Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 551–555

УДК 512.7

Стабильные расслоения ранга 2 с классами Черна $\mathbf{c_1 = 0}$, $\mathbf{c_2 = 2}$ на $\mathbb{P}^3$ и гиперквадрики Понселе

Сергей А. Тихомиров*

Ярославский государственный педагогический университет,
Республиканская, 108, Ярославль, 150000,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

В данной работе мы исследуем многообразие $M(0,2)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ и даем точное описание замыкания $M(0,2)$ как пересечения детерминантали специального вида с однозначно определенной гиперквадрикой Понселе в $\mathbb{P}^{20}$.

Ключевые слова: стабильное расслоение, гиперквадрика Понселе.

Введение

Многообразие $M(0,2)$ модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = 2$ на $\mathbb{P}^3$ было впервые рассмотрено в работе Р.Хартсхорна [1]. В этой работе он доказал, используя так называемые замыкания Понселе, что $M(0,2)$ имеет структуру расслоенного пространства со слоем — открытым подмножеством гладкой квадрики в $\mathbb{P}^5$ над 9-мерным многообразием гладких квадрик в $\mathbb{P}^3$ с выделенной системой образующих прямых. Дальнейшему изучению свойств пространства $M(0,2)$ посвящена серия работ [2–5]. В частности, М.Нарасимхан и Г.Траутманн в статье [2] построили компактификацию $\widetilde{M(0,2)}$ пространства $M(0,2)$ в терминах замыканий Понселе и построили морфизм ϕ : $\widetilde{M(0,2)} \to M(0,2)^\nu$, где $M(0,2)^\nu$ — нормализация замыкания пространства $M(0,2)$ в схеме Маруямы полустабильных пучков на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$. Кроме того, из результатов [1] и [2] непосредственно вытекает существование морфизма $p : \widetilde{M(0,2)} \to \mathbb{P}^{20}$ такого, что $p|M(0,2)$ — вложение. (Ниже в статье мы приводим конструкцию морфизма p.)

Для произвольного векторного пространства (соответственно, векторного расслоения над фиксированной базой) V через $V^\vee$ будем обозначать двойственное ему векторное пространство (соответственно, векторное расслоение), а через S^2V будем обозначать симметрический квадрат пространства (соответственно, векторного расслоения) V. Рассмотрим 4-мерное векторное пространство T и его вторую внешнюю степень $H := \Lambda^2 T$ и будем интерпретировать пространство $P(S^2H^\vee)$, как пространство квадрик в пространстве $P(H) \simeq \mathbb{P}^5$. Рассмотрим детерминанталь $\Delta = \{x \in P(S^2H^\vee)|$ квадрика $Q_x \subset P(H)$ имеет ранг $\le 3\}$, где под Q_x здесь и всюду ниже понимается квадрика в $P(H)$, соответствующая точке в $x \in P(S^2H^\vee)$.

Настоящая работа посвящена получению точного соотношения между детерминанталью Δ и замыканием $\overline{M(0,2)}$ образа многообразия $M(0,2)$ при вложении p, а именно, установлению равенства $\overline{M(0,2)} = \Delta \cap Q_{\mathrm{Ponc}}$, где Q_{Ponc} — гиперквадрика в пространстве $P(S^2H^\vee)$ с уравнением $\Phi_{\mathbf{G}} = 0$ (см. формулу (6) ниже), называемая в статье гиперквадрикой Понселе. Основной результат статьи — теорема о единственности гиперквадрики Понселе Q_{Ponc} в $P(S^2H^\vee)$, высекающей $\overline{M(0,2)}$ из детерминантали Δ. Этот и другие результаты собраны в теоремах 1, 2 и 3 заметки. Всюду в работе в качестве основного поля берется поле $k = \mathbb{C}$.

