2æ}{R_1}a_1(R_1,t)\int\limits_0^{R_1} rv_{1t}dr, \qquad (3.3.12)$$

где $Q_2(r,t)$ определено в (3.3.4). Оценим правую часть (3.3.12) так

$$\frac{\rho_2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2t}^2dr + \frac{\rho_2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} rQ_2^2dr + \frac{æ^2}{2\rho_1}a_1^2(R_1,t) + \rho_1\int\limits_0^{R_1} r\bar{v}_{1t}^2dr.$$

Поэтому из (3.3.12) получим искомое неравенство

$$\mu_1\int\limits_0^{R_1} rv_{1r}^2dr + \mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2r}^2dr \le \mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{v}_{2r}^0)^2dr + \frac{\rho_2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} rQ_2^2(r,t)drdt +$$
$$+ \frac{æ^2}{\rho_1}\int\limits_0^t a_1^2(R_1,t)dt \equiv H_2(t) \qquad (3.3.13)$$

откуда и следует ограниченность производных $v_{1r}$, $\bar{v}_{2r}$ в $L_2$-нормах $\forall t \in [0,T]$.

Также, как и в п.2., имеем

$$\bar{v}_2^2(r,t) = -2\int\limits_r^{R_2}\bar{v}_2\bar{v}_{2r}^2dr \le \frac{2}{R_1}\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_2^2dr\right)^{1/2}\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2r}^2dr\right)^{1/2} \le$$
$$\le \frac{2}{R_1}\left(\frac{H_2(t)}{\mu_2}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\rho_2}E(t)\right)^{1/2}.$$

Таким образом, $\forall t \in [0,T]$, $r \in [R_1, R_2]$

$$|\bar{v}_2(r,t)| \le \sqrt{\frac{2}{R_1}} \left( \frac{2}{\rho_2\mu_2} H_2(t)E(t) \right)^{1/4}, \qquad (3.3.14)$$

где $H_2(t)$ есть правая часть неравенства (3.3.13), а $E(t)$ оценивается выражением (3.3.10). Учитывая замену (3.3.1), получим оценку

$$|v_2(r,t)| \le \frac{2æ}{\mu_2}|a_1(R_1,t)| \max_{r\in[R_1,R_2]} |P_4(r)| + \\ + \sqrt{\frac{2}{R_1}} \left( \frac{2}{\rho_2\mu_2} H_2(t)E(t) \right)^{1/4}. \qquad (3.3.15)$$

Аналогично пункту 4.2, дифференцируя задачу для $v_1(r,t)$, $v_2(r,t)$ по $t$, приходим к априорной оценке вида (3.3.15):

$$|v_{2t}(r,t)| \le \frac{2æ}{\mu_2}|a_{1t}(R_1,t)| \max_{r\in[R_1,R_2]} |P_4(r)| + \sqrt{\frac{2}{R_1}} \left( \frac{2}{\rho_2\mu_2} H_3(t)E_1(t) \right)^{1/4}, \quad (3.3.16)$$

где $E_1(t)$ отличается от $E(t)$ тем, что $v_1$, $v_2$ надо заменить на $v_{1t}$, $v_{2t}$; $H_3(t)$ отличается от $H_2(t)$ тем, что надо заменить $a_1(R_1,t)$ на $a_{1t}(R_1,t)$, $a_{1t}(R_1,t)$ на $a_{1tt}(R_1,t)$, оценки которых, в силу первого равенства (3.1.33) и неравенств (3.2.19), (3.2.20), уже известны.

Для оценки $|v_1(r,t)|$ поступим следующим образом. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} v_{1t} = \nu_1(v_{1rr} + \frac{1}{r} v_{1r}) + f_1(t), \quad 0 < r < R_1 \\ v_1(R_1,t) = v_2(R_1,t), \quad |v_1(0,t)| < \infty, \quad v_1(r,0) = 0, \end{gathered} \qquad (3.3.17)$$

считая $v_2(R_1,t)$ известной, удовлетворяющей оценке (3.3.15). Решение этой задачи даётся формулой [46]

$$v_1(r,t) = \frac{2\nu_1}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n J_0(\xi_n r/R_1)}{J_1(\xi_n)} \int_0^t v_2(R_1,\tau) \exp(-\nu_1\xi_n^2(t-\tau)/R_1^2)d\tau + \\ + \frac{2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r/R_1)}{\xi_n J_1(\xi_n)} \int_0^t f_1(\tau) \exp(-\nu_1\xi_n^2(t-\tau)/R_1^2)d\tau, \qquad (3.3.18)$$

$\xi_n$ — корни функции Бесселя $J_0(\xi_n){=}0$.

Заметим, что $f_1(t)$ является неизвестной; найдём её связь с $v_1$. Умножая уравнение (3.3.16) на $r$ и интегрируя от 0 до $R_1$, находим

$$f_1(t) = -2\nu_1 v_{1r}(R_1,t) + \frac{2}{R_1^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{R_1} r v_1 dr = -2\nu_1 v_{1r}(R_1,t) - \frac{2}{R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} r v_{2t} dr, \quad (3.3.19)$$

где использовано второе равенство (3.1.29). В равенстве (3.3.19) у нас нет оценки первого слагаемого, второе может быть оценено с помощью неравенства (3.3.16). Продифференцируем уравнение (3.3.17) по $r$ и введём новую функцию $V(r,t) = v_{1r}(r,t)$. Для неё получим уравнение

$$V_t = \nu_1 \left( V_{rr} + \frac{1}{r} V_r - \frac{1}{r^2} V \right), \tag{3.3.20}$$

причём $|V(0,t)| < \infty$. Второе граничное условие для $V$ находится из рассмотрения интеграла

$$\int\limits_0^{R_1} r^2 V dr = \int\limits_0^{R_1} r^2 v_{1r} dr = R_1^2 v_1(R_1,t) - 2\int\limits_0^{R_1} r v_1 dr =$$

$$= R_1^2 v_2(R_1,t) + 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r v_2 dr \equiv g(t) \tag{3.3.21}$$

с известной априорной оценкой функции $g(t)$, $g(0) = 0$ (использовано второе равенство (3.1.29)).

Произведём замену функции $V$:

$$V(r,t) = \overline{V}(r,t) + \left( r^4 - \frac{6}{7} R_1 r^3 \right) g(t). \tag{3.3.22}$$

Задача для $\overline{V}(r,t)$ примет вид (она является неклассической)

$$\overline{V}_t = \nu_1 \left( \overline{V}_{rr} + \frac{1}{r} \overline{V}_r - \frac{1}{r^2} \overline{V} \right) + \nu_1 \left( 15r^2 - \frac{48}{7} R_1 r \right) g(t) + \\ + \left( \frac{6}{7} R_1 r^3 - r^4 \right) g_t(t), \tag{3.3.23}$$

$$\overline{V}(r,0) = 0, \quad \int\limits_0^{R_1} r^2 \overline{V} dr = 0, \quad |\overline{V}(0,t)| < \infty. \tag{3.3.24}$$

**Лемма 3.3.1.** Решение задачи (3.3.23), (3.3.24) имеет вид

$$\overline{V}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n(t) J_1 \left( \frac{\zeta_n r}{R_1} \right), \tag{3.3.25}$$

где $\zeta_n$ – положительные корни уравнения $J_2(\zeta) = 0$ и

$$\overline{V}_n(t) = g(t) h_n^2 + \left( \nu_1 h_n^1 - \frac{\nu_1 \zeta_n^2}{R_1^2} h_n^2 \right) \int\limits_0^t g(\tau) \exp\left[ -\frac{\nu_1 \zeta_n^2}{R_1^2}(t-\tau) \right] d\tau, \tag{3.3.26}$$

причём $h_n^1$ и $h_n^2$ определяются по формулам

$$h_n^1 = \frac{2}{R_1^2 J_1^2(\zeta_n)} \int\limits_0^{R_1} \left(15r^3 - \frac{48}{7} R_1 r^2\right) J_1\left(\frac{\zeta_n}{R_1} r\right) dr,$$
$$h_n^2 = \frac{2}{R_1^2 J_1^2(\zeta_n)} \int\limits_0^{R_1} \left(\frac{6}{7} R_1 r^4 - r^5\right) J_1\left(\frac{\zeta_n}{R_1} r\right) dr. \qquad (3.3.27)$$

**Доказательство:** Поскольку [11]

$$\int\limits_0^z \tau^k J_{k-1}(\tau) d\tau = z^k J_k(z), \quad k \geq 1 - \text{целое},$$

то решение задачи (3.3.23), (3.3.24) следует искать в виде ряда Фурье (у нас $k = 2$) (3.3.25), так как [18] $\zeta J_1'(\zeta) - J_1(\zeta) = -\zeta J_2(\zeta)$, корни $J_2(\zeta) = 0$ являются корнями функции $\zeta J_1'(\zeta) - J_1(\zeta)$ и представление (3.3.25) имеет место [18].

Подстановка (3.3.25) в (3.3.23), (3.3.24) приводит к задаче Коши

$$\overline{V}_{nt} + \frac{\nu_1 \zeta_n^2}{R_1^2} \overline{V}_n = \nu_1 g(t) h_n^1 + g_t(t) h_n^2, \quad \overline{V}_n(0) = 0, \qquad (3.3.28)$$

где $h_n^1$, $h_n^2$ — коэффициенты рядов Фурье функций $15r^2 - 48R_1 r/7$, $6R_1 r^3/7 - r^4$, соответственно, определяющиеся по формулам (3.3.27). Из (3.3.28) находим, что решение задачи (3.3.23), (3.3.24) имеет вид (3.3.26)

Учитывая замену (3.3.22), получим выражение для $v_{1r}(R_1, t)$:

$$v_{1r}(R_1, t) = \overline{V}(R_1, t) + \frac{1}{7} R_1^4 g(t) = \left(\frac{1}{7} R_1^4 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 J_1(\zeta_n)\right) g(t) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu_1 h_n^1 - \frac{\nu_1 \zeta_n^2}{R_1^2} h_n^2\right) J_1(\zeta_n) \int\limits_0^t g(\tau) \exp\left[-\frac{\nu_1 \zeta_n^2}{R_1^2}(t - \tau)\right] d\tau. \qquad (3.3.29)$$

Ряды в (3.3.29) и ряд (3.3.25) сходятся равномерно. Действительно

$$h_n^1 = \frac{2}{R_1 \zeta_n J_1^2(\zeta_n)} \int\limits_0^{R_1} \left(15r - \frac{4}{7} R_1\right) \frac{d}{dr} \left(r^2 J_2\left(\frac{\zeta_n}{R_1} r\right)\right) dr =$$
$$= -\frac{30}{R_1 \zeta_n J_1^2(\zeta_n)} \int\limits_0^{R_1} r^2 J_2\left(\frac{\zeta_n}{R_1} r\right) dr, \qquad (3.3.30)$$

$$h_n^2 = \frac{6}{R_1 \zeta_n J_1^2(\zeta_n)} \int\limits_0^{R_1} \left(r^4 - \frac{4}{7} R_1 r^3\right) J_2\left(\frac{\zeta_n}{R_1} r\right) dr. \qquad (3.3.31)$$

Поскольку [11] $J_{k-1}(z) + J_{k+1}(z) = 2kz^{-1}J_k(z)$, то $J_3(\zeta_n) = -J_1(\zeta_n)$ (напомним, что $J_2(\zeta_n) = 0$) и, значит,

$$h_n^1 = \frac{\beta_n^1}{\zeta_n}, \quad h_n^2 = \frac{\beta_n^2}{\zeta_n},$$

где $\beta_n^1$, $\beta_n^2$ есть $n$-е коэффициенты рядов Фурье функций $-15R_1 r$ и $3R_1(r^3 - 4R_1 r^2/7)$ при их разложении по $J_2(R_1^{-1}\zeta_n r)$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\beta_n^j)^2$ сходятся, а тогда, в силу неравенства $|h_n^j| \le 2^{-1}\left[(\beta_n^j)^2 + 1/\zeta_n^2\right]$, сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|h_n^j|$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_n^{-2}$ сходится, так как $\zeta_n \sim n\pi$ при $n \gg 1$, более того [46], $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2\pi^2 = 1/12$.

