УДК 517.9

О задаче идентификации двух младших коэффициентов и коэффициента при производной по времени в параболическом уравнении

Анжелика В. Даценко*
Светлана В. Полынцева†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 10.10.2011

В работе доказана теорема существования и единственности классического решения задачи идентификации двух младших коэффициентов и коэффициента при производной по времени в классе гладких ограниченных функций.

При доказательстве теоремы существования и единственности решения обратной задачи применяется метод, позволяющий, используя условия переопределения, привести исходную обратную задачу к прямой задаче для нагруженного (содержащего следы неизвестных функций и их производных) уравнения. Исследование корректности полученной прямой задачи проведено методом слабой аппроксимации (МСА).

Ключевые слова: идентификация, обратная задача, уравнения параболического типа, начальные условия, метод слабой аппроксимации.

Введение

В математике, как и в других науках, важную роль занимают эксперименты. Цель эксперимента — выявление закономерностей и построение математической модели. В некоторых случаях сам объект недоступен для изучения напрямую в астрономии, геологии, медицине. Примерами могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать залежи полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений. Для непосредственных наблюдений колебаний Земли доступна лишь небольшая ее приповерхностная часть, а необходимо делать заключение о свойствах Земли по измеренным в ходе эксперимента косвенным проявлениям. Похожая ситуация возникает в проблемах неразрушающего контроля изделий и конструкций, когда требуется выявить дефект внутри работающего объекта.

В таких ситуациях мы сталкиваемся с математическим моделированием (постановкой прямых и обратных задач математической физики). Одним из наиболее сложных видов обратных задач являются коэффициентные, которые в настоящее время вызывают большой

*DatsenkoAn@gmail.com
†siriuspsv@mail.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

интерес и исследовались Ю.Е.Аниконовым, С.Н.Барановым, Н.Я.Безнощенко, Ю.Я.Беловым, Н.И.Иванчовым, В.М.Исаковым, А.Д.Искендеровым, В.Л.Камыниным, М.М.Лаврентьевым, С.В.Полынцевой, А.И.Прилепко, В.Г.Романовым, А.Н.Тихоновым, И.В.Фроленковым, Т.Н.Шипиной [1–5] и др.

Отметим, что ранее однозначная разрешимость задач идентификации трех неизвестных коэффициентов параболических уравнений доказывалась в классах функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности по выделенной переменной [2, 6].

Доказательство существования и единственности решения задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении в классах гладких ограниченных функций рассматривалось в работе [7].

Цель работы — доказать однозначную разрешимость задачи идентификации трех различных коэффициентов параболического уравнения в классе гладких ограниченных функций.

В работе на основе условий переопределения данная обратная задача приводится к прямой задаче для нагруженного уравнения. Доказывается однозначная разрешимость прямой задачи в предположении достаточно гладких входных данных, используя метод слабой аппроксимации [8].

Решение исходной обратной задачи выписывается в явном виде через решение прямой задачи. На этой основе доказывается теорема существования и единственности классического решения обратной задачи.

1. Постановка задачи и приведение ее к прямой задаче

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1, z \in E_1\}$ рассмотрим задачу Коши

$$a_1(t,x)u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + q_1(t)u_{zz}(t,x,z) + q_2(t)u_z(t,x,z) + \\ + a_2(t,x)u(t,x,z) + a_3(t,x)f(t,x,z), \quad (1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad (x,z) \in E_2. \quad (2)$$

Здесь функции $f(t,x,z), u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_2 соответственно,

$$L_x(u(t,x,z)) = \alpha_1(t)u_{xx}(t,x,z) + \alpha_2(t)u_x(t,x,z),$$

коэффициенты $q_i(t), \alpha_j(t),\ i,j = 1,2,$ — непрерывно дифференцируемые действительнозначные функции переменной $t,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ T > 0 - \text{const}$, причем $\alpha_1(t) > 0,\ q_1(t) > 0$. E_n — n-мерное евклидово пространство.

Неизвестными в задаче являются коэффициенты $a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предположим, что выполняются условия переопределения

$$u(t,x,b) = \psi_1(t,x), \quad u_z(t,x,b) = \psi_2(t,x), \quad u_{zz}(t,x,b) = \psi_3(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (3)$$

где $b = \text{const},\ \Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_1\}$ и $\psi_1(t,x)$, $\psi_2(t,x)$, $\psi_3(t,x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\psi_1(0,x) = u_0(x,b), \quad \psi_2(0,x) = u_{0z}(x,b), \quad \psi_3(0,x) = u_{0zz}(x,b). \quad (4)$$

Ниже мы рассматриваем классические (достаточно гладкие) решения.

Под решением обратной задачи (1)–(3) в полосе $G_{[0,t_*]}, 0 < t_* \leqslant T$, понимается четверка функций $a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x), u(t,x,z)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)–(3).

