

УДК 533.95

Влияние эффекта Холла на структуру токового слоя в канале линейного МГД-ускорителя

Игорь А. Кузоватов*

Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Андрей В. Минаков†

Институт инженерной физики и радиоэлектроники,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

Проведено математическое моделирование нестационарных процессов, протекающих в канале линейного МГД-ускорителя. В полной постановке численно решена двумерная задача магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла. Получен обнаруженный в экспериментах эффект отклонения токового слоя от направления, перпендикулярного электродам ускорителя. Установлена ключевая роль эффекта Холла при возникновении данного эффекта.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, экспоненциальная подгонка, токовый слой.

Введение

Существующие на сегодняшний день электрические ракетные двигатели (ЭРД) нашли широкое применение в космической технике, а также как источники плазмы во многих научных экспериментах. Но, к сожалению, они обладают очень низким уровнем тяги (не более 1 Н), что делает нецелесообразным их применение в качестве маршевых двигателей для космических кораблей. Низкая сила тяги современных ЭРД диктуется самим принципом их работы. Поскольку большинство современных ЭРД работают только с однородным стационарным плазменным потоком, то для предотвращения возникновения различного рода неустойчивостей, стремящихся эту однородность разрушить, эти устройства вынуждены работать при очень низких давлениях, что и обуславливает низкий уровень тяги. Решить эту проблему позволяет создание индукционного ЭРД фарадеевского типа с неоднородной токовой структурой. Существование таких нестационарных, стабильных плазменных структур, так называемых Т-слоев, которые появляются в плазменном потоке, движущемся в поперечном магнитном поле, было обнаружено в результате численного моделирования в шестидесятых годах прошлого века. Т-слои есть результат развития перегретой неустойчивости, которая в условиях МГД-ускорителя с неизбежностью возникает, как только плазма из-за охлаждения холодным газом переходит в состояние слабой ионизации. Т-слои являются плазменными поршнями, ориентированными вдоль вектора электрического поля, движущимися

*kuzovатов@yandex.ru

†tov-andrey@yandex.ru

вместе с газовым потоком и поэтому их можно использовать для ускорения неоднородного газоплазменного потока в фарадеевском МГД-канале.

Принципиальная возможность использования Т-слоя для ускорения неоднородного газоплазменного потока в фарадеевском канале МГД-ускорителя была показана в работах В.С.Славина [1-3]. В результате одномерного численного моделирования работы индукционного ЭРД с неоднородной токовой структурой показана возможность достижения средней скорости на выходе канала порядка 40 – 50 км/с при величине расхода рабочего тела 10 – 50 г/с, что обеспечивает значения тяги в диапазоне 400 – 2000 Н.

Результаты одномерного моделирования не дают ответа на вопрос, является ли токовый слой устойчивым по отношению к многочисленным возмущениям, которые с неизбежностью будут возникать в канале МГД-ускорителя. Так, в частности, в работах [4, 5] был описан эффект так называемого "накренения" (canting) токового слоя, который заключается в отклонении плазменного сгустка от направления перпендикулярного электродам в канале линейного МГД-ускорителя. Искривленный токовый слой создает поперечную к электродам компоненту силы тяги ЭРД, появляется дополнительный вращательный момент, что ухудшает управление космическим кораблем. Кроме того, ясно, что дополнительная поперечная сила будет тратить энергию на разгон газа, не преобразуя ее в полезную тягу. Таким образом, в данном случае двумерный эффект привел к существенному ухудшению характеристик МГД-ускорителя. В связи с этим целью настоящей работы являлось более детальное изучение двумерных нестационарных МГД-процессов, в частности эффекта "накренения" токового слоя в канале линейного ускорителя.

1. Постановка задачи

1.1. Физическая модель

Моделирование эффекта "накренения" плазменного сгустка было проведено для МГД-канала, описанного в эксперименте, [4, 5]. МГД-канал (рис. 1) представляет собой два медных электрода, разделенных диэлектрической вставкой и подключенных к электрической цепи с батареей конденсаторов емкостью 10 мкФ и катушкой индуктивности 100 нГн. Боковые стенки выполнены из прозрачного материала пирекса для проведения скоростной фотосъемки. Длина МГД-канала 60 см, ширина 10 см, расстояние между электродами 5 см.