Что касается второго слагаемого в (3.3.29), то оно не превосходит

$$R_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|h_n^1|}{\zeta_n^2} + \frac{|h_n^2|}{R_1^2}\right)\max_{t\in[0,T]}|g(t)|$$

с очевидно сходящимся рядом.

**Замечание 3.3.1.** В предыдущих рассуждениях было использовано хорошо известное неравенство $|J_k(z)| \le 1$, $k > 0$ – целое [11].

**Замечание 3.3.2.** Следуя монографиям [18], [41] можно показать, что функция $\overline{V}(r,t)$ – сумма ряда (3.3.25) – имеет при $t \ge \varepsilon > 0$ производные всех порядков по $r$ и $t$, в частности, решение задачи (3.3.23), (3.3.24) будет классическим.

Из (3.3.16), (3.3.19) и (3.3.29) находим оценку $f_1(t)$ при $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} |f_1(t)| \le 2\nu_1 &\left[\left(\frac{1}{7}R_1^4 + \sum_{n=1}^{\infty}|h_n^2|\right) + 2R_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|h_n^1|}{\zeta_n^2} + \frac{|h_n^2|}{R_1^2}\right)\right]\max_{t\in[0,T]}|g(t)| + \\ &+ \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}\left[\frac{2æ}{\mu_2}\max_{t\in[0,T]}|a_{1t}(R_1,t)|\max_{r\in[R_1,R_2]}|P_4(r)| + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{2}{R_1}}\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{2}{\rho_2\mu_2}H_3(t)E_1(t)\right)^{1/4}\right]. \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Оценка $f_2(t)$ следует из равенства (3.1.33)

$$|f_2(t)| \le \rho|f_1(t)| + \frac{2æ}{\rho_2 R_1}\max_{t\in[0,T]}|a_1(R_1,t)|, \tag{3.3.33}$$

где $\rho = \rho_1/\rho_2$, а $f_1(t)$ удовлетворяет неравенству (3.3.32).

Таким образом, функции $f_j(t)$ ограничены и непрерывны при $t \in [0,T]$.

Ограниченность функции $v_1(r,t)$ при $r \in [0,R_1]$, $t \in [0,T]$ следует из её представления в виде (3.3.18) (использовано равенство (3.2.28))

$$|v_1(r,t)| \le R_1 \max_{t\in[0,T]} |v_2(R_1,t)| + \frac{2R_1}{\nu_1} \max_{t\in[0,T]} |f_1(t)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^3 |J_1(\xi_n)|}, \qquad (3.3.34)$$

где $|v_2(R_1,t)|$, $|f_1(t)|$ удовлетворяют оценкам (3.3.15) и (3.3.32). Ряд в (3.3.34) сходится, поскольку $\xi_n \sim n\pi$, $|J_1(\xi_n)| \sim 1/\sqrt{n}$ при $n \gg 1$.

Таким образом, имеет место

**Теорема 3.3.1** Решения начально-краевой задачи (3.1.27) – (3.1.33), (3.1.38) $v_j(r,t)$ и функции $f_j(t)$ ограничены для всех $r \in [0, R_1]$ $(j = 1)$ и $r \in [R_1, R_2]$ $(j = 2)$, и $t \in [0, T]$.

## 3.4 Поведение решения при $t \to \infty$

Если функция $\alpha(t)$ и её производные $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$, $\alpha'''(t)$ определены для всех $t \ge 0$, естественно возникает вопрос о поведении решения рассмотренных в пунктах 4.2, 4.3 задач при $t \to \infty$. Обратимся к оценке (3.2.11). Поскольку из определения (3.2.3) функции $g_2(r,t)$

$$\int_{R_1}^{R_2} r g_2^2 dr \le \frac{2}{(R_2 - R_1)^4} \int_{R_1}^{R_2} \left[ 4\chi_2^2 \left( 2 - \frac{R_1}{r} \right)^2 \alpha^2(t) + (r - R_1)^4 (\alpha'(t))^2 \right] r dr \le$$
$$\le 2R_2(R_2 - R_1)(\alpha'(t))^2 + \frac{32\chi_2^2 \alpha^2(t)}{(R_2 - R_1)^3}$$

(для интегралов по $r$ даётся оценка сверху, а не их точное значение, которое может быть довольно громоздким), то из (3.2.9)

$$G(t) \le \left[ \max_j \left( \frac{2}{\rho_j c_{\rho_j}} \right) \right]^{1/2} \left[ 2R_2(R_2 - R_1)(\alpha'(t))^2 + \frac{32\chi_2^2 \alpha^2(t)}{(R_2 - R_1)^3} \right]^{1/2} \le$$
$$\le 2 \left[ \max_j \left( \frac{1}{\rho_j c_{\rho_j}} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{4\chi_2}{(R_2 - R_1)^{3/2}} |\alpha(t)| + \sqrt{R_2(R_2 - R_1)} |\alpha'(t)| \right], \qquad (3.4.1)$$

так как $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$. Поэтому из (3.2.11) получим

$$A(t) \le \left\{ \sqrt{A_0} + \left[ \max_j \left( \frac{1}{\rho_j c_{\rho_j}} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{4\chi_2}{(R_2 - R_1)^{3/2}} \int_0^t |\alpha(\tau)| e^{\eta\tau} d\tau + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sqrt{R_2(R_2 - R_1)} \int_0^t |\alpha'(\tau)| e^{\eta\tau} d\tau \right] \right\}^2 e^{-2\eta t}. \qquad (3.4.2)$$

Из (3.2.3) и (3.2.15)

$$|A_1(t)| \leq k_1 \int\limits_0^{R_1} r(a_{1r}^0)^2 dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}_{2r}^0)^2 dr +$$
$$+ \rho_2 c_{\rho_2} R_2 \left[ \frac{4\chi_2}{R_2 - R_1} \int\limits_0^t |\alpha(\tau)| d\tau + (R_2 - R_1) \int\limits_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau \right]. \qquad (3.4.3)$$

Предположим, что сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty |\alpha(\tau)| e^{\eta\tau} d\tau, \quad \int\limits_0^\infty |\alpha'(\tau)| e^{\eta\tau} d\tau, \qquad (3.4.4)$$

тогда

$$|\alpha(\tau)| = \alpha_1(t) e^{-\eta\tau}, \quad |\alpha'(\tau)| = \alpha_2(t) e^{-\eta\tau} \qquad (3.4.5)$$

с неотрицательными функциями $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, причём $\alpha_1(t) \to 0$, $\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и

$$\int\limits_0^\infty \alpha_k(\tau) d\tau < \infty, \quad k = 1, 2. \qquad (3.4.6)$$

Из (3.4.5), (3.4.6) следует сходимость интегралов

$$\int\limits_0^\infty |\alpha(\tau)| d\tau, \quad \int\limits_0^\infty |\alpha'(\tau)| d\tau,$$

поэтому из оценок (3.2.18), (3.4.2), (3.4.3) получаем экспоненциальную сходимость к нулю $a_2(r,t)$ $\forall r \in [R_1, R_2]$:

$$|a_2(r,t)| \leq \alpha_1(t) e^{-\eta t} + 2 \left( \frac{A_1(\infty) D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} e^{-\eta t/2}, \qquad (3.4.7)$$

где $D$ есть значение выражения в фигурных скобках (3.4.2) при $t = \infty$.

Для $a_1(r,t)$ из представления (3.2.25), (3.2.26) и (3.2.28) находим

$$|a_1(r,t)| \leq 2 \left[ \alpha_1(t) e^{-\eta t} + \left( \frac{A_1(\infty) D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} e^{-\eta t/2} \right] +$$
$$+ \max_{r \in [0, R_1]} |a_1^0(r)| \exp\left( -\frac{\chi_1 \xi_1 t}{R_1} \right), \qquad (3.4.8)$$

где $\xi_1 \approx 2.4048$ – первый корень уравнения $J_0(\xi) = 0$. Поэтому справедлива

**Лемма 3.4.1.** Если функции $\alpha(\tau)$, $\alpha'(\tau)$ удовлетворяют условиям (3.4.4) - (3.4.6), то для решений начально-краевых задач (3.1.34) - (3.1.37) $a_j(r,t)$ справедливы оценки (3.4.7), (3.4.8), из которых следует, что данные функции с ростом времени экспоненциально стремятся к нулю.

Ниже, для выяснения поведения $v_1(r,t)$ и $f_j(t)$ при больших $t$, нам понадобится оценка $|a_{2t}(r,t)|$. В неравенстве (3.2.19), см. формулу (3.2.5)

$$A_2(t) = \frac{\rho_1 c_{\rho_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} r a_{1t}^2(r,t)dr + \frac{\rho_2 c_{\rho_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2t}^2(r,t)dr,$$

$$A_{20} = A_2(0) = \frac{\chi_1^2\rho_1 c_{\rho_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} r\left(a_{1rr}^0 + \frac{1}{r}\,a_{1r}^0\right)^2 dr+$$

$$+\frac{\rho_2 c_{\rho_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[\chi_2\left(\bar{a}_{2rr}^0 + \frac{1}{r}\,\bar{a}_{2r}^0\right) + \frac{2\chi_2\alpha(0)}{(R_2-R_1)^2}\left(2-\frac{R_1}{r}\right) - \frac{\alpha'(0)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}\right]^2 dr,$$

$$\bar{a}_2^0(r) = a_2^0(r) - \frac{\alpha(0)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2};$$

$$\begin{aligned} A_3(t) = k_1\chi_1^2&\int\limits_0^{R_1} r\left(a_{1rr}^0 + \frac{1}{r}\,a_{1r}^0\right)^2 dr+ \\ &+ k_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[\chi_2\left(a_{2rr}^0 + \frac{1}{r}\,a_{2r}^0\right) - \frac{\alpha'(0)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}\right]^2 dr+ \\ &+ \rho_2 c_{\rho_2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} r g_3(r,t)drdt, \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

$$g_3(r,t) = \frac{1}{(R_2-R_1)^2}\left[2\chi_2\alpha'(t)\left(2-\frac{R_1}{r}\right) - \alpha''(t)(r-R_1)^2\right].$$

Поэтому для $A_2(t)$ получим неравенство (3.4.2) с заменой $A_0$ на $A_{10}$, $\alpha(\tau)$ на $\alpha'(\tau)$ и $\alpha'(\tau)$ на $\alpha''(\tau)$. Для функции $A_3(t)$ выполнено неравенство вида (3.4.3) с заменой

$$\int\limits_0^{R_1} r\left(a_{1r}^0\right)^2 dr \quad \text{на} \quad \chi_1^2\int\limits_0^{R_1} r\left(a_{1rr}^0 + \frac{1}{r}\,a_{1r}^0\right)^2 dr \equiv d_1,$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left(\bar{a}_{2r}^0\right)^2 dr \quad \text{на} \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[\chi_2\left(a_{2rr}^0+\frac{1}{r}\,a_{2r}^0\right)-\frac{\alpha'(0)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}\right]^2 dr\equiv d_2$$

и $\alpha(\tau)$ на $\alpha'(\tau)$, $\alpha'(\tau)$ на $\alpha''(\tau)$.