Приведем задачу (1)–(3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Положим $z = b$ в (1), получим

$$a_1(t,x)u_t(t,x,b) = L_x(u(t,x,b)) + q_1(t)u_{zz}(t,x,b) + q_2(t)u_z(t,x,b) + \\ + a_2(t,x)u(t,x,b) + a_3(t,x)f(t,x,b).$$

Откуда, в силу (3), получим

$$a_1(t,x)\psi_{1t}(t,x) = L_x(\psi_1(t,x)) + q_1(t)u_{zz}(t,x,b) + q_2(t)u_z(t,x,b) + \\ + a_2(t,x)\psi_1(t,x) + a_3(t,x)f(t,x,b). \quad (5)$$

Продифференцируем по z (1) и положим $z = b$, в силу (3), получим

$$a_1(t,x)\frac{\partial\psi_2(t,x)}{\partial t} = L_x(\psi_2(t,x)) + q_1(t)\frac{\partial^3 u(t,x,b)}{\partial z^3} + q_2(t)\frac{\partial^2 u(t,x,b)}{\partial z^2} + \\ + a_2(t,x)\psi_2(t,x) + a_3(t,x)\frac{\partial f(t,x,b)}{\partial z}. \quad (6)$$

Продифференцируем уравнение (1) дважды по z и положим $z = b$, в силу (3), получим

$$a_1(t,x)\frac{\partial\psi_3(t,x)}{\partial t} = L_x(\psi_3(t,x)) + q_1(t)\frac{\partial^4 u(t,x,b)}{\partial z^4} + q_2(t)\frac{\partial^3 u(t,x,b)}{\partial z^3} + \\ + a_2(t,x)\psi_3(t,x) + a_3(t,x)\frac{\partial^2 f(t,x,b)}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Запишем (5)–(7) в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1(t,x)\psi_{1t}(t,x) - a_2(t,x)\psi_1(t,x) - a_3(t,x)f(t,x,b), \\ P_2 &= a_1(t,x)\psi_{2t}(t,x) - a_2(t,x)\psi_2(t,x) - a_3(t,x)f_z(t,x,b), \\ P_3 &= a_1(t,x)\psi_{3t}(t,x) - a_2(t,x)\psi_3(t,x) - a_3(t,x)f_{zz}(t,x,b), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$P_1 = L_x(\psi_1(t,x)) + q_1(t)u_{zz}|_{z=b} + q_2(t)u_z|_{z=b}, P_2 = L_x(\psi_2(t,x)) + q_1(t)u_{zzz}|_{z=b} + q_2(t)u_{zz}|_{z=b},$$
$$P_3 = L_x(\psi_3(t,x)) + q_1(t)u_{zzzz}|_{z=b} + q_2(t)u_{zzz}|_{z=b}.$$

Находим решение системы (8):

$$a_1(t,x) = \frac{-\psi_1 f_z P_3 + f P_3\psi_2 + \psi_1 P_2 f_{zz} - \psi_2 P_1 f_{zz} - f P_2\psi_3 + f_z P_1\psi_3}{-\psi_1 f_z\psi_{3t} + f\psi_2\psi_{3t} - \psi_{1t}\psi_2 f_{zz} + \psi_{1t} f_z\psi_3 + \psi_1 f_{zz}\psi_{2t} - f\psi_3\psi_{2t}}, \quad (9)$$

$$a_2(t,x) = \frac{-\psi_{1t} f_z P_3 - f P_2\psi_{3t} + f_z P_1\psi_{3t} + \psi_{1t} P_2 f_{zz} + f P_3\psi_{2t} - P_1 f_{zz}\psi_{2t}}{-\psi_1 f_z\psi_{3t} + f\psi_2\psi_{3t} - \psi_{1t}\psi_2 f_{zz} + \psi_{1t} f_z\psi_3 + \psi_1 f_{zz}\psi_{2t} - f\psi_3\psi_{2t}}, \quad (10)$$

$$a_3(t,x) = \frac{\psi_{1t} P_3\psi_2 + \psi_1 P_2\psi_{3t} - \psi_2 P_1\psi_{3t} - \psi_{1t} P_2\psi_3 - \psi_1 P_3\psi_{2t} + P_1\psi_3\psi_{2t}}{-\psi_1 f_z\psi_{3t} + f\psi_2\psi_{3t} - \psi_{1t}\psi_2 f_{zz} + \psi_{1t} f_z\psi_3 + \psi_1 f_{zz}\psi_{2t} - f\psi_3\psi_{2t}}, \quad (11)$$

где $f = f(t,x,b)$, $f_z = f_z(t,x,b)$, $f_{zz} = f_{zz}(t,x,b)$, $\psi_1 = \psi_1(t,x)$, $\psi_2 = \psi_2(t,x), \psi_3 = \psi_3(t,x)$, $\psi_{1t} = \psi_{1t}(t,x)$, $\psi_{2t} = \psi_{2t}(t,x)$, $\psi_{3t} = \psi_{3t}(t,x)$.