*satikhomirov@mail.ru

1. Замыкания $\overline{M(0,2)}$ и $\widetilde{M(0,2)}$ многообразия модулей $M(0,2)$ стабильных расслоений ранга 2 с $c_1 = 0$ и $c_2 = 2$ на $\mathbb{P}^3$

Пусть $\mathbf{G} := G(1,3)$ — грассманиан прямых пространства $\mathbb{P}^3 = P(T)$, соответственно $G := G(3,H)$ — грассманиан трехмерных подпространств пространства $H = \Lambda^2 T$. Понимая точки грассманиана G как плоскости $\mathbb{P}^2$ в пространстве $P(H)$ рассмотрим пространство $\mathbb{P}^{20} := P(S^2H^\vee)$ квадрик в пространстве $P(H)$ и пусть $X = \{(\mathbb{P}^2, x) \in G \times \mathbb{P}^{20} \mid \mathbb{P}^2 \subset \mathrm{Sing}Q_x\} \xrightarrow{\theta} \Delta$ — стандартное разрешение особенностей детерминантали Δ. На G имеет место стандартная точная тройка

$$0 \to \mathcal{S} \to H \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{W}^\vee \to 0 \ , \tag{1}$$

где $\mathcal{S}$ — тавтологическое подрасслоение ранга 3 в $H \otimes \mathcal{O}_G$, $\mathcal{W}$ — второе тавтологическое расслоение ранга 3 на G, т.е. подрасслоение в $H^\vee \otimes \mathcal{O}_G$, а эпиморфизм $H \otimes \mathcal{O}_G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{W}^\vee$ — двойственный к тавтологическому мономорфизму $\mathcal{W} \rightarrowtail H^\vee \otimes \mathcal{O}_G$.

Для произвольного морфизма векторных расслоений $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ через $S^2\mathcal{E} \xrightarrow{s^2 f} S^2\mathcal{F}$ будем обозначать индуцированный морфизм их симметрических квадратов. В частности, тройка (1) индуцирует точные тройки

$$0 \to K \to S^2H \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{s^2\varepsilon} S^2\mathcal{W}^\vee \to 0 \tag{2}$$

и

$$0 \to B \to S^2(S^2H) \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{e:=s^2(s^2\varepsilon)} S^2(S^2\mathcal{W}^\vee) \to 0, \tag{3}$$

где $K := \ker s^2\varepsilon$ и $B := \ker e$, соответственно.

Естественный изоморфизм $\sigma_\mathbf{G} : H^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^4 T^\vee \otimes H \simeq H$, определенный однозначно с точностью до скалярного множителя, является квадратичной формой на $H^\vee$, т.е. $\sigma_\mathbf{G} \in S^2H = H^0(S^2H \otimes \mathcal{O}_G)$. В дальнейшем будем интерпретировать произвольный слой W расслоения $\mathcal{W}$ как подпространство в H и, тем самым, $P(W)$ как точку в G посредством вложения $W \overset{\varepsilon^\vee}{\hookrightarrow} H^\vee \overset{\sigma_\mathbf{G}}{\xrightarrow{\sim}} H$, где ε — морфизм в (1). Заметим, что эпиморфизм $s^2\varepsilon$ в (2) индуцирует вложение проективных спектров $\mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(S^2H \otimes \mathcal{O}_G) = P(S^2H^\vee) \times G = \mathbb{P}^{20} \times G$, образ которого по построению совпадает с вышеуказанным разрешением X детерминантали Δ. Тем самым, $\rho : X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{20} \times G \xrightarrow{pr_2} G$ — проективное расслоение со слоем $P(S^2W) \simeq \mathbb{P}^5$ над произвольной точкой $P(W) \in G$ такое, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee)}(1) = \theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(1)|_\Delta)$. Отсюда следует, в частности, что эпиморфизм e в (3) совпадает с композицией

$$e : S^2(S^2H) \otimes \mathcal{O}_G = pr_{2*}pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2) \twoheadrightarrow \rho_*\theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)|_\Delta) = \rho_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee)}(2) == S^2(S^2\mathcal{W}^\vee), \tag{4}$$

где pr_1 — проекция $\mathbb{P}^{20} \times G \to \mathbb{P}^{20}$.

Рассмотрим сечение

$$\sigma = h^0(s^2\varepsilon)(\sigma_\mathbf{G}) \in H^0(S^2\mathcal{W}^\vee). \tag{5}$$

Морфизм e в (3) индуцирует гомоморфизм групп сечений $\varphi = h^0(e) : S^2(S^2H) = H^0(S^2(S^2H) \otimes \mathcal{O}_G) \to H^0(S^2(S^2\mathcal{W}^\vee))$, переводящий квадратичную форму

$$\Phi_\mathbf{G} := S^2\sigma_\mathbf{G} - \frac{1}{2}\sigma_\mathbf{G} \cdot \sigma_\mathbf{G} \tag{6}$$

на $S^2H^\vee$ в сечение

$$\Phi_\sigma := S^2\sigma - \frac{1}{2}\sigma \cdot \sigma \in H^0(S^2(S^2\mathcal{W}^\vee)) \tag{7}$$

расслоения $S^2(S^2\mathcal{W}^\vee)$. (Напомним, следуя [2,§3.2], что по определению $\sigma_{\mathbf{G}} \cdot \sigma_{\mathbf{G}}$ есть симметрический гомоморфизм $S^2H^\vee \to S^2H : x \circ y \mapsto \sigma_{\mathbf{G}}(x \circ y)\sigma_{\mathbf{G}}$.)