Дополнительно к (3.4.4) – (3.4.6) предположим сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty |\alpha''(\tau)|e^{\eta\tau}d\tau<\infty, \tag{3.4.10}$$

так что

$$|\alpha''(t)|=\alpha_3(t)e^{-\eta t}, \quad \int\limits_0^\infty \alpha_3(\tau)d\tau<\infty, \quad \alpha_3(t)\to 0 \text{ при } t\to\infty. \tag{3.4.11}$$

Учитывая выше сказанное, из (3.2.18) находим

$$|a_{2t}(r,t)|\le \alpha_2(t)e^{-\eta t}+2\left(\frac{A_3(\infty)D_1^2}{R_1^2k_2\rho_2c_{\rho_2}}\right)^{1/4}e^{-\eta t/2}, \tag{3.4.12}$$

где

$$\begin{gathered} A_3(\infty)=k_1d_1+k_2d_2+\frac{R_2\rho_2c_{p_2}}{R_2-R_1}\left[4\chi_2\int\limits_0^\infty|\alpha'(\tau)|+(R_2-R_1)^2\int\limits_0^\infty|\alpha''(\tau)|d\tau\right], \\ D_1=\sqrt{A_{10}}+\max_j\left(\frac{1}{\rho_jc_{p_j}}\right)^{1/2}\left[\frac{4\chi_2}{(R_2-R_1)^{3/2}}\int\limits_0^\infty|\alpha'(\tau)|e^{\eta\tau}d\tau+\right. \\ \left.+\sqrt{R_2(R_2-R_1)}\int\limits_0^\infty|\alpha''(\tau)|e^{\eta\tau}d\tau\right]. \end{gathered} \tag{3.4.13}$$

Обратимся к неравенству (3.2.20) для $|a_{2tt}(r,t)|$. Имеем

$$\begin{gathered} A_4(t)=\frac{\rho_1c_{p_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} ra_{1tt}^2dr+\frac{\rho_2c_{p_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{a}_{2tt}^2dr, \\ A_{40}=\frac{\rho_1c_{p_1}}{2}\int\limits_0^{R_1} r(a_{1tt}^0(r))^2dr+\frac{\rho_2c_{p_2}}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}_{2tt}^0(r))^2dr. \end{gathered} \tag{3.4.14}$$

Начальные данные находятся из уравнений (3.1.34) и замены (3.2.2):

$$
\begin{gathered}
a^0_{1tt}(r) = \chi_1 \left[ \left( a^0_{1rr} + \frac{1}{r}\, a^0_{1r} \right)_{rr} + \frac{1}{r} \left( a^0_{1rr} + \frac{1}{r}\, a^0_{1r} \right)_r \right], \\
\bar{a}^0_{2tt}(r) = \chi_2 \left[ \left( a^0_{2rr} + \frac{1}{r}\, a^0_{2r} \right)_{rr} + \frac{1}{r} \left( a^0_{2rr} + \frac{1}{r}\, a^0_{2r} \right)_r \right] - \frac{\alpha''(0)(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2}.
\end{gathered} \tag{3.4.15}
$$

Далее,

$$
A_5(t) = k_1 \int\limits_0^{R_1} r(a^0_{1tt})^2 dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}^0_{2tt})^2 dr +
$$

$$
+ \frac{\rho_2 c_{\rho_2}}{(R_2-R_1)^2} \int\limits_0^t \int\limits_{R_1}^{R_2} r \left[ 2\chi_2 \alpha''(\tau) \left( 2 - \frac{R_1}{r} \right) - \alpha'''(\tau)\,(r-R_1)^2 \right] dr. \tag{3.4.16}
$$

Функция $A_4(t)$, как и $A(t)$, удовлетворяет оценке типа (3.2.11), а значит и (3.4.2) с заменой $A_0$ на $A_{40}$, $\alpha(t)$ на $\alpha''(\tau)$ и $\alpha'(\tau)$ на $\alpha'''(\tau)$.

Если потребовать сходимость интеграла

$$
\int\limits_0^\infty |\alpha'''(\tau)| e^{\eta t} d\tau < \infty, \tag{3.4.17}
$$

$$
|\alpha'''(t)| = \alpha_4(t) e^{-\eta t}, \quad \int\limits_0^\infty \alpha_4(\tau) d\tau < \infty, \quad \alpha_4(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty,
$$

получим оценку функции $A_5(t)$ (см. формулу (3.4.3))

$$
|A_5(t)| \le k_1 \int\limits_0^{R_1} r(a^0_{1tt})^2 dr + k_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{a}^0_{2tt})^2 dr +
$$

$$
+ \rho_2 c_{\rho_2} R_2 \left[ \frac{4\chi_2}{R_2 - R_1} \int\limits_0^t |\alpha''(\tau)| d\tau + (R_2 - R_1) \int\limits_0^t |\alpha'''(\tau)| d\tau \right], \tag{3.4.18}
$$

где $a^0_{jtt}(r)$ определяются формулами (3.4.15). В силу (3.4.10), (3.4.17) $|A_5(t)| \le A_5(\infty)$ и, аналогично оценке (3.4.12), получим из (3.2.20)

$$
|a_{2tt}(r,t)| \le \alpha_4(t) e^{-\eta t} + 2 \left( \frac{A_5(\infty) D_2^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} e^{-\eta t/2}, \tag{3.4.19}
$$

$$D_2=\sqrt{A_{40}}+\left[\max_j\left(\frac{1}{\rho_j c_{\rho_j}}\right)\right]^{1/2}\left[\frac{4\chi_2}{(R_2-R_1)^{3/2}}\int\limits_0^\infty|\alpha''(\tau)|e^{\eta\tau}d\tau+\right.$$
$$\left.+\sqrt{R_2(R_2-R_1)}\int\limits_0^\infty|\alpha'''(\tau)|e^{\eta\tau}d\tau\right].$$

Перейдём к уточнению оценок функций $v_j(r,t)$, $f_j(t)$, когда $\alpha(\tau)$, $\alpha'(\tau)$, $\alpha''(\tau)$ и $\alpha'''(\tau)$ удовлетворяют условиям (3.4.4) – (3.4.6), (3.4.10), (3.4.11). При этом всюду будем заменять $a_1(R_1,t)$, $a_{1t}(R_1,t)$ на $a_2(R_1,t)$, $a_{2t}(R_1,t)$ согласно первому равенству (3.1.37). Начнём с функции $v_2(r,t)$, для которой доказано неравенство (3.3.15). Входящая в правую часть этого неравенства величина $E(t)$ имеет оценку (3.3.10), где $H_1(t)$ даётся равенством (3.3.9), в котором из (3.3.4)

$$Q_2(r,t)=\frac{2æ}{\mu_2}\left[a_{2t}(R_1,t)P_4(r)-\nu_1\left(P_{4rr}+\frac{1}{r}\,P_{4r}\right)a_2(R_1,t)\right].$$

Значит

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}rQ_2^2(r,t)dr\le\frac{8æ^2}{\mu_2^2}\left[a_{2t}^2(R_1,t)\int\limits_{R_1}^{R_2}rP_4^2(r)dr+\right.$$
$$\left.+\nu_1^2a_2^2(R_1,t)\int\limits_{R_1}^{R_2}r\left(P_{4rr}+\frac{1}{r}\,P_{4r}\right)^2dr\right]\equiv$$
$$\equiv d_3a_2^2(R_1,t)+d_4a_{2t}^2(R_1,t). \tag{3.4.20}$$

Поэтому

$$H_1(t)\le\frac{æ}{\sqrt{\rho_1}}|a_2(R_1,t)|+\sqrt{\frac{\rho_2}{2}}\left(\sqrt{d_3}|a_2(R_1,t)|+\sqrt{d_4}|a_{2t}(R_1,t)|\right)=$$
$$=\left(\frac{æ}{\sqrt{\rho_1}}+\sqrt{\frac{\rho_2d_3}{2}}\right)|a_2(R_1,t)|+\sqrt{\frac{\rho_2d_4}{2}}|a_{2t}(R_1,t)|$$

и оценка (3.3.10) принимает вид

$$E(t)\le\left[\sqrt{E(0)}+\left(\frac{æ}{\sqrt{\rho_1}}+\sqrt{\frac{\rho_2d_3}{2}}\right)\int\limits_0^t|a_2(R_1,t)|e^{\delta\tau}d\tau+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{\rho_2d_4}{2}}\int\limits_0^t|a_{2t}(R_1,t)|e^{\delta\tau}d\tau\right]^2e^{-2\delta t}. \tag{3.4.21}$$

Согласно оценкам (3.4.7), (3.4.12) интегралы в (3.4.21) имеют при больших $t$ порядок $e^{(\delta-\eta)t}$ и $e^{(\delta-\eta/2)t}$, поэтому

$$E(t) \le d_5 \begin{cases} e^{-2\delta t}, & \delta < \eta/2, \\ te^{-2\delta t}, & \delta = \eta/2, \\ e^{-\eta t}, & \delta > \eta/2, \end{cases} \equiv \gamma(t) \tag{3.4.22}$$

с положительной постоянной $d_5$.

Функция $H_2(t)$, определяемая равенством (3.3.13), с использованием (3.4.20), оценивается так:

$$H_2(t) \le \mu_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{v}_{2r}^0)^2 dr + \left(\frac{\rho_2 d_3}{2} + \frac{æ^2}{\rho_1}\right) \int\limits_0^t a_2^2(R_1,\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{\rho_2 d_4}{2} \int\limits_0^t a_{2\tau}^2(R_1,\tau)d\tau \le D_2 = \mathrm{const} > 0$$

в силу неравенств (3.4.7), (3.4.12).

Итак, из (3.2.25) - (3.2.28), (3.3.15), (3.4.21), (3.4.22) найдём оценку

$$|v_2(r,t)| \le \frac{2æ}{\mu_2} \max_{r\in[R_1,R_2]} |P_4(r)| \left[\alpha_1(t)e^{-\eta t} + 2\left(\frac{A_1(\infty)D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}}\right)^{1/4} e^{-\eta t/2}\right] +$$

$$+ \sqrt{2}\left(\frac{2d_5}{R_1^2 \nu_2} D_2 \gamma(t)\right)^{1/4} \tag{3.4.23}$$

и $v_2(r,t)$ равномерно по $r \in [R_1, R_2]$ стремится к нулю с ростом времени $t$.

Ниже нам понадобятся значения $f_j(0)$. Из (3.1.33) получим связь между ними

$$\rho_1 f_1(0) = \rho_2 f_2(0) - \frac{2æ}{R_1} a_1^0(R_1).$$

Другая связь вытекает из второго равенства (3.1.29) и уравнения (3.1.31) (напомним, что $v_j(r,0) = 0$):

$$f_1(0) = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} f_2(0).$$

Теперь находим

$$f_1(0) = \frac{2æ(R_2^2 - R_1^2)a_1^0(R_1)}{R_1^2 + \rho(R_2^2 - R_1^2)}, \quad f_2(0) = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} f_1(0). \tag{3.4.24}$$

Кроме того,

$$v_{1t}(r,0) = f_1(0), \quad \bar{v}_{2t}(r,0) = f_2(0) + \frac{2æ\chi_1}{\mu_2}\left(a_{1rrr}^0 + \frac{1}{r}\, a_{1rr}^0\right) P_4(r). \tag{3.4.25}$$

Второе начальное условие следует из уравнений (3.2.21), (3.3.4) и замены (3.3.1).

Функция $E_1(t)$ в правой части неравенства (3.3.16) имеет вид

$$E_1(t) = \frac{\rho_1}{2}\int\limits_0^{R_1} r v_{1t}^2 dr + \frac{\rho_2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2t}^2 dr,$$

$$E_1(0) = \frac{\rho_1 R_1^2}{4} f_1^2(0) + \frac{\rho_2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\bar{v}_{2t}^2(r,0)dr,$$

где $f_1(0)$ определено первым равенством (3.4.24), а $\bar{v}_{2t}(r,0)$ – вторым равенством (3.4.25). Для $E_1(t)$ имеет оценка вида (3.4.15)

$$E_1(t) \le \left[\sqrt{E_1(0)} + \left(\frac{æ}{\sqrt{\rho_1}} + \sqrt{\frac{\rho_2 d_3}{2}}\right)\int\limits_0^t |a_{2t}(R_1,\tau)|e^{\delta\tau}d\tau + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\rho_2 d_4}{2}}\int\limits_0^t |a_{2tt}(R_1,\tau)|e^{\delta\tau}d\tau\right]^2 e^{-2\delta t}. \qquad (3.4.26)$$

Учитывая полученные оценки (3.4.12), (3.4.18) из (3.4.20) найдём с помощью постоянной $d_6$

$$E_1(t) \le d_6\gamma(t) \qquad (3.4.27)$$

и функцией $\gamma(t)$ из неравенства (3.4.22).