Введем следующие обозначения:

$$A = -\psi_1 f_z P_3 + f P_3 \psi_2 + \psi_1 P_2 f_{zz} - \psi_2 P_1 f_{zz} - f P_2 \psi_3 + f_z P_1 \psi_3,$$
$$B = -\psi_{1t} f_z P_3 - f P_2 \psi_{3t} + f_z P_1 \psi_{3t} + \psi_{1t} P_2 f_{zz} + f P_3 \psi_{2t} - P_1 f_{zz} \psi_{2t},$$
$$D = \psi_{1t} P_3 \psi_2 + \psi_1 P_2 \psi_{3t} - \psi_2 P_1 \psi_{3t} - \psi_{1t} P_2 \psi_3 - \psi_1 P_3 \psi_{2t} + P_1 \psi_3 \psi_{2t}.$$

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$ выполняется условие

$$E = -\psi_1 f_z \psi_{3t} + f \psi_2 \psi_{3t} - \psi_{1t} \psi_2 f_{zz} + \psi_{1t} f_z \psi_3 + \psi_1 f_{zz} \psi_{2t} - f \psi_3 \psi_{2t} \geqslant \delta_1 > 0, \tag{12}$$

где $\delta_1 = \text{const}$.

Подставляя (9)–(11) в (1) и учитывая введенные обозначения, переходим к прямой задаче

$$\frac{A}{E} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + q_1(t) u_{zz}(t,x,z) + q_2(t) u_z(t,x,z) + \frac{B}{E} u(t,x,z) + \frac{D}{E} f(t,x,z), \tag{13}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{14}$$

Введем срезающую функцию $S_\delta(\theta)$ класса $C^4(E_1)$, $\delta > 0$, $\delta = \text{const}$, обладающую следующими свойствами: $S_\delta(\theta) \geqslant \dfrac{\delta}{3}$, $\theta \in E_1$ и

$$S_\delta(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \geqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ \dfrac{\delta}{3}, & \theta \leqslant \dfrac{\delta}{3}. \end{cases} \tag{15}$$

Поставим срезку на числитель коэффициента $a_1(t,x)$, и уравнение (13) примет вид

$$\frac{S_\delta(A)}{E} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + q_1(t) u_{zz}(t,x,z) + q_2(t) u_z(t,x,z) + \\ + \frac{B}{E} u(t,x,z) + \frac{D}{E} f(t,x,z). \tag{16}$$

Далее докажем однозначную разрешимость прямой задачи (16), (14).

2. Разрешимость прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (16), (14) применим метод слабой аппроксимации. Расщепим задачу (14), (16) и линеаризуем ее сдвигом по времени на $\tau/3$ в нелинейных членах, получим задачу

$$u_t^\tau(t,x,z) = 3 \frac{E}{S_\delta(A^\tau)} L_x(u^\tau(t,x,z)), \quad n\tau < t \leqslant (n+1/3)\tau, \tag{17}$$

$$u_t^\tau(t,x,z) = 3 \frac{E}{S_\delta(A^\tau)} (q_1(t) u_{zz}^\tau(t,x,z) + q_2(t) u_z^\tau(t,x,z)), \quad (n+1/3)\tau < t \leqslant (n+2/3)\tau, \tag{18}$$

$$u_t^\tau(t,x,z) = \frac{3}{S_\delta(A^\tau)} (B^\tau u^\tau(t,x,z) + D^\tau f(t,x,z)), \quad (n+2/3)\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{19}$$

$$u^\tau(t,x,z)|_{t \leqslant 0} = u_0(x,z), \quad x \in E_1, z \in E_1, \tag{20}$$

где

$$
\begin{aligned}
A^\tau &= -\psi_1 f_z P_3^\tau + f P_3^\tau \psi_2 + \psi_1 P_2^\tau f_{zz} - \psi_2 P_1^\tau f_{zz} - f P_2^\tau \psi_3 + f_z P_1^\tau \psi_3,\\
B^\tau &= -\psi_{1t} f_z P_3^\tau - f P_2^\tau \psi_{3t} + f_z P_1^\tau \psi_{3t} + \psi_{1t} P_2^\tau f_{zz} + f P_3^\tau \psi_{2t} - P_1^\tau f_{zz} \psi_{2t},\\
D^\tau &= \psi_{1t} P_3^\tau \psi_2 + \psi_1 P_2^\tau \psi_{3t} - \psi_2 P_1^\tau \psi_{3t} - \psi_{1t} P_2^\tau \psi_3 - \psi_1 P_3^\tau \psi_{2t} + P_1^\tau \psi_3 \psi_{2t},\\
P_1^\tau &= L_x(\psi_1(t,x)) + q_1(t) u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b) + q_2(t) u_z^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b),\\
P_2^\tau &= L_x(\psi_2(t,x)) + q_1(t) u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b) + q_2(t) u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b),\\
P_3^\tau &= L_x(\psi_3(t,x)) + q_1(t) u_{zzzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b) + q_2(t) u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, b),\\
& n = \overline{0, N-1},\ \tau N = T,\ N > 1 - \text{целое}.
\end{aligned}
$$