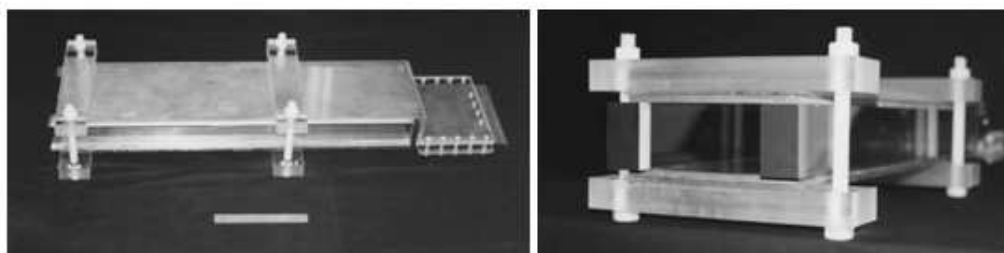


Рис. 1. Фотографии экспериментальной установки

В начальный момент МГД-канал был заполнен холодным непроводящим аргонem при давлении 100 мТор. При замыкании электрической цепи в МГД-канале происходит пробой холодного газа, формируется дуговой разряд, который затем развивается в токовый слой. Возникающее при этом магнитное поле, параллельное плоскости электродов, ускоряет плазменный сгусток. Под действием теплового и силового факторов происходит формирование

плазменного поршня (Т-слоя), который ускоряет участок газового потока, оказавшийся перед ним. Впереди Т-слоя следует сжатый им массовый сгусток, плотность которого резко падает при переходе к волне разрежения, возникающей за Т-слоем. Низкое давление плазмы в хвосте токового слоя приводит к тому, что параметр Холла в волне разряжения становится достаточно большим. В результате чего возникает холловская компонента силы тока, а вместе с ней и перпендикулярная потоку компонента силы Лоренца, которая приводит к тому, что токовый слой отклоняется от ортогонального к электродам направления (рис. 2). Следующей фазой развития Т-слоя является так называемая фаза "снежного плуга", которая начинается, когда искривленная токовая ветвь соединяется с катодом. Непроницаемый для холодного газа Т-слой подобно плугу сгребает газ впереди себя. Основным плазменным каналом, оторвавшийся от анода, движется к катоду и на стадии "снежного плуга" превращается в след, который тянется за токовым слоем.

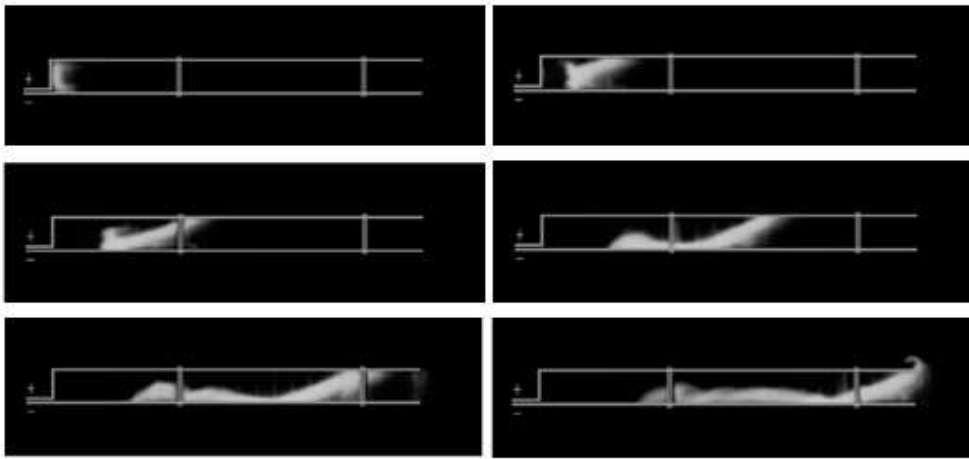


Рис. 2. Фотографии токового слоя через каждые 3 мкс [5]

1.2. Математическая модель

Для моделирования описанного физического процесса численно решалась полная система двумерных уравнений магнитной газодинамики, которая помимо трех законов сохранения массы, импульса и энергии включала уравнение индукции магнитного поля с учетом эффекта Холла.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) = S(T), \quad (1)$$

здесь $S(T)$ — источниковое слагаемое, отвечающее за увеличение массы газа в МГД-канале, связанное с интенсивной эрозией электродов. Значение этого источника определяется из эмпирического соотношения, величины входящих в соотношение коэффициентов подобраны в результате методических расчетов $S(T) = 0,5 \cdot e^{-\frac{1.5}{T}}$.