Для функции $H_3(t)$ из правой части неравенства (3.3.16) имеем выражение

$$H_3(t) = \mu_1\int\limits_0^{R_1} r(v_{1tr}^0)^2 dr + \mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} r(\bar{v}_{2tr}^0)^2 dr +$$

$$+ \frac{\rho_2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} rQ_2^2(r,\tau)drd\tau + \frac{æ^2}{\rho_1}\int\limits_0^t a_2^2(R_1,\tau)d\tau, \qquad (3.4.28)$$

где в нашем случае

$$Q_2(r,t) = \frac{2æ}{\mu_2}\left[-\nu_2 a_{2t}(R_1,t)\left(P_{4rr} + \frac{1}{r}P_{4r}\right) + a_{2tt}(R_1,t)P_4(r)\right],$$

$$v_{1tr}^0(r) = 0, \quad \bar{v}_{2tr}^0 = \frac{2æ}{\mu_2}a_{2t}(R_1,0)P_{4r}, \quad a_{2t}(R_1,0) = \chi_2\left[a_{2rr}^0(R_1) + \frac{1}{R_1}a_{2r}^0(R_1)\right].$$

Ясно, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} rQ_2^2(r,t)dr \le d_3 a_{2t}^2(R_1,t) + d_4 a_{2tt}^2(R_1,t)$$

с постоянными $d_3$, $d_4$ из (3.4.19). В силу сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\infty (a_2^{(k)}(\tau))^2 d\tau, \quad k = 0, 1, 2$$

получим $H_3(t) \le H_3(\infty)$ и оценка (3.3.16) принимает вид для всех $r \in [R_1, R_2]$

$$|v_{2t}(r,t)| \le \frac{2æ}{\mu_2} \max_{r\in[R_1,R_2]} |P_4(r)| \left[ \alpha_2(t)e^{-\eta t} + 2\left(\frac{A_3(\infty)D_1^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}}\right)^{1/4} e^{-\eta t/2} \right] + \\ + \sqrt{2}\left(\frac{2d_6}{R_1^2\nu_2} H_3(\infty)\gamma(t)\right)^{1/4}. \qquad (3.4.29)$$

Функция $f_1(t)$ – градиент давления в первой жидкости вдоль оси $z$, определяется равенством (3.3.18), где $v_{1r}(R_1,t)$ даётся формулой (3.3.29). Последняя содержит функцию (см. (3.3.21))

$$g(t) = R_1^2 v_2(R_1,t) + 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r v_2(r,t)dr$$

и, учитывая оценку (3.4.23), найдём

$$|g(t)| \le R_2^2 \left\{ \frac{2æ}{\mu_2} \max_{r\in[R_1,R_2]} |P_4(r)| \left[ \alpha_1(t)e^{-\eta t} + 2\left(\frac{A_1(\infty)D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}}\right)^{1/4} e^{-\eta t/2} \right] + \right. \\ \left. +\sqrt{2}\left(\frac{2d_5}{R_1^2\nu_2} H_2(\infty)\gamma(t)\right)^{1/4} \right\} \le d_7 e^{-\omega t}, \qquad (3.4.30)$$

где $\omega = \min(\delta/2, \eta/4)$ (при $\delta = \eta/2$ в (3.4.30) будет $te^{-\omega t}$ вместо $e^{-\omega t}$ согласно (3.4.21)). Из (3.3.29) и (3.4.30)

$$|v_{1r}(R_1,t)| \le S_1 d_7 e^{-\omega t} + S_2 d_7 |\exp\left(-\frac{\zeta_1^2\nu_1}{R_1^2} t\right) - e^{-\omega t}|, \qquad (3.4.31)$$

$$S_1 = \frac{1}{7} R_1^4 + \sum_{n=1}^\infty |h_n^2|, \quad S_2 = \nu_1 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\nu_1 R_1^{-2}\zeta_n^2 - \omega}\left(|h_n^1| + \frac{\zeta_n^2}{R_1^2}|h_n^2|\right),$$

причём $S_1 < \infty$ и $S_2 < \infty$. Теперь из (3.3.18) с помощью неравенств (3.4.29)-(3.4.31) получим оценку

$$|f_1(t)| \leq 2\nu_1 \left[ S_1 d_7 e^{-\omega t} + S_2 d_7 \left| \exp\left( -\frac{\zeta_1^2 \nu_1}{R_1^2} t \right) - e^{-\omega t} \right| \right] + d_8 e^{-\omega t}. \qquad (3.4.32)$$

Оценка $f_2(t)$ следует из (3.1.31), неравенств (3.4.7) и (3.4.32)

$$|f_2(t)| \leq \rho |f_1(t)| + 2æ \left[ \alpha_1(t) e^{-\eta t} + 2 \left( \frac{A_1(\infty) D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} e^{-\eta t/2} \right]. \qquad (3.4.33)$$

**Замечание 3.4.1.** Из (3.3.34), с учётом оценок (3.4.23) и (3.4.32) следует, что функция $v_1(r,t)$ с ростом времени экспоненциально стремится к нулю

$$|v_1(r,t)| \leq R_1 \max_{t \in [0,T]} \left| \frac{2æ}{\mu_2} \max_{r \in [R_1, R_2]} |P_4(r)| \left[ \alpha_1(t) e^{-\eta t} + 2 \left( \frac{A_1(\infty) D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} e^{-\eta t/2} \right] + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2} \left( \frac{2 d_5}{R_1^2 \nu_2} D_2 \gamma(t) \right)^{1/4} \right| + \frac{2R_1}{\nu_1} \max_{t \in [0,T]} \left| 2\nu_1 \left[ S_1 d_7 e^{-\omega t} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + S_2 d_7 \left| \exp\left( -\frac{\zeta_1^2 \nu_1}{R_1^2} t \right) - e^{-\omega t} \right| \right] + d_8 e^{-\omega t} \right| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^3 |J_1(\xi_n)|}, \qquad (3.4.34)$$

Для функции $h_1(t)$ из (3.1.39), с учётом первого соотношения (3.1.29) и неравенства (3.4.23) имеем оценку

$$|h_1(t)| \leq \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1} \left\{ \frac{2æ}{\mu_2} \max_{r \in [R_1, R_2]} |P_4(r)| \left[ \int_0^t \alpha_1(\tau) e^{-\eta \tau} d\tau + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{4}{\eta} \left( \frac{A_1(\infty) D^2}{R_1^2 k_2 \rho_2 c_{\rho_2}} \right)^{1/4} \left( 1 - e^{-\eta t/2} \right) \right] + \sqrt{2} \left( \frac{2 d_5}{R_1^2 \nu_2} H_2(\infty) \right)^{1/4} \int_0^t \gamma^{1/4}(\tau) d\tau \right\}$$
$$(3.4.35)$$

и $h_1(t)$ ограничена при $t \to \infty$.

Таким образом, доказана

**Теорема 3.4.1.**: Если функции $\alpha(\tau)$, $\alpha'(\tau)$, $\alpha''(\tau)$, $\alpha'''(\tau)$, удовлетворяют условиям (3.4.4) – (3.4.6), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.17), то для функций $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ справедливы оценки (3.4.7), (3.4.8), (3.4.23), (3.4.34), (3.4.32), (3.4.33), из которых следует, что данные функции с ростом времени экспоненциально стремятся к нулю.

**Замечание 3.4.2.** Условия (3.4.4) - (3.4.6), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.17) физически означают, что тепловые эффекты на твёрдой стенке цилиндра $r = R_2$ очень малы и за счёт сил трения происходит торможение жидкостей при $t \to \infty$.

# 4 Решение сопряжённой задачи, описывающей осесимметрическое термокапиллярное движение в цилиндре при малом числе Марангони

Данная глава посвящена линейной задаче об осесимметрическом термокапиллярном движении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. Их общая поверхность раздела фиксирована и недеформируемая. Задача является обратной, так как градиенты давлений есть искомые функции. В изображениях по Лапласу решения находятся в виде квадратур. Доказано, что если температура на стенке трубы стабилизируется со временем, то решение также с ростом времени стремится к стационарному режиму. Проведённые численные расчёты хорошо соотносятся с теоретическими результатами.

## 4.1 Постановка задачи

Отличие данной задачи, от задачи рассматриваемой в предыдущей главе в том, что поверхность раздела двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе является фиксированной (рисунок 8). Таким образом в первой области $0 < r < R_1$, во второй $R_1 < r < R_2$. Задача

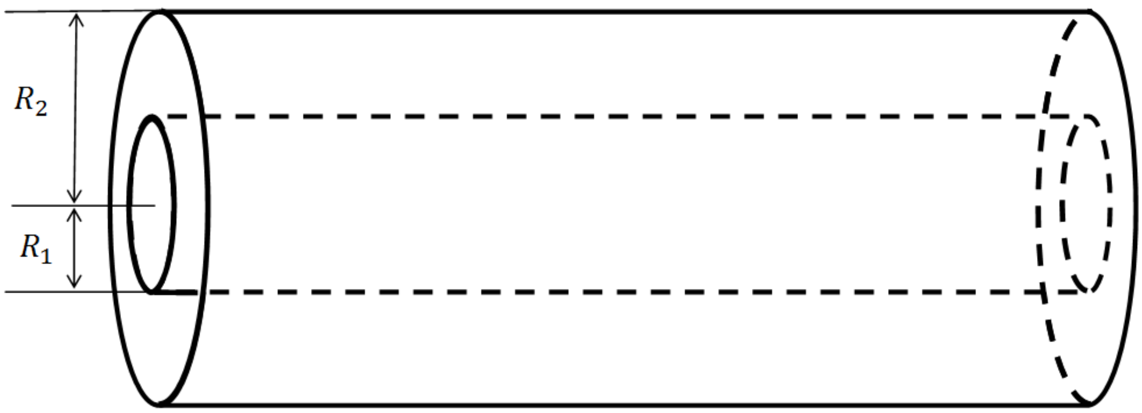


Рисунок 8. Схема области решения

для функции $v_j(r,t)$, записывается следующим образом

$$v_{1t} = \nu_1(v_{1rr} + \frac{1}{r}\,v_{1r}) + f_1(t), \quad 0 < r < R_1, \tag{4.1.1}$$

$$v_{2t} = \nu_2(v_{2rr} + \frac{1}{r}\,v_{2r}) + f_2(t), \quad R_1 < r < R_2, \tag{4.1.2}$$

$$v_1(R_1,t) = v_2(R_1,t), \quad \int\limits_0^{R_1} r v_1(r,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r v_2(r,t)\,dt = 0. \tag{4.1.3}$$

$$\mu_1 v_{1r}(R_1,t) - \mu_2 v_{2r}(R_1,t) = -2æ a_1(R_1,t), \tag{4.1.4}$$

$$v_2(R_2,t) = 0, \tag{4.1.5}$$

$$v_1(r,0) = v_{10}(r), \quad |v_1(0,t)| < \infty, \quad v_2(r,0) = v_{20}(r), \tag{4.1.6}$$

В отличии от задачи (3.1.27) - (3.1.33) здесь начальные данные (4.1.6) являются ненулевыми. Кроме того, так как поверхность раздела фиксирована, то из условия (3.1.23), второго уравнения (3.1.4), условия прилипания для компоненты скорости на ось $r$ в области $R_1 < r < R_2$ второе условие в (3.1.29) записывается в виде последних двух равенств в (4.1.3). Данные соотношения позволяют определить пока произвольные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, если известна $a_1(r,t)$. Задача для $a_j(r,t)$ записывается аналогичным образом как и в предыдущей главе.

