УДК 519.145

О подгруппе коллинеаций полуполевой плоскости, изоморфной A_4

Ольга В. Кравцова*
Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Виктория О. Прамзина†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

Доказано, что трансляционное дополнение полуполевой плоскости ранга 2 над конечным полем нечетного порядка не содержит подгруппы коллинеаций, изоморфной знакопеременной группе A_4.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, трансляционное дополнение, бэровская инволюция, гомология.

Среди проективных плоскостей особое место занимает класс плоскостей трансляций и подкласс полуполевых плоскостей, имеющих не только трансляционную прямую, но и трансляционную точку. Полуполевые плоскости, занимающие промежуточную ступень между плоскостями трансляций и классическими, дезарговыми проективными плоскостями, обладают большой группой коллинеаций, строение которой изучено еще недостаточно хорошо.

Вопрос о наличии подгруппы, изоморфной A_4, в трансляционном дополнении полуполевой плоскости, неоднократно рассматривался на научном семинаре в Красноярском государственном университете под руководством профессора Н.Д. Подуфалова. В частности, существенное продвижение в исследовании плоскостей нечетного порядка, допускающих большую группу бэровских коллинеаций, было достигнуто И.В. Бусаркиной в работе [1], показавшей, что такие плоскости не допускают A_4.

Следует заметить, что несложно указать достаточное количество примеров полуполевых плоскостей четного порядка, допускающих A_4. Соответствующий результат приведен автором в докладе [2]. Тем больший интерес вызывают плоскости нечетного порядка. Основным результатом настоящей работы является доказательство отсутствия подгруппы, изоморфной A_4, в трансляционном дополнении полуполевой плоскости ранга 2 над конечным полем нечетного порядка.

Пусть π — полуполевая плоскость ранга 2 над полем $GF(q)$, $q = p^k$, где p — нечетное число. Обозначим через W линейное пространство размерности 2 над $GF(q)$:

$$W = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in GF(q)\},$$

тогда аффинные точки плоскости π можно отождествить с элементами 4-мерного векторного пространства

$$V = W \times W = \{(x, y) | x, y \in W\}.$$

*ol71@bk.ru
†victoria7789@inbox.ru

В качестве аффинных прямых рассматриваются смежные классы аддитивной группы V по подгруппам

$$\{(0,y)|y \in W\},\ \{(x,x\theta_z)|x \in W\},\ z \in W,$$

где матрицы θ_z образуют регулярное множество плоскости (спрэд):

$$R = \{\theta_z|z \in W\}.$$

Регулярное множество полуполевой плоскости содержит нулевую и единичную матрицы, замкнуто по сложению, причем все матрицы, кроме нулевой — невырожденные. Принято использовать также правое, среднее и левое ядра полуполевой плоскости:

$$R_r = \{\theta_r \in R|\theta_z \cdot \theta_r \in R\ \forall z \in W\},$$

$$R_m = \{\theta_m \in R|\theta_m \cdot \theta_z \in R\ \forall z \in W\},$$

$$R_l = \{M|\theta_z \cdot M = M \cdot \theta_z\ \forall z \in W\}.$$

Правое и среднее ядра полуполевой плоскости являются подполями в регулярном множестве, а левое ядро либо совпадает с R для дезарговой плоскости, либо состоит только из скалярных матриц для недезарговой полуполевой плоскости.

Полная группа коллинеаций полуполевой плоскости $Aut\,\pi$ имеет вид $Aut\,\pi = T \leftthreetimes G$, где T — группа трансляций:

$$\tau_{(x_0,y_0)} : (x,y) \to (x+x_0, y+y_0),$$

а G — трансляционное дополнение, т.е. стабилизатор нулевого вектора в V. Элементы группы G индуцируются полулинейными преобразованиями векторного пространства, подгруппа G_0 группы G, состоящая из линейных преобразований, называется линейным трансляционным дополнением.

Известно, что коллинеация порядка 2 произвольной проективной плоскости является либо центральной коллинеацией (элацией или гомологией), либо бэровской инволюцией (см. [3]). Нас интересует подгруппа коллинеаций $K = \{1, i, j, ij\}$, где i, j, ij — перестановочные инволюции. Рассмотрим все возможные варианты.