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&U^{\tau,t_0}(t) = \sum_{k=0}^{12} U_k^{\tau,t_0}(t),\\
&U_k^{\tau,t_0}(t) = \sup_{t_0<\xi\leqslant t} \sup_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(\xi,x,z) \right|,\\
&U_k^{\tau,t_0}(t_0) = \sup_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t_0,x,z) \right|,\\
&U_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u_0(x,z) \right|, \quad t_0 \in [0, (n+\frac{p}{3})\tau), t \in (t_0, (n+\frac{p}{3})\tau], t > t_0, p = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Функции $U^{\tau,t_0}(t), U_k^{\tau,t_0}(t)$ и $U_k^{\tau,t_0}(t_0)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(n\tau, (n+1)\tau]$.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяют ему:

$$
|q_i(t)| + |\alpha_j(t)| + \left| \frac{\partial^{m+r}}{\partial x^m \partial t^r} \psi_l \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u_0(x,z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t,x,z) \right| \leqslant C. \tag{22}
$$

Здесь $m = \overline{0,4}$; $r = 0,1$; $i,j = 1,2$; $l = 1,2,3$; $k = \overline{0, 12-2m}$; $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$; $C-\text{const}$; $C > 1$.

Сейчас докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x,z)\}$ задачи (17)–(20) в классе гладких ограниченных функций.

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$).

На первом дробном шаге ($p = 1$) рассмотрим (17), (20), учитывая свойства срезающей функции (15), условия (12), (22), в силу принципа максимума [9], получим

$$
|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|, \quad \xi \in (0,t], 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{23}
$$

Дифференцируя уравнения (17), (20) по z от одного до 12 раз соответственно и применяя аналогичные рассуждения, получим оценки

$$
\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(\xi,x,z) \right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u_0(x,z) \right|, \quad \xi \in (0,t], 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}, \quad k = \overline{1,12}. \tag{24}
$$

Возьмем от левых частей неравенств (23), (24) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_1\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$ и сложим данные 13 неравенств (23), (24). Получим

$$U^{\tau,0}(t)\leqslant U(0),\quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{3}. \tag{25}$$

На втором дробном шаге ($p=2$), $\quad t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, учитывая свойства срезающей функции (15), условия (12), (22), в силу принципа максимума [9], получим

$$U^{\tau,\frac{\tau}{3}}(t)\leqslant U^{\tau,\frac{\tau}{3}}\left(\frac{\tau}{3}\right),\quad \frac{\tau}{3}<t\leqslant\frac{2\tau}{3}. \tag{26}$$

На третьем дробном шаге ($p=3$), интегрируя уравнение (19) по t в пределах от $\dfrac{2\tau}{3}$ до ξ, получим

$$u^\tau(\xi,x,z)=u^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)+\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\frac{3}{S_\delta(A^\tau)}(B^\tau u^\tau+D^\tau f(\eta,x,z))\,d\eta.$$

Отсюда следует неравенство

$$|u^\tau(\xi,x,z)|\leqslant\left|u^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right|+\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|\frac{3}{S_\delta(A^\tau)}\right|(|B^\tau||u^\tau|+|D^\tau||f(\eta,x,z)|)\,d\eta,\xi\in(2\tau/3,t],2\tau/3<t\leqslant\tau.$$

В силу (15), (21), (22) легко можно получить оценку

$$U^{\tau,\frac{2\tau}{3}}(t)\leqslant U^{\tau,2\tau/3}(2\tau/3)+C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}L_2(U^{\tau,2\tau/3}(\xi))d\,\xi,\quad t\in[2\tau/3,\tau],$$

где $L_2(\xi)=C(\xi^2+\xi+1)$ — полином второго порядка с положительным коэффициентом C, не зависящим от τ.

Аналогично рассуждая, на $n-$м шаге можно получить оценку при $t\in[(n+2/3)\tau,(n+1)\tau]$

$$U^{\tau,(n+\frac{2}{3})\tau}(t)\leqslant U^{\tau,(n+\frac{2}{3})\tau}((n+2/3)\tau)+C\int\limits_{(n+\frac{2}{3})\tau}^{t}L_2(U^{\tau,(n+\frac{2}{3})\tau}(\xi))d\,\xi. \tag{27}$$

Полагаем, что $\omega(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\omega(t)}{dt}=L_2(\omega(t)),\quad \omega(0)=U(0). \tag{28}$$

Известно, что $\omega(t)$ существует на некотором промежутке $[0,t_1^*]$, где t_1^* — константа, $T\geqslant t_1^*>0$, зависящая от коэффициентов полинома L_2 и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ монотонно возрастающая на промежутке $[0,t_1^*]$ и $\omega\in C^1([0,t_1^*])$. Имеет место лемма:

Лемма. *Пусть выполняются* (27), (28) *и* $t_n=n\tau$. *Тогда, если* $U^{\tau,t_n+\frac{2\tau}{3}}(t_n+2\tau/3)\leqslant\omega(t_n+2\tau/3)$, *то*

$$U^{\tau,t_n+\frac{2\tau}{3}}(t)\leqslant\omega(t),\quad t\in[t_n+2\tau/3,t_{n+1}]. \tag{29}$$

Из (25), (26), (29) и строгой монотонности функции $\omega(t)$ следует, что

$$U^{\tau,0}(t) \leqslant \omega(\tau), \quad t \in [0,\tau].$$

Рассуждая аналогично, на первом целом шаге ($n = 1$) получим оценку

$$U^{\tau,\tau}(t) \leqslant \omega(2\tau), \quad t \in [\tau, 2\tau].$$

Продолжая наши рассуждения, через конечное число шагов получим равномерную по τ оценку

$$U^{\tau,0}(t) \leqslant \omega(t_1^*) = C, t \in [0, t_1^*],$$

откуда равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(t,x,z)}{\partial z^k}\right| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_1^*]}, \quad k = \overline{0,12}.$$

Дифференцируя задачу (17)–(20) по переменной x один, два, три и четыре раза и используя аналогичные рассуждения, получим соответственно равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad \nu = \overline{1,4}, \quad k = \overline{0,12-2\nu}, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_{\nu+1}^*]},$$

где $t_{\nu+1}^*$ — некоторые постоянные, зависящие от δ, δ_1 и константы C, ограничивающей начальные данные, такие, что $0 < t_{\nu+1}^* \leqslant t_\nu^*$, $\nu = \overline{1,4}$.

Таким образом, при $(t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, m = \overline{0,4}, k = \overline{0,12-2m}, (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}. \tag{30}$$

Используя оценку (30) и уравнения (17)–(19), получим равномерно по τ

$$|u_t^\tau(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}.$$

Продифференцируем уравнения (17)–(19) один раз по z. В силу оценки (30), правая часть получившихся уравнений будет ограничена равномерно по τ, а значит, и левая часть будет также ограничена равномерно по τ:

$$|u_{tz}^\tau(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}.$$

По аналогии получим равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = \overline{1,6}, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_{tx}^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = \overline{0,4}, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_{txx}^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = \overline{0,4}, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}.$$

Выполнены следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = \overline{0,6},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| +$$

$$+ \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, k = \overline{0,4}, m = \overline{0,2}.$$

В силу теоремы Арцела о компактности [10] некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^{\tau}(t,x,z)$ решений задачи (17)–(20) сходится вместе с соответствующими производными по x и z к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]}) \bigcap C^{0,0,6}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]})$. Доказано на основании теоремы метода слабой аппроксимации [8], что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (16), (14), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]}) \bigcap C^{0,0,6}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]})$, где

$$C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]}) = \{f(t,x,z)|,\ f_t \in C(G_{[0,t_5^*]}),\ \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t_5^*]}), \quad m=0,1,2, \quad k=\overline{0,4}\},$$
$$C^{0,0,6}_{t,x,z}(G_{[0,t_5^*]}) = \{f(t,x,z)|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t_5^*]}), \quad k=\overline{0,6}\}. \quad (31)$$

При этом при $(t,x,z) \in G_{[0,t_5^*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k=\overline{0,6}, \quad (32)$$
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad m=0,1,2, \quad k=\overline{0,4}. \quad (33)$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (16), докажем, что при $(t,x) \in \Pi_{[0,t_5^*]}$ выполняется

$$A = A(t,x) = -\psi_1 f_z P_3 + f P_3 \psi_2 + \psi_1 P_2 f_{zz} - \psi_2 P_1 f_{zz} - f P_2 \psi_3 + f_z P_1 \psi_3 \geqslant \frac{\delta}{2} > 0.$$

Рассмотрим производную по t от функции A:

$$A_t = -\psi_{1t} f_z P_3 - \psi_1 f_{zt} P_3 - \psi_1 f_z P_{3t} + f_t \psi_2 P_3 + f \psi_{2t} P_3 + f \psi_2 P_{3t} + \psi_{1t} f_{zz} P_2 +$$
$$+ \psi_1 f_{zzt} P_2 + \psi_1 f_{zz} P_{2t} - \psi_{2t} f_{zz} P_1 - \psi_2 f_{zzt} P_1 - \psi_2 f_{zz} P_{1t} - f_t \psi_3 P_2 - f \psi_{3t} P_2 -$$
$$- f \psi_3 P_{2t} + f_{zt} \psi_3 P_1 + f_z \psi_{3t} P_1 + f_z \psi_3 P_{1t} \equiv N(t,x), \quad (34)$$