## 4.2 Стационарное решение

Для такого решения все функции от времени не зависят. Тогда из (3.1.33)–(3.1.36) получим $a_1^c = a_2^c = \mathrm{const} = \alpha^{\mathrm{c}}$,

$$v_1^c(r) = \frac{aæ\alpha^c}{\mu_2} h_1(\delta)\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R_1^2}\right), \quad \delta = \frac{R_1^2}{R_2^2} < 1; \tag{4.2.1}$$

$$v_2^c(r) = \frac{2R_1æ\alpha^c}{\mu_2}\,\frac{1}{h_3(\delta)}\left[\frac{(1-\delta)^2}{1-\delta+\delta\ln\delta}\ln\left(\frac{r}{b}\right) + 1 - \frac{r^2}{b^2}\right], \tag{4.2.2}$$

где

$$\begin{aligned} &h_1(\delta) = \frac{2\delta h_2(\delta)}{h_3(\delta)}, \quad h_2(\delta) = \frac{\delta-1}{\delta}\left[2 + \frac{(1-\delta)\ln\delta}{1-\delta+\delta\ln\delta}\right], \\ &h_3(\delta) = \frac{(1-\delta)^2}{1-\delta+\delta\ln\delta} - 2\delta + 2\mu\delta h_2(\delta), \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$f_1^c = \frac{4æ\nu\delta h_1(\delta)\alpha^c}{R_1\rho_2 h_3(\delta)}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad f_2^c = \frac{8æ\delta\alpha^c}{R_1\rho_2 h_3(\delta)}. \tag{4.2.4}$$

Компоненты скорости на ось $r$ даются формулами

$$\begin{aligned} u_1^c &= -\frac{a^2æ\alpha^c}{4\mu_2}\left(\frac{r}{R_1}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right), \\ u_2^c &= -\frac{R_1^2æ\alpha^c}{\mu_2 h_3(\delta)}\left(\frac{R_1}{r}\right)\left\{\frac{(1-\delta)^2}{2(1-\delta+\delta\ln\delta)}\left[\frac{r^2}{R_1^2}\ln\left(\frac{\delta r^2}{R_1^2}\right) - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \ln\delta + 1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right] + \frac{r^2}{R_1^2} - \frac{\delta}{2}\frac{r^4}{R_1^4} - 1 + \frac{\delta}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

а функции $b_j^s(r)$ —

$$b_1^c(r) = \frac{\alpha^c R_2^2}{2}\left[1 + (1-k)\delta\ln\delta - \frac{\delta r^2}{R_1^2}\right] + \beta^c, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_1;$$
$$b_2^c(r) = \frac{\alpha^c R_2^2}{2}\left[1 - \frac{\delta r^2}{R_1^2} + (1-k)\delta\ln\left(\frac{\delta r^2}{R_1^2}\right)\right] + \beta^c, \quad 0 \leqslant R_1 \leqslant R_2, \tag{4.2.6}$$

где $k = k_1/k_2$.

## 4.3 Априорные оценки

Априорные оценки для $a_j(r,t)$ находятся аналогичным образом, как и в предыдущей главе и имеют вид (3.2.18), (3.2.25).

Перейдём к получению априорных оценок функций $v_j(r,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (4.1.1), (4.1.2), начальным данным (4.1.6) и краевым условиям (4.1.3) - (4.1.5). Поскольку функции $v_1$ и $v_2$ удовлетворяют второму и третьему условиям (4.1.3), то для них выполняется неравенство Фридрихса [3]

$$\int_0^{R_1} r v_1^2\,dr \leqslant \frac{R_1^2}{x_0^2}\int_0^{R_1} r v_{1r}^2\,dr,$$
$$\int_{R_1}^{R_2} r v_2^2(r)\,dr \leqslant \frac{(R_2-R_1)^2}{x_0^2}\int_{R_1}^{R_2} r v_{2r}^2\,dr, \tag{4.3.1}$$

где $x_0 \approx 3.8317$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_1(x)$.

Умножим уравнение (4.1.1) на $\rho_1 r v_1$, уравнение (4.1.2) на $\rho_2 r v_2$, затем проинтегрируем их по $r$ и результаты сложим:

$$\frac{dE}{dt} + \mu_1\int_0^{R_1} r v_{1r}^2\,dr + \mu_2\int_{R_1}^{R_2} r v_{2r}^2\,dr = -2æR_1 a_2(R_1,t)v_2(R_1,t),$$
$$E = \frac{\rho_1}{2}\int_0^{R_1} r v_1^2\,dr + \frac{\rho_2}{2}\int_{R_1}^{R_2} r v_2^2\,dr. \tag{4.3.2}$$

Модуль правой части не превосходит

$$\frac{æ^2 a_2^2(R_1,t)}{\varepsilon} + \varepsilon R_1(R_2-R_1)\int_{R_1}^{R_2} r v_{2r}^2\,dr$$

для любого $\varepsilon > 0$. Выбирая $\varepsilon = \mu_2/[2R_1(R_2-R_1)]$ и пользуясь неравенствами (4.3.1), получим из (4.3.2)

$$\frac{dE}{dt} + \eta_1 E \leqslant \frac{2æ^2 R_1 a_2^2(R_1,t)(R_2-R_1)}{\mu_2}\,, \tag{4.3.3}$$

где

$$\eta_1 = 2x_0^2 \min\left(\frac{\nu_1}{R_1^2}, \frac{\nu_2}{2(R_2-R_1)^2}\right). \tag{4.3.4}$$

Учитывая оценку (3.2.18), из (4.3.3) найдём

$$E \leqslant E_0 e^{-\eta_1 t} + \frac{2æ^2 R_1(R_2-R_1)}{\mu_2} \frac{(N+\sqrt{d_3})^2}{|\eta_1-\eta|} e^{-\eta t}, \quad E_0 = E(0). \tag{4.3.5}$$

Если $\eta_1 = \eta$, то во втором слагаемом в правой части неравенства (4.3.5) вместо экспоненты $e^{-\eta t}$ будет стоять $te^{-\eta t}$. Таким образом, $L_2$-нормы $v_j(r,t)$ с весом $r$ убывают по экспоненциальному закону $e^{-\eta_2 t}$, где $\eta_2 = \min(\eta, \eta_1)$.

Для доказательства ограниченности в такой же норме $v_{jr}(r,t)$ при всех $t > 0$ произведём замену

$$\begin{gathered} v_1(r,t) = \bar{v}_1(r,t) - \frac{2æ a_1(R_1,t)}{\mu_1} P(r), \\ v_2(r,t) = \bar{v}_2(r,t), \end{gathered} \tag{4.3.6}$$

где полином по $r$ третьего порядка таков:

$$P(r) = r^4 + \frac{5}{3R_1^2}\left(1 - \frac{4R_1^3}{3}\right) r^3 + \left(\frac{4R_1^2}{3} - \frac{2}{R_1}\right) r^2 + \frac{R_1}{3} - \frac{R_1^4}{9}. \tag{4.3.7}$$

Он выбирается из следующих условий $P(R_1) = 0$, $P_r(R_1) = 1$, $|P_r(r)/r| < \infty$, $\int\limits_0^{R_1} rP(r)\,dr = 0$. Тогда для новой функции $\bar{v}_1(r,t)$ будет выполнено второе интегральное условие (4.1.3), краевое условие (4.1.4) становится однородным, первое условие (4.1.3) остаётся прежним. Изменятся начальные данные (4.1.6) для $\bar{v}_1(r,0)$,

$$\bar{v}_1(r,0) = v_{10}(r) + \frac{2æ a_1(R_1,0)}{\mu_1} P(r) \equiv \bar{v}_{10}(r), \tag{4.3.8}$$

и само уравнение (4.1.1)

$$\bar{v}_{1t} = \nu_1 \left(\bar{v}_{1rr} + \frac{1}{r}\bar{v}_{1r}\right) + f_1(t) + Q(r,t), \tag{4.3.9}$$

где

$$\begin{aligned} Q(r,t) = \frac{2æ a_{1t}(R_1,t)}{\mu_1} P(r) - {}& \\ & - \frac{2æ a_1(R_1,t)}{\rho_1}\left[16r^2 + \frac{15}{R_1^2}\left(1 - \frac{4R_1^3}{3}\right) r - \frac{6}{R_1} + \frac{16R_1^2}{3}\right]. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Умножим уравнение (4.3.9) на $\rho_1\bar v_{1t}$, (4.1.2) на $\rho_2 v_{2t}$, проинтегрируем по их областям определения и результаты сложим:

$$\rho_1\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1t}^2\,dr+\rho_2\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{2t}^2\,dr+\frac12\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_1\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{2r}^2\,dr\right]=$$
$$=\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1t}Q(r,t)\,dr. \quad (4.3.11)$$

Интеграл в правой части равенства (4.3.11) оценивается сверху так:

$$\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1t}Q(r,t)\,dr\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^{R_1} rQ^2(r,t)\,dr+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1t}^2\,dr$$

с произвольным $\varepsilon>0$. Считая $\varepsilon=\rho_1$, из (4.3.11) выводим неравенство

$$\mu_1\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{2r}^2\,dr\leqslant$$
$$\leqslant\mu_1\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{10r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{20r}^2\,dr+\frac{1}{\rho_1}\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{R_1} rQ^2(r,t)\,drdt. \quad (4.3.12)$$

Поскольку

$$Q^2\leqslant 4æ^2\left[\frac{P^2(r)a_{1t}^2(R_1,t)}{\mu_1^2}+\frac{P_1^2(r)a^2(R_1,t)}{\rho_1^2}\right],$$

где $P_1(r)$ есть квадратный трёхчлен в квадратных скобках равенства (4.3.10), то в силу оценок (3.2.19), (3.2.21) интегралы

$$\int\limits_0^{R_1} r\bar v_{1r}^2\,dr\leqslant d_4,\quad \int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{2r}^2\,dr\leqslant d_5 \quad (4.3.13)$$

ограничены для всех $t\geqslant 0$.

Обращаясь к замене (4.3.6), получим ограниченность интеграла

$$\int\limits_0^{R_1} rv_{1r}^2\,dr\leqslant 2d_4. \quad (4.3.14)$$

Имеем

$$v_2^2(r,t)\;=\;2\left|\int\limits_r^{R_2} v_2v_{2r}\,dr\right|\;\leqslant\;\frac{2}{R_1}\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_2^2\,dr\right)^{1/2}\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} rv_{2r}^2\,dr\right)^{1/2}\;\leqslant\;d_6e^{-\eta_2t/2},$$

откуда

$$|v_2(r,t)| \leqslant \sqrt{d_6}\, e^{-\eta_2 t/4} \tag{4.3.15}$$

равномерно по $r \in [R_1, R_2]$.

Для оценки $|v_1(r,t)|$ воспользуемся тем, что

$$\int\limits_0^{R_1} r v_1(r,t)\, dr = 0.$$

Поэтому найдётся точка $r_1 \in (R_1, R_2)$ такая, что $v_1(r_1, t) = 0$. Из равенства

$$v_1^2(r,t) = 2\int\limits_{r_1}^{r} v_1 v_{1r}\, dr$$

получим

$$v_1^2 \leqslant 2\int\limits_{r_1}^{r} \frac{1}{r}\, |\sqrt{r}\, v_1||\sqrt{r}\, v_{1r}|\, dr \leqslant \frac{2}{r_1}\Bigg(\int\limits_0^{R_1} r v_1^2\, dr\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_0^{R_1} r v_{1r}^2\, dr\Bigg)^{1/2}.$$

Значит, для любых $r \in [0, R_1]$

$$|v_1(r,t)| \leqslant \sqrt{d_7}\, e^{-\eta_2 t/4}. \tag{4.3.16}$$

Для дальнейшего нам потребуются оценки $|v_{jt}|$, равномерные по $r \in [0, R_1]$ при $j = 1$ и $r \in [R_1, R_2]$ для $j = 2$. Они получаются путём дифференцирования сопряжённой задачи (4.1.1) - (4.1.5) по времени. Ясно, что для $v_{jt}$ возникает точно такая же задача с заменой в (4.1.4) $a_1(R_1,t)$ на $a_{1t}(R_1,t)$, а начальные данные (4.1.6) будут следующими:

$$\begin{aligned} v_{1t}(r,0) &= \nu_1 \left(v_{10rr} + \frac{1}{r}\, v_{10r}\right) + f_1(0) \equiv v_1^0(r), \\ v_{2t}(r,0) &= \nu_2 \left(v_{20rr} + \frac{1}{r}\, v_{20r}\right) + f_2(0) \equiv v_2^0(r). \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Однако в (4.3.17) есть неизвестные $f_1(0)$ и $f_2(0)$. Они определяются через начальные данные $v_{10}(r)$, $v_{20}(r)$ следующим образом. Умножая уравнения (4.1.1), (4.1.2) на $r$ и интегрируя с учётом второго и третьего равенств (4.1.3), найдём

$$f_1(t) = -\frac{2\nu_1}{R_1}\, v_{1r}(R_1,t), \quad f_2(t) = -\frac{2\nu_1}{R_2^2 - R_1^2}\big[R_2 v_{2r}(R_2,t) - R_1 v_{2r}(R_1,t)\big].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f_1(0) &= -\frac{2\nu_1}{R_1}\, v_{10r}(R_1), \\ f_2(0) &= -\frac{2\nu_1}{R_2^2 - R_1^2}\big[R_2 v_{20r}(R_2) - R_1 v_{20r}(R_1)\big]. \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Следовательно, справедливы оценки вида (4.3.15), (4.3.16):

$$|v_{1t}(r,t)| \leqslant \sqrt{d_7}\, e^{-\eta_2 t/4}, \quad |v_{2t}(r,t)| \leqslant \sqrt{d_6}\, e^{-\eta_2 t/4} \tag{4.3.19}$$

с другими, вообще говоря, положительными постоянными $d_6$, $d_7$.