Лемма 1. *Пусть π — полуполевая плоскость ранга n над полем нечетного порядка. Тогда элементарная абелева подгруппа порядка 4 в трансляционном дополнении π не содержит центральных коллинеаций.*

Доказательство. Предположим, что $K = \{1, i, j, ij\}$ содержит центральные коллинеации. Так как π — плоскость нечетного порядка, то перспективность порядка 2 может быть только гомологией (см. [3]). В трансляционном дополнении полуполевой плоскости содержатся следующие группы гомологий (показано в [4]):

1) группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} M & 0 \\ 0 & M \end{array} \right) \middle| M \in R_l^* \right\}, \qquad S \simeq R_l^*;$$

2) группы гомологий с осью $[z,0]$ и центром (∞)

$$H_z = \left\{ \left(\begin{array}{cc} E & \theta_z(E-D) \\ 0 & D \end{array} \right) \middle| D \in R_r^* \right\}, \qquad H_z \simeq R_r^*;$$

3) группы гомологий с осью $[0]$ и центром (z)

$$F_z = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & (A-E)\theta_z \\ 0 & E \end{array} \right) \middle| A \in R_m^* \right\}, \qquad F_z \simeq R_m^*.$$

Здесь и далее рассматриваются матрицы размерности $n \times n$, координаты точек и прямых приводятся в соответствии с [3].

Так как регулярное множество плоскости ранга n над полем порядка $q = p^k$ состоит из p^{nk} матриц, то правое и левое ядра имеют нечетный порядок p^s, поэтому каждая из групп гомологий H_z или F_z содержит единственную инволюцию. То же следует сказать и о группе S, так как левое ядро либо совпадает с R, либо состоит из $q = p^k$ скалярных матриц.

Инволюция в группе S задается матрицей вида

$$i = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

поэтому для любой коллинеации γ порядка 3 в трансляционном дополнении получим $j = \gamma^{-1} i \gamma = i$.

Если i — инволюция в группе H_z и коллинеация γ переводит точку (z) на прямой $[\infty]$ в точку (u), то $j = \gamma^{-1} i \gamma$ — гомология в группе H_u, но их произведение

$$ij = \begin{pmatrix} E & 2\theta_z \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 2\theta_u \\ 0 & -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 2(\theta_u - \theta_z) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

является элацией порядка p с осью $[0]$ и центром (∞) (кроме того, $ij \neq ji$).

Пусть далее i — инволюция в F_z и $(z)^\gamma = (u)$, тогда $j = \gamma^{-1} i \gamma \in F_u$, и произведение

$$ij = \begin{pmatrix} -E & -2\theta_z \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & -2\theta_u \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 2(\theta_u - \theta_z) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

также является элацией. □

Таким образом, если в трансляционном дополнении полуполевой плоскости нечетного порядка и содержится группа, изоморфная A_4, то она не может содержать центральных коллинеаций. Следует отметить, что проведенные рассуждения не зависят от размерности матриц, результат справедлив для плоскостей произвольного ранга.

Переходим к отысканию перестановочных бэровских инволюций в линейном трансляционном дополнении полуполевой плоскости ранга 2.

Лемма 2. *Пусть π — полуполевая плоскость ранга 2 над конечным полем нечетного порядка p^k. Линейное трансляционное дополнение π не содержит подгруппы $\{1, i, j, ij\} \leftthreetimes \langle\gamma\rangle$, где i, j, ij — бэровские инволюции, $|\gamma| = 3$.*

Доказательство. Если плоскость π содержит бэровскую подплоскость, то порядок плоскости π является квадратом, $q = p^k = p^{2k'}$. Выберем базис пространства V так, чтобы бэровская инволюция i оставляла на месте прямую $y = x$, тогда

$$i = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu(x) = x^2 - 1$ — минимальный многочлен матрицы L, то в жордановом базисе пространства W матрица L записывается в виде

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элемент порядка 3 в линейном трансляционном дополнении:

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad A^3 = E,\ D^3 = E,\ AB + BD = -A^{-1} B D^{-1}.$$

Найдем инволюцию $j = \gamma^{-1} i \gamma$ и запишем условие перестановочности i с j:

$$j = \begin{pmatrix} A^2LA & A^2LB + (AB + BD)LD \\ 0 & D^2LD \end{pmatrix},$$

$$ij = \begin{pmatrix} LA^2LA & LA^2LB + L(AB + BD)LD \\ 0 & LD^2LD \end{pmatrix},$$

$$ji = \begin{pmatrix} A^2LAL & A^2LBL + (AB + BD)LDL \\ 0 & D^2LDL \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} LA^2LA = A^2LAL, \\ LD^2LD = D^2LDL, \\ LA^2LB + L(AB + BD)LD = A^2LBL + (AB + BD)LDL. \end{cases}$$