где

$$P_{1t} = \alpha_1'(t)\psi_{1xx} + \alpha_2'(t)\psi_{1x} + L_x(\psi_{1t}) + q_1'(t) u_{zz}|_{z=b} + q_1(t) u_{zzt}|_{z=b} +$$
$$+ q_2'(t) u_z|_{z=b} + q_2(t) u_{zt}|_{z=b},$$
$$P_{2t} = \alpha_1'(t)\psi_{2xx} + \alpha_2'(t)\psi_{2x} + L_x(\psi_{2t}) + q_1'(t) u_{zzz}|_{z=b} + q_1(t) u_{zzzt}|_{z=b} + q_2'(t) u_{zz}|_{z=b} +$$
$$+ q_2(t) u_{zzt}|_{z=b},$$
$$P_{3t} = \alpha_1'(t)\psi_{3xx} + L_x(\psi_{3t}) + \alpha_2'(t)\psi_{3x} + q_1'(t) u_{zzzz}|_{z=b} +$$
$$+ q_1(t) u_{zzzzt}|_{z=b} + q_2'(t) u_{zzz}|_{z=b} + q_2(t) u_{zzzt}|_{z=b}.$$

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$

$$|\alpha_1'(t)| + |\alpha_2'(t)| + |q_1'(t)| + |q_2'(t)| + |f_t|_{z=b}| + |f_{zt}|_{z=b}| + |f_{zzt}|_{z=b}| \leqslant C, \quad (35)$$

$$A(0,x) = -\psi_1(0,x) f_z(0,x,b) P_{3_0} + f(0,x,b)\psi_2(0,x) P_{3_0} + \psi_1(0,x) f_{zz}(0,x,b) P_{2_0} -$$
$$- \psi_2(0,x) f_{zz}(0,x,b) P_{1_0} - f(0,x,b)\psi_3(0,x) P_{2_0} + f_z(0,x,b)\psi_3(0,x) P_{1_0} \geqslant \delta > 0, \quad (36)$$

где $\delta - \mathrm{const}$,

$$P_{1_0} = L_x(\psi_1(0,x)) + q_1(0)u_{0zz}|_{z=b} + q_2(0)u_{0z}|_{z=b},$$
$$P_{2_0} = L_x(\psi_2(0,x)) + q_1(0)u_{0zzz}|_{z=b} + q_2(0)u_{0zz}|_{z=b},$$
$$P_{3_0} = L_x(\psi_3(0,x)) + q_1(0)u_{0zzzz}|_{z=b} + q_2(0)u_{0zzz}|_{z=b}.$$

В силу (22), полученных оценок (32), (33) и (35): $|N(t,x)| \leqslant Q(\delta)$, здесь $Q(\delta)$ — постоянная, зависящая от δ и постоянных, ограничивающих входные данные.

Проинтегрируем (34) по t

$$A = A(0,x) + \int\limits_0^t N(\theta,x)\,d\theta.$$

В силу (36), $A \geqslant \delta - Q(\delta)t$ и

$$A \geqslant \frac{\delta}{2} \text{ при } t \in [0,t_*], \text{ где } t_* = \min\{t_5^*; \frac{\delta}{2Q(\delta)}\}. \tag{37}$$

В силу определения срезки $S_\delta(\theta)$ (15), следует, что $S_\delta(A) = A$ при $t \in [0,t_*]$. Таким образом, в уравнении (16) срезка снимается. Функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению (13).

Тем самым доказано существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (13), (14) в классе $C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \bigcap C^{0,0,6}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$.

3. Существование классического решения обратной задачи

Докажем, что четверка функций $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$, $u(t,x,z)$, где $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$ представимы в виде (9)–(11), является классическим решением обратной задачи (1)–(3). Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи (13),(14), то, подставляя $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$, $u(t,x,z)$ в (1), получаем верное тождество.

В силу (22), (32), (33) из представлений (9)–(11), (13) следует, что четверка функций $a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x), u(t,x,z)$ принадлежит классу

$$Z(t_*) = \{a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x), u(t,x,z) | u \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \bigcap C^{0,0,6}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]});$$

$$a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{k=0}^{6}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C, \sum_{k=0}^{4}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \tag{38}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_1(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_2(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_3(t,x)\right| \leqslant C, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t_*]}. \tag{39}$$

Здесь

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]}) = \{a_2(t,x) \mid \frac{\partial^m}{\partial x^m}a_2(t,x) \in C(\Pi_{[0,t_*]}), \quad m = 0,1,2\}.$$

Используя условия согласования (4), легко можно доказать выполнение условий переопределения (3).

Таким образом, мы доказали, что существуют решения $a_1(t,x), a_2(t,x), a_3(t,x), u(t,x,z)$ задачи (1)–(3) в классе $Z(t_*)$.