Таким образом, справедлива:

**Лемма 4.3.1.** Для решения задач (4.1.1), (4.1.2) с начальными и краевыми условиями (4.1.3) - (4.1.6) справедливы оценки (4.3.16), (4.3.15) соответственно, и функции $v_j$, $v_{jt}$ с ростом времени стремятся к нулю равномерно на отрезках $0 \le r \le R_1$ $(j=1)$ и $R_1 \le r \le R_2$ $(j=2)$.

Умножим уравнение (4.1.1) на $r(a-r)$, (4.1.2) на $r(R_1-r)(R_2-r)$, а затем проинтегрируем по $r$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{R_1^3}{6}\, f_1(t) = \int\limits_0^{R_1} r(R_1-r)v_{1t}\, dr - \nu_1 \int\limits_0^{R_1} r v_{1r}\, dr, \\
\frac{(R_1-R_2)(R_1+R_2)^3}{12}\, f_2(t) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r(R_1-r)(R_2-r)v_{2t}\, dr + \nu_2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r(2r-R_1-R_2)v_{2r}\, dr.
\end{gathered} \tag{4.3.20}$$

Последние интегралы в (4.3.20) преобразуются так

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^{R_1} r v_{1r}\, dr = R_1 v_1(R_1,t) - \int\limits_0^{R_1} v_1(r,t)\, dr, \\
\int\limits_{R_1}^{R_2} r(2r-R_1-R_2)v_{2r}\, dr = R_1(R_2-R_1)v_2(R_1,t) + (R_1+R_2)\int\limits_{R_1}^{R_2} v_2(r,t)\, dr,
\end{gathered} \tag{4.3.21}$$

и их можно оценить через известные $|v_j(r,t)|$, см. неравенства (4.3.15), (4.3.16). Используя эти неравенства, неравенства (4.3.19) и соотношения (4.3.21), из (4.3.20) получим оценки

$$|f_1(t)| \leqslant d_8 e^{-\eta_2 t/4}, \quad |f_2(t)| \leqslant d_9 e^{-\eta_2 t/4}, \tag{4.3.22}$$

где $d_8$, $d_9$ — положительные постоянные. Поэтому справедлива

**Лемма 4.3.2.** Функции $f_j(t)$ удовлетворяют оценкам (4.3.22) и с ростом времени стремятся к нулю.

## 4.4 Решение задачи методом преобразования Лапласа

Поставленные сопряжённые задачи являются линейными и для их решения применимо преобразование Лапласа [25]. Например,

$$\tilde{a}_j(r,s) = \int\limits_0^{\infty} a_j(r,t) e^{-st}\, dt, \quad j=1,2. \tag{4.4.1}$$

Тогда задача (3.1.34) - (3.1.37) для функций $a_j(r,t)$ сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tilde a_{1rr} + \frac{1}{r}\,\tilde a_{1r} - \frac{s}{\chi_1}\,\tilde a_1 = -a_{10}(r), \quad 0 < r < R_1; \tag{4.4.2}$$

$$\tilde a_{2rr} + \frac{1}{r}\,\tilde a_{2r} - \frac{s}{\chi_2}\,\tilde a_2 = -a_{20}(r), \quad R_1 < r < R_2; \tag{4.4.3}$$

$$\begin{gathered} \tilde a_1(R_1,s) = \tilde a_2(R_1,s), \quad k_1\frac{\partial \tilde a_1(R_1,s)}{\partial r} = k_2\frac{\partial \tilde a_2(R_1,s)}{\partial r}\,, \\ \tilde a_2(R_2,s) = \tilde\alpha(s). \end{gathered} \tag{4.4.4}$$

Общие решения уравнений (4.4.2), (4.4.3) представимы в виде (для $\tilde a_1$ учтено условие ограниченности при $r = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde a_1(r,s) = C_1 I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,r\Bigr) + \int\limits_0^r \tau\Bigl[I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\Bigr)K_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,r\Bigr) - \\ - I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,r\Bigr)K_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\Bigr)\Bigr]a_{10}(\tau)\,d\tau; \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

$$\begin{aligned} \tilde a_2(r,s) = C_2 I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,r\Bigr) + C_3 K_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,r\Bigr) + \int\limits_{R_1}^r \tau\Bigl[I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,\tau\Bigr)K_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,r\Bigr) - \\ - I_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,r\Bigr)K_0\Bigl(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,\tau\Bigr)\Bigr]a_{20}(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

где $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Величины $C_1$, $C_2$, $C_3$ определяются из граничных условий (4.4.4)

$$C_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} h_1(s) & I_0(z) & K_0(z) \\ h_2(s) & -I_0(y) & -K_0(y) \\ h_3(s) & -\sqrt{\chi}\,I_1(y) & \sqrt{\chi}\,K_1(y) \end{vmatrix},$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & h_1(s) & K_0(z) \\ I_0(x) & h_2(s) & -K_0(y) \\ kI_1(x) & h_3(s) & \sqrt{\chi}\,K_1(y) \end{vmatrix}, \tag{4.4.7}$$

$$C_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & h_1(s) \\ I_0(x) & -I_0(y) & h_2(s) \\ kI_1(x) & -\sqrt{\chi}\,I_1(y) & h_3(s) \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & K_0(z) \\ I_0(x) & -I_0(y) & -K_0(y) \\ kI_1(x) & -\sqrt{\chi}\, I_1(y) & \sqrt{\chi}\, K_1(y) \end{vmatrix},$$

где $x = R_1\sqrt{s/\chi_1}$; $y = R_1\sqrt{s/\chi_2}$; $z = R_2\sqrt{s/\chi_2}$; $\chi = \chi_1/\chi_2$; $k = k_1/k_2$;

$$h_1(s) = \int\limits_{R_1}^{R_2} \tau\left[I_0(z)K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,\tau\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_2}}\,\tau\right)K_0(z)\right]a_{20}(\tau)\,d\tau + \tilde{\alpha}(s),$$

$$h_2(s) = -\int\limits_{0}^{R_1} \tau\left[I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\right)K_0(x) - I_0(x)K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\right)\right]a_{10}(\tau)\,d\tau, \qquad (4.4.8)$$

$$h_3(s) = k\int\limits_{0}^{R_1} \tau\left[I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\right)K_1(x) + I_1(x)K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_1}}\,\tau\right)\right]a_{10}(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку при $t \to 0$ имеем $I_0(t) \sim 1 + t^2/4$, $K_0(t) \sim -\ln(t/2)$, $I_1(t) \sim t/2 + t^3/16$, $K_1(t) \sim 1/t + t\ln(t/2)/2$, то

$$\Delta(s) \sim \frac{1}{y}\left\{\frac{kxy}{2}\,\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - \sqrt{\chi}\left[1 + \frac{y^2}{2}\,\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{x^2+z^2}{4}\right]\right\}, \qquad (4.4.9)$$

поэтому из формул (4.4.6) – (4.4.8) после длинных выкладок получим, что если $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha^c$, то [25]

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{a}_j(s) = \alpha^c. \qquad (4.4.10)$$

Таким образом, с ростом времени функции $a_j(r,t)$ стремятся к постоянным значениям.

Перейдём к определению функций $\tilde{v}_j(r,t)$, считая, что движение возникает только под действием термокапиллярных сил, то есть начальные условия (4.1.6) — нулевые: $v_{j0}(r) = 0$, $j = 1, 2$. Тогда для изображений $\tilde{v}_j(r,s)$ получим краевую задачу

$$\tilde{v}_{1rr} + \frac{1}{r}\,\tilde{v}_{1r} - \frac{s}{\nu_1}\,\tilde{v}_1 = -\frac{\tilde{f}_1(s)}{\nu_1}, \quad 0 < r < R_1; \qquad (4.4.11)$$

$$\tilde{v}_{2rr} + \frac{1}{r}\,\tilde{v}_{2r} - \frac{s}{\nu_2}\,\tilde{v}_2 = -\frac{\tilde{f}_2(s)}{\nu_2}, \quad R_1 < r < R_2; \qquad (4.4.12)$$

$$\tilde{v}_1(R_1,s) = \tilde{v}_2(R_1,s); \qquad (4.4.13)$$

$$\mu_2\tilde{v}_{2r}(R_1,s) - \mu_1\tilde{v}_{1r}(R_1,s) = 2æ\tilde{a}_1(R_1,s); \qquad (4.4.14)$$

$$\tilde{v}_2(R_2, s) = 0, \quad \int\limits_0^{R_1} r\tilde{v}_1(r, s)\, dr = 0, \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r\tilde{v}_2(r, s)\, dr = 0. \tag{4.4.15}$$

Здесь функция $\tilde{a}_1(R_1, s)$ уже известна из равенства (4.4.5), кроме того, $|\tilde{v}_1(0, s)| < \infty$.