Пусть $\mathbb{P}^3_\alpha$ — база семейства α-плоскостей на $\mathbf{G}$ и, соответственно, $\mathbb{P}^3_\beta$ — база семейства β-плоскостей на $\mathbf{G}$, где под α-плоскостью (соответственно, β-плоскостью), понимается плоскость, параметризующая прямые в $\mathbb{P}^3$, проходящие через фиксированную точку (соответственно, лежащие в фиксированной плоскости). Так как для произвольной плоскости $P^2 = P(W) \in \mathbb{P}^3_\alpha \sqcup \mathbb{P}^3_\beta$ форма $\sigma_{\mathbf{G}}|W$ тождественно обращается в нуль, то из (7) имеем:

$$\mathbb{P}^3_\alpha \sqcup \mathbb{P}^3_\beta = (\Phi_\sigma)_0, \tag{8}$$

где через $(\Phi_\sigma)_0$ обозначена схема нулей Φ_σ.

Будем говорить, что коника $C^\vee$ в двойственной к $\mathbb{P}^2$ плоскости $\mathbb{P}^{2\vee}$ находится в замыкании Понселе с коникой S в плоскости $\mathbb{P}^2$ и называть пару $(S, C^\vee)$ парой Понселе, если существует треугольник, описанный около S, вершины которого лежат на двойственной к $C^\vee$ конике $C = (C^\vee)^\vee$. Как показано в [2,§3], для общей плоскости $P(W) \subset \mathbb{P}^5$ и коники $S = P(W) \cap \mathbf{G} = \{\mathbb{C}x \in P(W) | \ \sigma_{\mathbf{G}}(x) = 0\}$ множество $\mathrm{Ponc}(P(W), S) = \{C^\vee \in |\mathcal{O}_{P(W^\vee)}(2)| \mid (S, C^\vee)$ – пара Понселе$\}$ удовлетворяет в $|\mathcal{O}_{P(W^\vee)}(2)| = P(S^2W)$ уравнению:

$$\mathrm{Ponc}(P(W), S) = \{y \in P(S^2W) \mid \Phi_\sigma(y) = 0\}. \tag{9}$$

Пусть $C(\mathbf{G})$ — схема Гильберта коник, лежащих в $\mathbf{G}$. Рассмотрим расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tau} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ C(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\delta} & G, \end{array} \tag{10}$$

в котором $\delta : C(\mathbf{G}) \to G$ — раздутие G с центром в $\mathbb{P}^3_\alpha \sqcup \mathbb{P}^3_\beta$, так что $\tilde{X} = \mathbb{P}(\delta^* S^2\mathcal{W}^\vee) \to C(\mathbf{G})$ — расслоение со слоем $\mathbb{P}^5$, и обозначим $M := \{x \in \mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee) | \Phi_\sigma(x) = 0\}$. Как показано в [2], многообразие $\widetilde{M(0,2)}$ реализуется как дивизор в $\tilde{X}$ такой, что $\tau(\widetilde{M(0,2)}) = M$. Отсюда с учетом (8) и (9) следует, что

(i) $\tilde{X} \times_X M$ есть объединение двух дивизоров в $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} \times_X M = C(\mathbf{G}) \times_G M = Y \cup \widetilde{M(0,2)}, \tag{11}$$

где $Y := (\rho \cdot \tau)^{-1}(\mathbb{P}^3_\alpha \sqcup \mathbb{P}^3_\beta)$;

(ii) а $\widetilde{M(0,2)} \to C(\mathbf{G})$ - расслоение со слоем $\mathrm{Ponc}(P(W), S)$ над произвольной точкой $(P(W), S) \in C(\mathbf{G})$. Таким образом, предыдущая диаграмма достраивается до диаграммы, состоящей из расслоенных квадратов:

$$\begin{tikzcd} Y \cup \widetilde{M(0,2)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tau"] & \tilde{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"] & C(\mathbf{G}) \arrow[d, "\delta"] \\ M \arrow[r, hook] & X \arrow[r, "\rho"] & G. \end{tikzcd}$$