4. Единственность классического решения обратной задачи

Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $u_1(t,x,z), a_{11}(t,x), a_{21}(t,x), a_{31}(t,x)$ и $u_2(t,x,z), a_{12}(t,x), a_{22}(t,x), a_{32}(t,x)$ — два классических решения задачи (1)–(3). Причем четверка функций $u_1(t,x,z), a_{11}(t,x), a_{21}(t,x), a_{31}(t,x)$ — решение, определяемое соотношениями (9)–(11). А четверка функций $u_2(t,x,z), a_{12}(t,x), a_{22}(t,x), a_{32}(t,x)$ — некоторое другое решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям (38),(39). Тогда справедливы соотношения

$$a_{11}(t,x)u_{1t} = L_x(u_1) + q_1(t)u_{1zz} + q_2(t)u_{1z} + a_{21}(t,x)u_1(t,x,z) + a_{31}(t,x)f(t,x,z),$$
$$a_{12}(t,x)u_{2t} = L_x(u_2) + q_1(t)u_{2zz} + q_2(t)u_{2z} + a_{22}(t,x)u_2(t,x,z) + a_{32}(t,x)f(t,x,z),$$
$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), u_1(t,x,b) = \psi_1(t,x), u_{1z}(t,x,b) = \psi_2(t,x), u_{1zz}(t,x,b) = \psi_3(t,x),$$
$$u_2(0,x,z) = u_0(x,z), u_2(t,x,b) = \psi_1(t,x), u_{2z}(t,x,b) = \psi_2(t,x), u_{2zz}(t,x,b) = \psi_3(t,x).$$

Разность

$$u(t,x,z) = u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a_1(t,x)}{a_{12}(t,x)}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{L_x(u)}{a_{12}(t,x)} + \frac{q_1(t)}{a_{12}(t,x)}u_{zz} + \frac{q_2(t)}{a_{12}(t,x)}u_z + \frac{a_{22}(t,x)}{a_{12}(t,x)}u + \\ + \frac{a_2(t,x)}{a_{12}(t,x)}u_1 + \frac{a_3(t,x)}{a_{12}(t,x)}f(t,x,z), \quad (40)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (41)$$

Здесь $a_{12}(t,x) \geqslant a_0 > 0$, a_0 — некоторая постоянная, зависящая от δ (см. (37)) и постоянных, ограничивающих входные данные.

Так как $a_{11}(t,x)$, $a_{21}(t,x)$, $a_{31}(t,x)$, $a_{12}(t,x), a_{22}(t,x)$, $a_{32}(t,x)$ можно представить формулами (9)–(11), используя входные данные и функции $u_j (j = 1,2)$, то, в силу (12), (22), (38), имеет место неравенство при $k = \overline{0,4}$, $t \in [0,t_*]$,

$$\left| d_1(t,x)\frac{\partial^{k+1}u_1(t,x,z)}{\partial t \partial z^k} + d_2(t,x)\frac{\partial^k u_1(t,x,z)}{\partial z^k} + d_3(t,x)\frac{\partial^k f(t,x,z)}{\partial z^k} \right| \leqslant CV(t),$$
$$\text{где} \qquad d_1(t,x) = -\frac{a_1(t,x)}{a_{12}(t,x)}, \quad d_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)}{a_{12}(t,x)}, \quad d_3(t,x) = \frac{a_3(t,x)}{a_{12}(t,x)}. \quad (42)$$

Здесь $V(t) = \sum\limits_{m=0}^{4} V_m(t)$, $V_m(t) = \sup\limits_{G_{[0,t]}} \left| \frac{\partial^m u(\theta,x,z)}{\partial z^m} \right|$, константа C зависит от δ, δ_1 и констант, которые ограничивают модули функций: $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\partial^{l+1}u_1/\partial t \partial z^l$, $\partial^l u_1(t,x,z)/\partial z^l$, $\partial^l f(t,x,z)/\partial z^l$, $l = \overline{0,4}$.

Из (41), (42) и принципа максимума [9] для уравнения (40) имеет место оценка

$$|u(\theta,x,z)| \leqslant C_1 V(t)t, \quad \theta \in [0,t], \text{ где } C_1 = Ce^{ht_*}, h = \sup_{\Pi_{[0,t_*]}} \left|\frac{a_{22}(t,x)}{a_{12}(t,x)}\right|. \tag{43}$$

Применим оператор $\partial^m/\partial z^m, m = 1,2,3,4$ к уравнению (40). Для функции $\partial^m u/\partial z^m$, повторяя наши рассуждения, которые использовались для вывода оценки (43), получим неравенство

$$\left|\frac{\partial^m u(\theta,x,z)}{\partial z^m}\right| \leqslant C_1 V(t)t, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant t \leqslant t_*, \quad m = \overline{1,4}. \tag{44}$$

Из (43), (44) получаем неравенство

$$V_m(t) \leqslant C_1 V(t)t, \quad m = \overline{0,4}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*\,,$$

из которого следует, что $V(t) \leqslant 5C_1 V(t)t$ или

$$(1 - 5C_1 t)V(t) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*\,. \tag{45}$$

Из неравенства (45) следует, что $V(t) = 0$ при $t \in [0,\xi]$, где $\xi < 1/(5C_1)$. Доказали, что в $G_{[0,\xi]}$ функция $u = u_1 - u_2 = 0$.