Решение уравнений (4.4.11), (4.4.12) представим в виде

$$\begin{gathered}\tilde{v}_1 = D_1 I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_1}}\, r\right) + \frac{\tilde{f}_1(s)}{s}\,,\\ \tilde{v}_2 = D_2 I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_2}}\, r\right) + D_3 K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_2}}\, r\right) + \frac{\tilde{f}_2(s)}{s}\,.\end{gathered} \tag{4.4.16}$$

Граничные условия (4.4.13), (4.4.14) и первое из (4.4.15) позволяют найти величины $D_1$, $D_2$, $D_3$:

$$\begin{gathered}
D_1 = \frac{1}{s\Delta_1}\begin{vmatrix} -\tilde{f}_2 & I_0(z_1) & K_0(z_1) \\ \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 & -I_0(y_1) & -K_0(y_1) \\ -\dfrac{2æ\sqrt{\nu_2 s}}{\mu_2}\,\tilde{a}_1(R_1, s) & -I_1(y_1) & K_1(y_1)\end{vmatrix},\\
D_2 = \frac{1}{s\Delta_1}\begin{vmatrix} 0 & -\tilde{f}_2 & K_0(z_1) \\ I_0(x_1) & \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 & -K_0(y_1) \\ \dfrac{\mu}{\sqrt{\nu}}\, I_1(x_1) & -\dfrac{2æ\sqrt{\nu_2 s}}{\mu_2}\,\tilde{a}_1(R_1, s) & K_1(y_1)\end{vmatrix},\\
D_3 = \frac{1}{s\Delta_1}\begin{vmatrix} 0 & I_0(z_1) & -\tilde{f}_2 \\ I_0(x_1) & -I_0(y_1) & \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 \\ \dfrac{\mu}{\sqrt{\nu}}\, I_1(x_1) & -I_1(y_1) & -\dfrac{2æ\sqrt{\nu_2 s}}{\mu_2}\,\tilde{a}_1(R_1, s)\end{vmatrix},\\
\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & I_0(z_1) & K_0(z_1) \\ I_0(x_1) & -I_0(y_1) & -K_0(y_1) \\ \dfrac{\mu}{\sqrt{\nu}}\, I_1(x_1) & -I_1(y_1) & K_1(y_1)\end{vmatrix},
\end{gathered} \tag{4.4.17}$$

где $x_1 = R_1\sqrt{s/\nu_1}$; $y_1 = R_1\sqrt{s/\nu_2}$; $z_1 = R_2\sqrt{s/\nu_2}$; $\mu = \mu_1/\mu_2$; $\nu = \nu_1/\nu_2$. Поскольку [11]

$$\int\limits_0^{R_1} r I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_1}}\, r\right)\, dr = \sqrt{\frac{\nu_1}{s}}\, a I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_1}}\, R_1\right),$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} rI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_2}}\,r\right)\,dr = \frac{\nu_2}{s}\,[z_1I_1(z_1) - y_1I_1(y_1)], \tag{4.4.18}$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} rK_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu_2}}\,r\right)\,dr = \frac{\nu_2}{s}\,[y_1K_1(y_1) - z_1K_1(z_1)],$$

то из второго и третьего равенств (4.4.15) с помощью формул (4.4.16), (4.4.18) находим

$$\begin{gathered} D_1 = -\frac{R_1\tilde{f}_1(s)}{2\sqrt{\nu_1 s}\,I_1(x_1)}\,, \\ D_2[z_1I_1(z_1) - y_1I_1(y_1)] + D_3[y_1K_1(y_1) - z_1K_1(z_1)] = -\frac{\tilde{f}_2(s)(R_2^2 - R_1^2)}{2\nu_2}\,. \end{gathered} \tag{4.4.19}$$

Подстановка $D_1$, $D_2$, $D_3$ из (4.4.17) в соотношения (4.4.19) позволяет определить $\tilde{f}_1(s)$ и $\tilde{f}_2(s)$ в виде

$$\tilde{f}_1(s) = \frac{F_1B_2 - A_2F_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\,, \quad \tilde{f}_2(s) = \frac{A_1F_2 - F_1B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\,, \tag{4.4.20}$$

где

$$A_1 = \frac{x_1\Delta_1}{2I_1(x_1)} + I_0(z_1)K_1(y_1) + K_0(z_1)I_1(y_1),$$

$$A_2 = \frac{1}{y_1} - I_0(z_1)K_1(y_1) - I_1(y_1)K_0(z_1),$$

$$F_1 = \frac{2æ\tilde{a}_1(R_1,s)y_1}{R_1\rho_2}\,[I_0(y_1)K_0(z_1) - I_0(z_1)K_0(y_1)],$$

$$B_1 = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,I_1(x_1)\,[1 - y_1I_1(y_1)K_0(z_1) - y_1I_0(z_1)K_1(y_1)]\,,$$

$$\begin{aligned} B_2 = [z_1I_1(z_1) - y_1I_1(y_1)]&\left[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,I_1(x_1)K_0(y_1) + I_0(x_1)K_1(y_1) - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,I_1(x_1)K_0(z_1)\right] + [y_1K_1(y_1) - z_1K_1(z_1)]\left[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,I_1(x_1)I_0(z_1) + \right. \\ &\left. + I_0(x_1)I_1(y_1) - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,I_1(x_1)I_0(y_1)\right] + \frac{(1-\delta)}{2\delta}\,y_1^2\Delta_1, \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{2æ\tilde{a}_1(R_1,s)}{a\rho_2}\,y_1I_0(x_1)\,[1 - y_1K_0(z_1)I_1(y_1) - y_1K_1(y_1)I_0(z_1)]\,.$$

С помощью довольно длинных вычислений доказываются, что если $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \alpha^c$, то [25]

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{v}_j(r,s) = v_j^c(r), \quad j = 1,2. \tag{4.4.21}$$

То есть с ростом времени решение выходит на стационарный режим.

**Лемма 4.4.1.** Решения задач (3.1.34)–(3.1.37) для функций $a_j(r,t)$ и (4.1.1)–(4.1.6) для функций $v_j(r,t)$ определяются путём обращения преобразования Лапласа формул (4.4.5), (4.4.6) и (4.4.16) соответственно, которые с ростом времени выходят на стационарный режим.

На Рисунке 9 приведена зависимость безразмерной функции $\bar{v}_j = R_1^2 v_1/\nu_j$ от $\xi = R_1 z$, когда $\alpha(\tau) = \sin(10^{-3}\tau)$, где $\tau = R_1^2 t/\nu_1$ — безразмерный параметр времени, то есть $\alpha(\tau)$ не имеет предела при $\tau \to \infty$. Таким образом, как видно из графика, решение с ростом времени не сходится к стационарному. На Рисунке 10 также приведена зависимость $\bar{v}_j(\xi)$, когда $\alpha(\tau) = 1 + \exp(-10^3\tau)\sin(10^{-3}\tau)$. Здесь решение стремится к стационарному. При $\tau \approx 400$ кривая 3 практически совпадает с кривой 4.

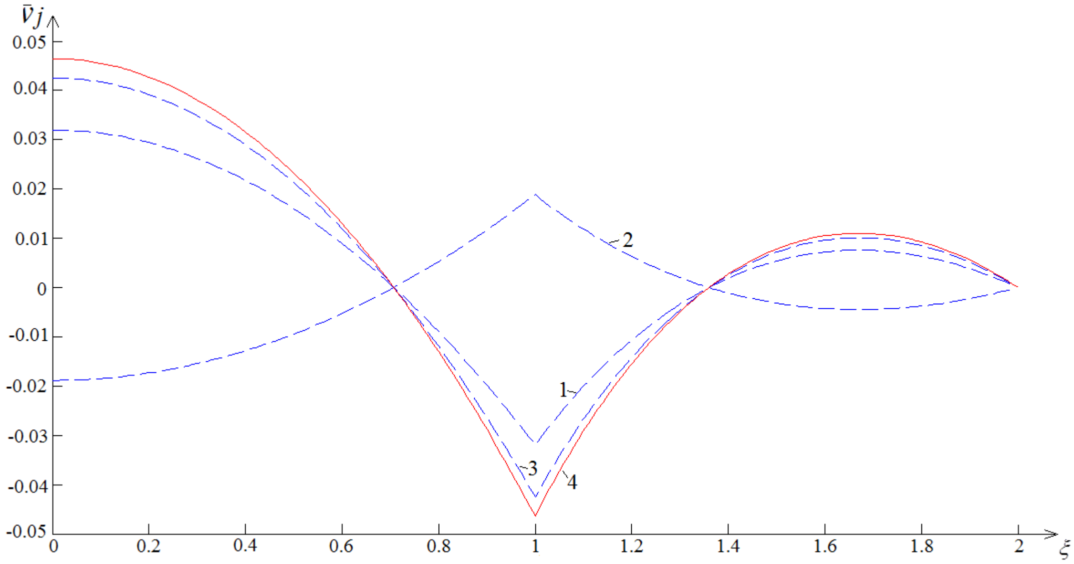


Рисунок 9. Безразмерные профили функций $\overline{v}_j$ at $\alpha(\tau) = \sin(10^{-2}\tau)$; curve 1: $\tau = 200$; curve 2: $\tau = 400$; curve 3: $\tau = 700$; curve 4: стационарное решение. Кривые 1-3 с ростом времени не стремятся к кривой 4.

**Замечание 4.4.1.** Задача для определения изображений $\tilde{b}_j(r,s)$ в точности совпадает с задачей (4.4.2)–(4.4.4) с заменой $-a_{j0}(r)$ на $-b_{j0}(r) - 2\tilde{a}_j(r,s)$ и $\tilde{\alpha}(s)$ на $\tilde{\beta}(s)$. Таким образом, эти функции находятся по формулам (4.4.5)–(4.4.8).

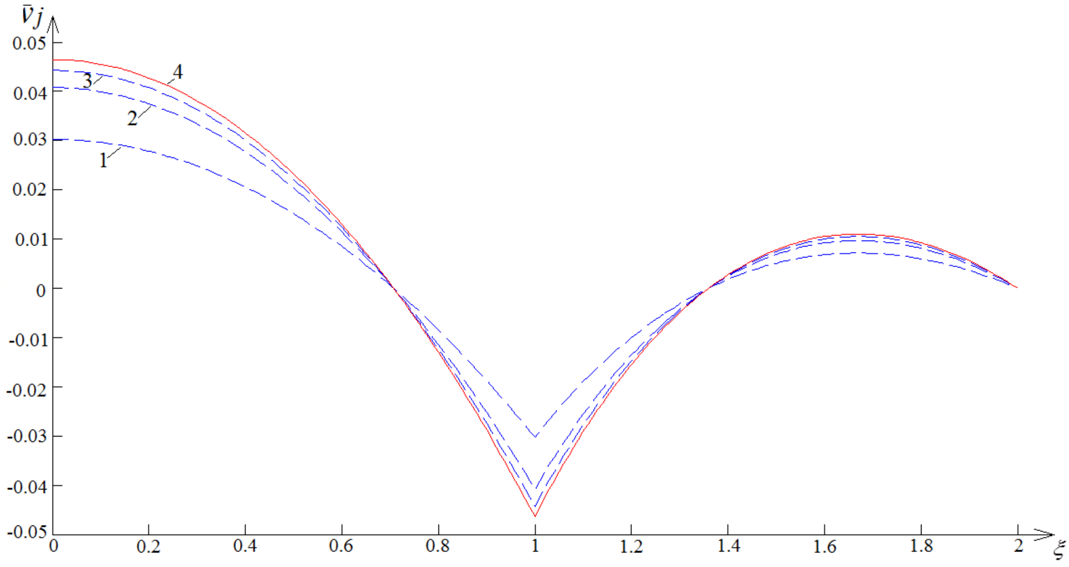


Рисунок 10. Безразмерные профили функций $\overline{v}_j$ at $\alpha(\tau) = 1 + e^{-\tau}\sin(\tau)$; curve 1: $\tau = 20$; curve 2: $\tau = 50$; curve 3: $\tau = 100$; curve 4: стационарное решение.

## 4.5 О стремлении решения к стационарному

Выход решения нестационарной задачи на стационарный режим при условии сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha^c - \alpha(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha'(\tau)|\,d\tau \tag{4.5.1}$$

можно показать, вводя разности

$$\bar{a}_j(r,t) = a_j^c(r) - a_j(r,t), \quad j = 1, 2, \tag{4.5.2}$$

где $a_j^c(r) \equiv \alpha^c$ — стационарное решение задачи (3.1.34) - (3.1.37). Тогда функции $\bar{a}_j(r,t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\bar{a}_{jt} = \chi_j\left(\bar{a}_{jrr} + \frac{1}{r}\,\bar{a}_{jr}\right),$$

причём граничные условия (3.1.37) останутся без изменений, первое условие (3.1.36) на боковой стенке трубы примет вид

$$\bar{a}_2(b,t) = \alpha^c - \alpha(t). \tag{4.5.3}$$

Изменятся также и начальные данные (3.1.35):

$$\bar{a}_j(r,0) = \alpha^c - a_{j0}(r) \equiv \bar{a}_{j0}(r). \tag{4.5.4}$$

Следовательно, для функций $\bar{a}_j(r,t)$ получим задачу, аналогичную задаче для $a_j(r,t)$. Поэтому (см. оценки (3.2.18), (3.2.25))

$$|a_j(r,t) - \alpha^c| \leqslant C_j e^{-\eta t/2}, \tag{4.5.5}$$

$C_j > 0$ — постоянные. Если дополнительно к (4.5.1) потребовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty |\alpha''(\tau)| e^{\eta\tau}\, d\tau, \tag{4.5.6}$$

то решение задачи для функций $v_j(r,t)$ (4.1.1) – (4.1.6) с ростом времени выходит на стационарный режим (4.2.1) – (4.2.3). Для доказательства этого утверждения достаточно ввести разности

$$\bar{v}_j(r,t) = v_j^c(r) - v_j(r,t), \quad \bar{f}_j(t) = f_j^c - f_j(t). \tag{4.5.7}$$

Они являются решением в точности такой же задачи, что и для функций $v_j(r,t)$. Используя оценки (4.3.15), (4.3.16), получим

$$|v_j(r,t) - v_j^c(r)| \leqslant W_j e^{-\eta_2 t/4}, \tag{4.5.8}$$

$W_j > 0$ — постоянные.