Закон сохранения импульса с учетом силы Лоренца:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) = j_y \cdot B, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P) = -j_x \cdot B. \quad (3)$$

Закон сохранения энергии с учетом джоулевой диссипации и радиационных потерь:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot (e + P)) + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot (e + P)) = \vec{J} \cdot \vec{E} - q_r, \quad (4)$$

здесь e — полная удельная энергия плазмы, P — давление газа, u и v — компоненты вектора скорости потока \vec{V} , ρ — плотность газа, T — температура, \vec{J} — плотность электрического тока, \vec{E} — напряженность электрического поля, q_r — радиационные потери.

В качестве уравнения состояния аргона используется уравнение идеального газа.

Радиационные потери энергии из объема плазмы, расчет которых даже в грубом приближении составляет сложную проблему, в данной модели учитывались как величина, пропорциональная T^4 . Коэффициент пропорциональности подбирался с расчетом, чтобы радиационные потери стабилизировали температуру плазмы в Т-слое на уровне $2 \cdot 10^4$ К [3]. Данный подход отражает экспериментальные данные о свойствах плазмы в условиях, близких к настоящей задаче. Таким образом, радиационные потери в единице объема плазмы брались в виде $q_r = q_0 \cdot T^4$, $q_0 \sim 10$.

Для инициирования токового слоя в начале канала создается локальное изобарическое возмущение температуры до $T_{max} = 10^4$ К.

В качестве граничных условий для газодинамических параметров на твердых стенках ставятся условия скольжения и непротекания, на выходе из МГД-канала — условие "сноса", т. е. равенство нулю производной по нормали к границе для всех величин.

Распределение электромагнитных величин находится из уравнений Максвелла, дополненных дифференциальным законом Ома с учетом эффекта Холла:

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{|B|} \cdot \beta, \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \cdot \nabla \times \vec{B}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Объединяя эти уравнения, получим уравнение индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma} \cdot \nabla B - B \cdot \left(\vec{V} - \frac{\vec{J} \cdot \beta}{B \cdot \sigma} \right) \right), \quad (5)$$

здесь B — ненулевая компонента вектора индукции магнитного поля \vec{B} , параллельная плоскости электродов и перпендикулярная направлению потока газа, β — параметр Холла, σ — электропроводность плазмы, μ — относительная магнитная проницаемость плазмы, μ_0 — магнитная постоянная.

Для определения граничных условий на магнитное поле, на левой границе расчетной области, решается электротехническое уравнение цепи с конденсатором и контуром возбуждения, который индуктивно связан с плазмой:

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) - U(t) = -\frac{d}{dt} \Phi(t), \quad l_z \cdot E = -\frac{d}{dt} \Phi(t), \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{I(t)}{C},$$

$$I(t) = \frac{B(0, t)}{h \cdot \mu_0}, \quad U(0) = 9 \text{ кВ}, \quad I(0) = 0 \text{ А}, \quad C = 10 \text{ мкФ}, \quad L = 100 \text{ нГн},$$

здесь R — сопротивление цепи, U — напряжение на конденсаторе, Φ — магнитный поток, I — ток в цепи, L — индуктивность плазмы, C — емкость конденсатора, l_z — ширина электродов, h — шаг разностной сетки. На остальных границах задавались условия Неймана: $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ при $x = l_x$, $\frac{\partial B}{\partial y} = 0$ при $y = 0$ и $y = l_y$.