Аналогично докажем, что в $G_{[\xi,2\xi]}$ функция $u = 0$, и, следовательно, $u = 0$ в $G_{[0,2\xi]}$. Продолжая наши рассуждения, через конечное число шагов докажем, что

$$u = 0 \quad \text{в } G_{[0,t_*]}. \tag{46}$$

Из (40), (46) получим

$$-\frac{a_1(t,x)}{a_{12}(t,x)}u_{1t}(t,x,z) + \frac{a_2(t,x)}{a_{12}(t,x)}u_1(t,x,z) + \frac{a_3(t,x)}{a_{12}(t,x)}f(t,x,z) = 0 \quad \text{в } G_{[0,t_*]}$$

или

$$-a_1(t,x)u_{1t}(t,x,z) + a_2(t,x)u(t,x,z) + a_3(t,x)f(t,x,z) = 0 \quad \text{в } G_{[0,t_*]}. \tag{47}$$

Из (47), используя (3), получим систему уравнений:

$$-a_1(t,x)\psi_{1t}(t,x) + a_2(t,x)\psi_1(t,x) + a_3(t,x)f(t,x,b) = 0,$$
$$-a_1(t,x)\psi_{2t}(t,x) + a_2(t,x)\psi_2(t,x) + a_3(t,x)f_z(t,x,b) = 0,$$
$$-a_1(t,x)\psi_{3t}(t,x) + a_2(t,x)\psi_3(t,x) + a_3(t,x)f_{zz}(t,x,b) = 0.$$

Определитель системы

$$E = E(t,x) = \begin{vmatrix} -\psi_{1t}(t,x) & \psi_1(t,x) & f(t,x,b) \\ -\psi_{2t}(t,x) & \psi_2(t,x) & f_z(t,x,b) \\ -\psi_{3t}(t,x) & \psi_3(t,x) & f_{zz}(t,x,b) \end{vmatrix} = -\psi_1 f_z \psi_{3t} + f\psi_2\psi_{3t} -$$
$$- \psi_{1t}\psi_2 f_{zz} + \psi_{1t} f_z \psi_3 + \psi_1 f_{zz}\psi_{2t} - f\psi_3\psi_{2t} \neq 0$$

в силу (12).

Следовательно, $a_1(t,x) = a_2(t,x) = a_3(t,x) = 0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$.

Доказали, что в классе $Z(t_*)$ может существовать не более одного решения задачи (1)–(3). Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть выполняются условия* (4), (12), (22), (35), (36). *Тогда существует единственное решение* $u(t,x,z)$, $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (38), (39). *Постоянная* $t_*, 0 < t_* \leqslant T$, *зависит от постоянных* C, δ, δ_1 *из соотношений* (12), (22), (35), (36).

Список литературы

[1] Ю.Е.Аниконов, Б.А.Бубнов, Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения, *Докл. АН СССР*, **298**(1988), № 4, 777–779.

[2] С.Н.Баранов, Ю.Я.Белов, О задаче идентификации трех коэффициентов с неоднородными условиями переопределения, *Вычислительные технологии*, **8**(2003), № 4, 92–102.

[3] Н.Я.Безнощенко, Об определении коэффициента при младшем члене общего параболического уравнения, *Дифференциальные уравнения*, **12**(1976), № 1, 175–176.

[4] Ю.Я.Белов, Е.Г.Саватеев, Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, *Докл. АН СССР*, **334**(1991), № 5, 800–804.

[5] С.В.Полынцева, Задача идентификации коэффициентов при производных по времени и пространственной переменной, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **1**(2008), № 3, 308–317.

[6] Ю.Я.Белов, С.В.Полынцева, О задаче идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения, Совместный выпуск, *Вычислительные технологии*, **9**(2004), №1; *Вестник КазНУ*, **42**(2004), № 3, Алматы-Новосибирск, 273–280.

[7] И.В.Фроленков, Е.Н.Кригер, О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **3**(2010), № 4, 556–564.

[8] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[9] А.М.Ильин, А.С.Калашников, О.А.Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *Успехи мат. наук.*, **17**(1962), № 3, 3–146.

[10] Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ, М., Наука, 1977.

On the Problem of Identification of Two Lower Coefficients and the Coefficient by the Derivative with Respect to Time in the Parabolic Equation

Anzhelika V.Datsenko
Svetlana V.Polyntseva

The theorem of existence and uniqueness of classical solution of identification problem of two lower coefficients and the coefficient by the derivative with respect to time in the class of smooth bounded functions is proved.

In the proof of the existence and uniqueness of the inverse problem solution using the overdetermination conditions, the original inverse problem is reduced to the direct problem for the loaded (containing traces of unknown functions and their derivatives) equation. The investigation of the correctness of the direct problem is obtained by the method of weak approximation.

Keywords: identification, inverse problem, parabolic equations, equations in partial derivatives, method of weak approximation.