Рассмотрим внимательнее первое из полученных условий.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то

$$A^2 = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

$$LA^*LA = A^*LAL,$$

$$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ -a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{22}a_{12} = 0, \\ a_{11}a_{21} = 0. \end{cases}$$

Отсюда либо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, либо $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$. Второй случай невозможен, так как $A^3 = E$. Таким образом, A и D – диагональные матрицы, поэтому $LA = AL$, $LD = DL$,

$$LA^2LB + L(AB + BD)LD = A^2B + L(-A^2BD^2)LD = A^2B - A^2LBL,$$

$$A^2LBL + (AB + BD)LDL = A^2LBL - A^2BD^2LDL = A^2LBL - A^2B,$$

$$A^2B - A^2LBL = A^2LBL - A^2B, \quad A^2B - A^2LBL = 0, \quad B = LBL.$$

Тогда

$$j = \begin{pmatrix} A^2LA & A^2LB - A^2BD^2LD \\ 0 & D^2LD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = i.$$

□

Полученный результат завершает доказательство теоремы.

Теорема 1. *Если π — полуполевая плоскость ранга 2 над конечным полем нечетного порядка p^k, то линейное трансляционное дополнение плоскости π не содержит подгруппы, изоморфной знакопеременной группе A_4.*

Докажем далее более сильный результат: подгруппы, изоморфной A_4, не содержится и в трансляционном дополнении. Для этого потребуется рассмотреть не только линейные, но и полулинейные отображения в качестве коллинеаций i и γ.

Лемма 3. *Пусть π — полуполевая плоскость ранга 2 над конечным полем нечетного порядка p^k. Если трансляционное дополнение π содержит подгруппу коллинеаций, изоморфную A_4, то в этой подгруппе нет линейных бэровских инволюций.*

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть нелинейную коллинеацию γ порядка 3. Пусть действие γ на аффинных точках плоскости задается правилом:

$$\gamma : (x, y) \to (x^\alpha, y^\alpha) \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где отображение α на векторах пространства W индуцировано автоморфизмом поля F:

$$x^\alpha = (x_1, x_2)^\alpha = (x_1^{p^m}, x_2^{p^m}).$$

Далее для удобства обозначения будем использовать α как поэлементное действие автоморфизма поля на элементы как векторов, так и матриц:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^{p^m} & a_{12}^{p^m} \\ a_{21}^{p^m} & a_{22}^{p^m} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\gamma^2 : (x, y) \to \left[(x^\alpha, y^\alpha) \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\right]^\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (x^{\alpha^2}, y^{\alpha^2}) \begin{pmatrix} A^\alpha & B^\alpha \\ 0 & D^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 : (x, y) \to (x^{\alpha^3}, y^{\alpha^3}) \begin{pmatrix} A^{\alpha^2} & B^{\alpha^2} \\ 0 & D^{\alpha^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\alpha & B^\alpha \\ 0 & D^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Так как $|\gamma| = 3$, то $\alpha^3 = 1$ (тождественный автоморфизм), $|F| = p^n = p^{3m}$,

$$A^{\alpha^2} A^\alpha A = E, \quad D^{\alpha^2} D^\alpha D = E, \quad A^{\alpha^2} A^\alpha B + A^{\alpha^2} B^\alpha D + B^{\alpha^2} D^\alpha D = 0.$$

Как в лемме 2, запишем бэровскую инволюцию в виде

$$i = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем инволюцию $j = \gamma^{-1} i \gamma = \gamma^2 i \gamma$:

$$j : (x, y) \to \left[(x^{\alpha^2}, y^{\alpha^2}) \begin{pmatrix} A^\alpha & B^\alpha \\ 0 & D^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}\right]^\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

где $M = A^{\alpha^2} A^\alpha L A = A^{-1} L A$, $P = D^{\alpha^2} D^\alpha L D = D^{-1} L D$,

$$N = A^{-1} L B + A^{\alpha^2} B^\alpha L D + B^{\alpha^2} D^\alpha L D.$$

Так как инволюции i и j перестановочны, то $ML = LM$, $PL = LP$, $NL = LN$. Из первых двух условий, как и в доказательстве леммы 2, получаем, что матрицы A и D — диагональные, тогда

$$M = A^{-1} L A = L, \quad P = D^{-1} L D = L, \qquad j = \begin{pmatrix} L & N \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Найдем третью инволюцию группы A_4:

$$ij = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & N \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & LN \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Так как коллинеация ij не должна быть тождественной, то $LN \neq 0$, тогда коллинеация ij является элацией, что невозможно. $\square$