При этом упомянутый в начале заметки морфизм $p : \widetilde{M(0,2)} \to \mathbb{P}^{20}$ строится как композиция $\widetilde{M(0,2)} \hookrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\tau} X \hookrightarrow \mathbb{P}^{20} \times G \xrightarrow{pr_1} \mathbb{P}^{20}$ (см. [2,§2]). Напомним, что, как доказано в [1,§9], $p|M(0,2)$ — вложение, а значит, $p : \widetilde{M(0,2)} \to \overline{M(0,2)} = p(\widetilde{M(0,2)})$ — бирациональный морфизм. Теперь заметим, что при этом бирациональном морфизме слои (9) проекции

$\widetilde{M(0,2)} \to C(\mathbf{G})$ в силу определения формы Φ_σ (см. (6) и (7)) переходят в подмногообразия детерминантали Δ в $\mathbb{P}^{20}$ вида $\{y \in P(S^2W) \subset \Delta \mid \Phi_{\mathbf{G}}(y) = 0\}$. Следовательно,

$$\overline{M(0,2)} = \Delta \cap Q_{\mathrm{Ponc}}, \tag{12}$$

где Q_{Ponc} — гиперквадрика в $\mathbb{P}^{20}$ с уравнением $\Phi_{\mathbf{G}} = 0$. Назовем Q_{Ponc} гиперквадрикой Понселе.

Собирая вместе полученные результаты, имеем следующую теорему.

Теорема 1. *(1) Существует выделенная гиперквадрика Q_{Ponc} в $\mathbb{P}^{20}$ с уравнением $\Phi_{\mathbf{G}} = 0$ такая, что $\overline{M(0,2)} = \Delta \cap Q_{\mathrm{Ponc}}$.*

(2) Многообразие $\widetilde{M(0,2)}$ как дивизор в $\tilde{X} = \mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee) \times_G C(\mathbf{G})$ задается уравнением $\Phi = 0$, где $\Phi = pr_2^*\Phi_{\mathbf{G}}(-Y)$ — сечение линейного расслоения $pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)(-Y)$ на $\widetilde{X}$, а pr_2 означает композицию $\tilde{X} \hookrightarrow C(\mathbf{G}) \times \mathbb{P}^{20} \to \mathbb{P}^{20}$. Соответственно, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\widetilde{M(0,2)}) = pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)(-Y)$.

(3) $\widetilde{M(0,2)}$ есть раздутие M вдоль подсхемы $Z = \rho^{-1}(\mathbb{P}^3_\alpha \sqcup \mathbb{P}^3_\beta)$, где морфизм $\rho : X \to G$ определен в диаграмме (10).

2. Единственность гиперквадрики Q_{Ponc}

Естественный вопрос, возникающий в связи с описанием (12) многообразия $\overline{M(0,2)}$, состоит в том, является ли Q_{Ponc} единственной гиперквадрикой в $\mathbb{P}^{20}$, пересекающей Δ по многообразию $\overline{M(0,2)}$. В этом параграфе мы даем положительный ответ на данный вопрос (см. теорему 3 ниже). Нам потребуется следующий результат.