В качестве модели плазмы была использована равновесная модель. Электропроводность газа рассчитывалась по эмпирической формуле, [3], качественно верно отражающей поведение реальной плазмы:

$$\sigma = \frac{\sigma_L \sigma_S}{\sigma_L + \sigma_S}, \quad \sigma_S = \frac{1,53 \cdot 10^{-2} T^{\frac{3}{2}}}{\ln(\Lambda)}, \quad \sigma_L = \frac{n_e \cdot e^2}{m_e \cdot \sigma_{ea}^{tr} \cdot V_{ea}},$$

здесь σ_L – лоренцевская проводимость, обусловленная электрон-атомными столкновениями, которые преобладают в плазме при низких температурах, σ_S – спитцеровская проводимость, обусловленная кулоновскими электрон-ионными столкновениями, которые преобладают при более высоких температурах.

Концентрация электронов n_e для равновесной плазмы аргона находилась из уравнения Саха:

$$n_e = -K_s + \sqrt{K_s^2 + \frac{P \cdot K_s}{k \cdot T}}, \quad K_s = \frac{(2\pi m_e k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \exp\left(-\frac{I}{kT}\right),$$

здесь I – потенциал ионизации атомов аргона, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, m_e – масса электрона.

Параметр Холла вычислялся из следующего соотношения: $\beta = \frac{eB}{m_e(\nu_{ea} + \nu_{ei})}$, $\nu_{ei} = 8,83 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot T^{-\frac{3}{2}}$, $\nu_{ea} = n_a \cdot V_{ea} \cdot \sigma_{ea}^{tr}$, здесь ν_{ei} – частота столкновений электронов с ионами, ν_{ea} – частота столкновений электронов с атомами.

2. Вычислительный алгоритм

2.1. Общая схема алгоритма

Расчетная область представляет собой прямоугольник (рис. 3), ограниченный сверху и снизу электродными стенками канала, слева – диэлектрической стенкой, а справа – выходной границей. Простота геометрии задачи позволяет получать численное решение на однород-

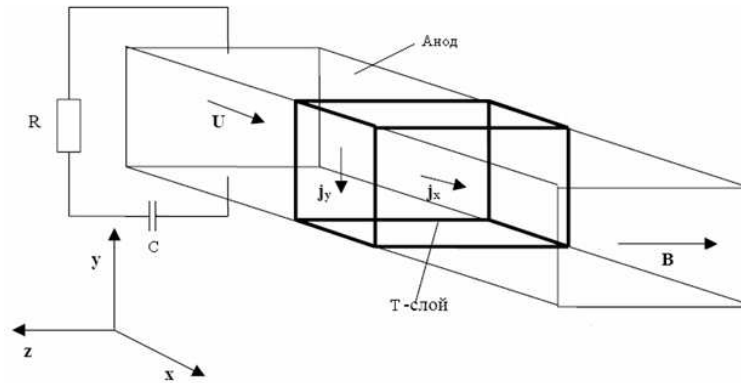


Рис. 3. Расчетная область

ной прямоугольной сетке. Представленные ниже результаты расчетов получены на разностной сетке 300×60 узлов (размеры расчетной ячейки $2 \times 0,8$ мм).

Взаимодействие подсистемы Эйлера с уравнениями Максвелла осуществлялось при помощи метода расщепления по физическим процессам, [6], суть которого состоит в следующем. На первом этапе учитываются конвективные потоки и газодинамическая сила путем решения подсистемы Эйлера явной TVD схемой Хартена:

$$\frac{\vec{U}^* - \vec{U}^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left(G(\vec{U}) \right)^n + \frac{\partial}{\partial y} \left(H(\vec{U}) \right)^n = 0.$$

Здесь \vec{U} — вектор газодинамических величин, τ — шаг по времени, определяемый из условия Куранта, n — номер временного слоя, \vec{U}^* — промежуточное распределение.

На втором этапе находятся распределения электрического и магнитного полей путем решения уравнения магнитной индукции:

$$\frac{B^k - B^n}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^* \cdot \frac{\partial B^k}{\partial x} - B^k \cdot u^* \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^* \cdot \frac{\partial B^k}{\partial y} - B^k \cdot v^* \right) + f^k.$$

На третьем — учитываются МГД-эффекты (сила Лоренца, джоулева диссипация) и объемные радиационные потери энергии:

$$\rho^* \frac{u^{k+1} - u^*}{\tau} = j_y^k B^k, \quad \rho^* \frac{v^{k+1} - v^*}{\tau} = -j_x^k B^k, \quad \rho^* \frac{\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^*}{\tau} = \frac{(\vec{j}^k)^2}{\sigma^k} - q_0 (T^k)^4,$$

где k — номер внутренней итерации, ε — внутренняя энергия газа.