Нетрудно показать, что и функции $f_j(t)$ при $t \to \infty$ стремятся к их стационарным значениям (4.2.4), если сходятся интегралы (4.5.1) и (4.5.6). Это следует из оценок (4.3.22):

$$|f_j(t) - f_j^c| \leqslant H_j e^{-\eta_2 t/4}, \tag{4.5.9}$$

где $H_j > 0$ — постоянные.

Таким образом, имеет место

**Теорема 4.5.1.** Если интегралы (4.5.1), (4.5.6) сходятся, то функции $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ с ростом времени экспоненциально стремятся к их стационарным значениям.

# Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. (a) Построены решения в виде рядов Фурье по функциям Бесселя для сопряжённых задач о стационарном и нестационарном распределении тепла в конечном цилиндре, когда температура на всей границе цилиндров известна;
   (b) доказана сходимость построенных рядов;
   (c) доказана единственность решения;
   (d) указаны условия, при которых решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим.
2. Исследованы спектральные задачи об устойчивости равновесия:
   (a) двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела;
   (b) однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой.

   В обоих случаях получены явные зависимости спектрального параметра от геометрии области и физических параметров жидкостей.
3. (a) Получены априорные оценки обратных сопряжённых линейных задач, описывающих осесимметричное термокапиллярное движение при малом числе Марангони для двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. При этом их общая поверхность раздела предполагается недеформируемой и в одном случае является подвижной, а в другом – фиксированной;
   (b) даны достаточные условия сходимости решений обеих задач к стационарному режиму;
   (c) во второй задаче
   - найдено стационарное решение;
   - в образах по Лапласу решение получено в явном виде;
   - приведённые тестовые расчёты для конкретных жидких сред хорошо согласуются с полученными априорными оценками.

## Список литературы


[1] Абрамовица, М. Справочник по специальныи функциям / М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

[2] Андреев, В. К. Об одной сопряжённой начально-краевой задаче / В. К. Андреев // Дифференциальные уравнения. – 2008. – №5. – С. 1-7.

[3] Андреев, В. К. О неравенстве Фридрихса для составных областей / В. К. Андреев // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2009. – Т. 2. – № 2. – С. 146 – 157.

[4] Андреев, В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения / В. К. Андреев – Препринт №1-10. – Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2010. – 68 с.

[5] Андреев, В. К. Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. – 356 с.

[6] Андреев, В. К. Математическое моделирование конвективных течений: учебное пособие / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко. – Красноярск: КрасГУ, 2006. – 392 с.

[7] Андреев, В. К. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначёв. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.

[8] Андреев, В. К. Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. – Новосибирск: Наука, 2000. – 279 с.

[9] Андреев, В. К. Эволюция термокапилллярного движения трёх жидкостей в плоском слое / В. К. Андреев, Е. Н. Лемешкова // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. – Вып. 4. – С. 485-492.

[10] Андреев, В. К. Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения / В. К. Андреев, В. В. Пухначёв // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – Т. 14. – № 5. – С. 3-23.

[11] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

[12] Бирих, Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости / Р. В. Бирих // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – №3. – С. 69-72.

[13] Бирих, Р. В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры / Р. В. Бирих, В. В. Пухначёв // Доклады академии наук. – Т. 436. – №3. – С. 323-327.

[14] Бугаев, А. А. Термокапиллярные явления и образование рельефа поверхности под воздействием пикосекундных лазерных импульсов / А. А. Бугаев,

В. А. Лукошкин, В. А. Урпин, Д. Г. Яковлев // Журнал технической физики. – 1988. – Т. 58 – № 5. – С. 908 – 914.

[15] Варгафтик, Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

[16] Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. / Г. Н. Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1945. – 799 с.

[17] Веденов, А. А. Физические процессы при лазерной обработке металлов / А. А. Веденов, Г. Г. Гладуш. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 206 с.

[18] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 526 с.

[19] Воробьёв, Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьёв. – М.: Наука, 1979. – 408 с.

[20] Гончарова, О. Н. Групповая классификация уравнений свободной конвекции / О. Н. Гончарова // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: ИГ СО РАН СССР, 1987. – Вып. 79. – С. 22-35.

[21] Гончарова, О. Н. Гравитационно-термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое при спутном потоке газа / О. Н. Гончарова, О. А. Кабов // Доклады академии наук. – Т. 426. – №2. – С. 183-188.

[22] Зейтунян, Р. Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара - Марангони / Р. Х. Зейтунян // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 169. – Вып. 3. – С. 259-286.

[23] Катков, В. Л. Точные решения некоторых задач ковекции / В. Л. Катков // Прикладная математика и механика. – 1968. – №3. – С. 11-18.

[24] Кудрявцев, Л. Д. Курс математичекого анализа: учебное пособие для студентов университетов и вузов в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1989. – Т. 3. – 352 с.

[25] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

[26] Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

[27] Леонтьев, А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

[28] Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2010. – Т.4. – Вып. 4. – С. 519-526.

[29] Магденко, Е. П. Об определении стационарных полей температур в контактирующих конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам – Красноярск, 2010. – С. 74-78.

[30] Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов XI всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным – Красноярск, 2010. – С. 32.

[31] Магденко, Е. П. О потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела / Е. П. Мгденко // Журнал сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т.5. – Вып. 4. – С. 558-565.

[32] Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов 50-ой Международной студенческой научной конференции "Студент и научно-технический прогресс". – Новосибирск, 2012. – С. 112.

[33] Магденко, Е. П. О возникновении движения в конечном цилиндре / Е. П. Магденко // Журнал вычислительные технологии. – 2013. – Т.5. – Вып. 6 – С. 75-82.

[34] Магденко, Е. П. О линеаризованной сопряжённой задаче конвекции в конечном цилиндре / Е. П. Магденко // Материалы конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2013. – С. 85-90.

[35] Магденко, Е. П. Решение линеаризованной сопряжённой задачи конвекции в цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов конференции "Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения". – Санкт-Петербург, 2013. – С. 62-66.

[36] Магденко, Е. П. О возникновении конвекции в конечном цилиндре при наличии границы раздела / Е. П. Магденко // Тезисы докладов 5-ой Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения". – Бийск, 2014. – С. 68.

[37] Магденко, Е. П. Конвекция Марангони в конечном цилиндре / Е. П. Магденко // Журнал прикладная механика и техническая физика – 2016. – Т.1. – С. 142-151.

[38] Магденко, Е. П. Априорные оценки сопряжённой задачи, описывающей осесимметричное термокапиллярное движение при малых числах Марангони / Е. П. Магденко. – Препринт № 16-1. – Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2016. – 31 с.

[39] Мандельбройт, С. Ряды Дирихле. Принципы и методы / С. Мандельбройт. – М.: Мир, 1973. – 171 с.

[40] Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных проиходных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

[41] Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.
[42] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
[43] Овсянников, Л. В. Нелинейные проблемы теорииповерхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. - Новосибирск, Наука, 1985. – 318 с.
[44] Остроумов, Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи / Г. А. Остроумов. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 256 с.
[45] Полянин, А. Д. Справочник — линейные уравнения математической физики / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
[46] Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Бычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
[47] Пухначёв, В. В. Движение вязкой жидкости со свободными границами: учебное пособие / В. В. Пухначёв. – Новосибирск, 1989. – 96 с.
[48] Пухначёв, В. В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и егообобщения / В. В. Пухначёв // Труды II Международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения". – Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2000. – С. 180-183.
[49] Пухначёв, В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха / В. В. Пухначёв // Известия АлтГУ. – 2011. – №1/2. – С. 62-69.
[50] Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: Наука, – Т. 4. – ч. 1. – 1974.
[51] Репин, И. В. Стационарные течения двухслойной жидкости: магистерская диссертация / И. В. Репин. – Красноярск: КГУ, математический факультет, 2003. – С. 1-35.
[52] Рябицкий, Е. А. Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества / Е. А. Рябицкий // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1993. – №1. – С. 6-10.
[53] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов университетов и вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 4-ое изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
[54] Толстов, Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
[55] Хайбибулин, И. Г. Лазерный отжиг имплантированных полупроводников / И. Г. Хайбибулин, Е. И. Штырков, М. М. Зарипов // Известия академи наук СССР. Серия: физика. – 1981. – Т. 45. – № 8. – С. 1464-1473.
[56] Andreev, V. K. Stability of Non-isothermal Fluids (Review) / V. K. Andreev, V. B. Bekezhanova // J. Appl. Mech. and Tech. Phys. – 2013. – Vol. 54 – No. 2. – P. 171-184.

[57] Andreev, V. K. Mathematical Models of Convection / / V. K. Andreev, Y. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachov // Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2012.

[58] Andreev, V. K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Radionov A.A. Aplications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnacov, A. A. Radionov. – Dordnrcht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 1998. – 408 p.

[59] Dauby P. C. Linear Bernard-Marangoni instability in rigid circular containers / P. C. Dauby, G. Lebon, E. Bouhy // Physical Review E. – 1997. – V. 56. – P. 520-530.

[60] Denisova, I. V. On the problem of thermocapillary convection for two incompressible fluids separated by a closed interface / I. V. Denisova. – Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2005. – V. 61. – P. 45-64.

[61] Denisova, I. V. Thermocappilary convection problem for two compressible immiscible fluids / I. V. Denisova // Microgravity Sci. Technol. – 2008. – V. 20. – No 3-4. – P. 287-291.

[62] Magdenko, E. P. Axisymmetric Thermocapillary Motion in a Cylinder at Small Marangoni Number / E. P. Magdenko // Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – V.8. – No 3. – P. 303-311.

[63] Napolitano, L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow two immiscible fluids / L. G. Napolitano // Acta Astronautica. – 1980. – V. 7. – No. 4-5. – P. 461-478.

[64] Narayanan R. Interfacial Fluid Gynamics and Transport Processes / R. Narayanan, D. Schwabe – Berlin/Heidelberg/New-York: Springer-Verlag, 2009.

[65] Nepomnyashii, A. Interfacial Convection in Multilayer System / A. Nepomnyashii, I. Simanovskii, J.-C. Legros – New-York: Springer, 2006.

[66] Pearson, J. R. A. One convection cells induced by surface tension / J. R A. Pearson // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489–500.

[67] Rosenblat, S. Nonlinear Marangoni convection in bounded layers. Part 1. Circular cylindrical containers / S. Rosenblat, S. H. Davis, G. M. Homsy // J. Fluid Mech. – 1982. – V. 120. – P. 91–122.

[68] Ryabitskii, E. A. Thermocapillarity instability of liquid layer with internal heat generation / E. A. Ryabitskii // Microgravити science and technology. – 1994. – V. 7. – P. 20-23.

[69] Palmer, H. J. Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below / H. J. Palmer, J. C. Berg // J. Fluid. Mech. 1972. – V. 51. – Pt. 2. – P. 385 – 402.

[70] Scriven, L. E. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity / L. E. Scriven, C. V. Sternling // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 19. – P. 321–340.

[71] Smith, K. A. On convective instability induced by surface-tension gradients / K. A. Smith // J. Fluid Mech. – 1966. – V. 24. – Pt 2. – P. 401-414.
[72] Zeytovnian, R. Kh. Convection in Fluids / R. Kh. Zeytovnian – Dordrecht/Heidelberg/London/ New-York: Springer, 2009.