Лемма 4. *Пусть π — полуполевая плоскость ранга 2 над конечным полем нечетного порядка p^k. Если трансляционное дополнение π содержит подгруппу коллинеаций, изоморфную A_4, то в этой подгруппе нет полулинейных бэровских инволюций.*

Доказательство. Пусть i — полулинейная бэровская инволюция. Выберем в качестве базисных элементов пространства V аффинные точки плоскости, фиксируемые инволюцией i. Тогда действие i на всех аффинных точках определяется правилом:

$$i : (x, y) \to (x^\varphi, y^\varphi),$$

где φ – отображение, индуцированное автоморфизмом поля F,

$$x^\varphi = (x_1^{p^s}, x_2^{p^s}),$$

$|\varphi| = 2$, $|F| = p^k = p^{2s}$. Рассмотрим далее два случая:

1) γ — линейная коллинеация порядка 3,

2) γ — нелинейная коллинеация порядка 3.

В первом случае определим γ правилом

$$\gamma : (x, y) \to (x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

тогда инволюция $j = \gamma^{-1} i \gamma$ является нелинейной,

$$j : (x, y) \to \left[(x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}\right]^\varphi \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (x^\varphi, y^\varphi)\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix},$$

и произведение инволюций ij – линейное преобразование,

$$ij : (x, y) \to [(x^\varphi, y^\varphi)]^\varphi \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

Как доказано в лемме 3, подгруппа, изоморфная A_4, не может содержать линейных инволюций, получили противоречие.

Во втором случае запишем γ, как и в лемме 3:

$$\gamma : (x, y) \to (x^\alpha, y^\alpha)\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad x^\alpha = (x_1^{p^m}, x_2^{p^m}).$$

В этом случае предполагается, что порядок поля F равен $|F| = p^k = p^{2s} = p^{3m}$. Тогда инволюция $j = \gamma^{-1} i \gamma$ — нелинейная,

$$j : (x, y) \to \left[\left[(x^{\alpha^2}, y^{\alpha^2})\begin{pmatrix} A^\alpha & B^\alpha \\ 0 & D^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\right]^\varphi\right]^\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (x^\varphi, y^\varphi)\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ 0 & D'' \end{pmatrix},$$

а произведение ij – линейная бэровская инволюция,

$$ij : (x, y) \to \left[(x^\varphi, y^\varphi)\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ 0 & D'' \end{pmatrix}\right]^\varphi = (x, y)\begin{pmatrix} (A'')^\varphi & (B'')^\varphi \\ 0 & (D'')^\varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, этот случай также невозможен (лемма 3), доказательство завершено. □

Леммы 3 и 4 позволяют обобщить теорему 1 и сформулировать аналогичный результат для трансляционного дополнения.

Теорема 2. *Если π — полуполевая плоскость ранга 2 над конечным полем нечетного порядка p^k, то трансляционное дополнение плоскости π не содержит подгруппы, изоморфной знакопеременной группе A_4.*

Следует отметить, что при рассмотрении полуполевых плоскостей ранга более 2 мы сталкиваемся с существенными трудностями: нет возможности перейти к расчетам только для диагональных матриц A и D. Эта ситуация требует значительно более серьезного и тщательного изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00509-а)

Список литературы

[1] И.В.Бусаркина, О p-примитивных полуполевых плоскостях, *Вестник КГТУ, Вып. 23, Математические методы и модели*, (Красноярск, ИПЦ КГТУ, 2001), 6–10.

[2] О.В.Кравцова, О некоторых трансляционных плоскостях, допускающих A_4, III Всесибирский Конгресс женщин-математиков (в честь рождения С.В.Ковалевской), Тезисы докладов конгресса, 2004, 38.

[3] D.R.Hughes, F.C.Piper, Projective planes, Springer–Verlag, New-York, 1973.

[4] Н.Д.Подуфалов, Б.К.Дураков, О.В.Кравцова, Е.Б.Дураков, О полуполевых плоскостях порядка 16^2, *Сиб. мат. журн.*, **37**(1996), № 3, 616–623.

On Collineation Subgroup of Semifield Plane That Isomorphic to A_4

Olga V. Kravtsova
Victoria O. Pramzina

It is proved that the translation complement of any semifield plane of rank 2 over finite field of odd order does not contain a collineaton subgroup isomorphic to A_4.

Keywords: semifield plane, translation complement, Baer involution, homolody.