Теорема 2. *Отображение групп сечений $h^0(e) : S^2(S^2H) \to H^0(S^2(S^2\mathcal{W}^\vee))$ для точной тройки (3) является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно [6, §6.1, ex.6.16], имеем следующее разложение пространства $S^2(S^2H)$ на неприводимые относительно группы $GL(H)$ слагаемые: $S^2(S^2H) = \mathbb{S}_{4,0}H \oplus \mathbb{S}_{2,2}H$. Аналогично, имеем разложение расслоения $S^2(S^2\mathcal{W}^\vee))$ на неприводимые относительно группы $GL(\mathbb{C}^3)$ слагаемые: $S^2(S^2\mathcal{W}^\vee)) = \mathbb{S}_{4,0}\mathcal{W}^\vee \oplus \mathbb{S}_{2,2}\mathcal{W}^\vee$. Здесь $V \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda V$ — функтор Шура (см., например, [6, §6.1]) для произвольного r-мерного векторного пространства (соответственно, векторного расслоения) V, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ — произвольное разбиение, т.е. невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Тогда, пользуясь равенством (0.1) статьи [8] и процедурой нахождения старшего веса неприводимого представления по его диаграмме Юнга (см., например, [7, стр.284-285]), находим в обозначениях работы [8] старшие веса неприводимых компонент наших разложений: $\mathbb{S}_{4,0}H = \Sigma^{0,0,0,0,0,-4}H$, $\mathbb{S}_{4,0}\mathcal{W}^\vee = \Sigma^{0,0,-4}\mathcal{W}$; $\mathbb{S}_{2,2}H = \Sigma^{0,0,0,0,-2,-2}H$, $\mathbb{S}_{2,2}\mathcal{W}^\vee = \Sigma^{0,-2,-2}\mathcal{W}$. Наконец, в соответствии с теоремой Бореля-Вейля-Ботта (см., например, [8, предложение 2.2a)]) получаем изоморфизмы $h^0(ev_1) : \Sigma^{0,0,0,0,0,-4}H \xrightarrow{\sim} H^0(\Sigma^{0,0,-4}\mathcal{W})$ и $h^0(ev_2) : \Sigma^{0,0,0,0,-2,-2}H \xrightarrow{\sim} H^0(\Sigma^{0,-2,-2}\mathcal{W})$, где $ev_1 : \Sigma^{0,0,0,0,0,-4}H \otimes \mathcal{O}_G \twoheadrightarrow \Sigma^{0,0,-4}\mathcal{W}$ и $ev_2 : \Sigma^{0,0,0,0,-2,-2}H \otimes \mathcal{O}_G \twoheadrightarrow \Sigma^{0,-2,-2}\mathcal{W}$ — морфизмы вычисления. Так как по построению $h^0(e) = h^0(ev_1) \oplus h^0(ev_2)$, то отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Заметим, что в силу (4) и предыдущей теоремы гомоморфизм $h^0(e)$ разлагается в композицию $S^2(S^2H) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)) \xrightarrow{h^0(res_\Delta)} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)|_\Delta) \xrightarrow{\theta^*} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2\mathcal{W}^\vee)}(2)) = H^0(S^2(S^2\mathcal{W}^\vee))$. Отсюда получаем основной результат настоящей заметки.

Теорема 3. *Отображение групп сечений $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)) \xrightarrow{h^0(res_\Delta)} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(2)|_\Delta)$ — изоморфизм. Тем самым, гиперквадрика Понселе Q_{Ponc} — единственная гиперквадрика в $\mathbb{P}^{20}$, высекающая многообразие $\overline{M(0,2)}$ из детерминантали Δ.*

Список литературы

[1] R.Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}_3$, *Math. Ann.*, **238**(1978), 229–280.

[2] M.S.Narasimhan, G.Trautmann, Compactification of $M_{\mathbb{P}_3}(0,2)$ and Poncelet pairs of conics, *Pacific J. Math.*, **145**(1990), 255–365.

[3] M.S.Narasimhan, G.Trautmann, The Picard group of the compactification of $M_{\mathbb{P}^3}(0,2)$, *J. Reine Angew. Math.*, **422**(1991), 21–44.

[4] W.Singhof, G.Trautmann, On the topology of the moduli space M(0,2) of stable bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, *Q. J. Math.*, Oxf. II. Ser. **41**(1990), №163, 335–358.

[5] M.S.Narasimhan, G.Trautmann, Compactification of M(0,2), Vector bundles on algebraic varieties, Pap. Colloq., Bombay 1984, *Stud. Math., Tata Inst. Fundam. Res.*, **11**(1987), 429–443.

[6] W.Fulton, J.Harris, Representation theory, A First Course, Springer, 1991.

[7] А.Барут, М.Рончка, Теория представлений групп и ее приложения, М., Мир, 1980.

[8] М.М.Капранов, О производной категории когерентных пучков на многообразиях, *Известия РАН, Сер. матем.*, **48**(1984), №1,192–202.

Stable bundles of rank 2 with Chern's classes $\mathbf{c_1 = 0}$, $\mathbf{c_2 = 2}$ on $\mathbb{P}^3$ and Poncelet hyperquadrics

Sergey A. Tikhomirov

In this article we investigate the variety $M(0,2)$ of stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$ with Chern's classes $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ and give the explicit description of closure of $M(0,2)$ as the intersection of special determinantal locus with uniquely determined Poncelet hyperquadric in $\mathbb{P}^{20}$.

Keywords: stable bundle, Poncelet hyperquadric.