Для увеличения устойчивости метода производилась корректировка \vec{U}^{k+1} при помощи метода нижней релаксации: $\vec{U}^{k+1} = \alpha \cdot (\vec{U})^{k+1} + (1 - \alpha) \cdot \vec{U}^k$, здесь α — параметр нижней релаксации, выбирался равным 0.2. После достижения сходимости этого итерационного процесса полученное решение \vec{U}^{k+1} принимается за решение на новом временном слое.

2.2. Численное решение уравнений газовой динамики

Решение подсистемы уравнений Эйлера достигается явной TVD-схемой Хартена [7], позволяющей получать квазимонотонное решение со вторым порядком аппроксимации во всей расчетной области и обеспечивающей хорошее разрешение контактных разрывов и ударных волн. TVD-схемы обладают переменным порядком точности. Это означает, что численная разностная схема является нелинейной, зависит от характера решения и может локально менять свой порядок аппроксимации. Такая гибридность схемы позволяет проводить сквозной счет схемой повышенного порядка точности в областях гладкости решения и использовать монотонную схему первого порядка точности в областях, где решение обладает большими перепадами значений сеточных функций. Создание методик гибридных схем, а также их многочисленных разновидностей привело к значительному повышению качества получаемых численных решений по сравнению с классическими разностными схемами фиксированного порядка точности.

Реализацию TVD-схемы покажем на примере скалярного уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad a(u) = \frac{df(u)}{du}.$$

Рассмотрим явную разностную схему: $u^{n+1} = u^n - \lambda \left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n \right)$, $\lambda = \tau/h$.

В дальнейшем верхний индекс n обозначающий величины, взятые на n -ом временном слое, опускается. В общем случае потоки для схемы первого порядка с разностями против потока имеют вид:

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2} [f(u_{i+1}) + f(u_i) - \psi(a_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} u], \quad \Delta_{i+1/2} u = u_{i+1} - u_i,$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \varepsilon, \\ \frac{z^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & |z| < \varepsilon. \end{cases}$$

Дополнительное слагаемое отвечает за численную вязкость схемы первого порядка и обеспечивает энтропийную коррекцию. Процедура энтропийной коррекции — это алгоритм, который позволяет избежать в численных результатах нефизических решений, в частности газодинамических ударных волн разряжения.

В разработанной Хартемом TVD схеме, в схеме первого порядка модифицируется потоковая функция, таким образом, чтобы сформированный поток был второго порядка аппроксимации по пространственной переменной:

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2} [f(u_{i+1}) + f(u_i) + g_{i+1} + g_i - \psi(a_{i+1/2} + \gamma_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} u],$$

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} (f(u_{i+1}) - f(u_i)) / \Delta_{i+1/2} u, & \Delta_{i+1/2} u \neq 0, \\ a(u_i), & \Delta_{i+1/2} u = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_{i+1/2} = \begin{cases} (g_{i+1} - g_i) / \Delta_{i+1/2} u, & \Delta_{i+1/2} u \neq 0, \\ 0, & \Delta_{i+1/2} u = 0. \end{cases}$$

Для противопоточной схемы второго порядка:

$$g_i = \min \text{ mod } \left[\frac{1}{2} \psi(a_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} u, \frac{1}{2} \psi(a_{i-1/2}) \Delta_{i-1/2} u \right],$$

$$\min \text{ mod } (x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max(0, \min(|x|, \text{sgn}(x)y)).$$

В качестве тестов алгоритма расчета уравнений газовой динамики было рассмотрено несколько вариантов распада произвольного разрыва газодинамических параметров. Здесь приводим задачу распада с образованием ударной волны. Начальные условия для тестовой задачи приведены в табл. 1 (в безразмерных единицах). Расчет проводился на отрезке от 0 до 2, расчетная сетка содержала 200 узлов.

Таблица 1. Начальные условия

Газодинамические параметры	$0 \leq X \leq 1$	$1 \leq X \leq 2$
Плотность	0,445	0,5
Давление	3,528	0,57
Скорость	0,698	0

Результаты сопоставления численного расчета и аналитического решения представлены на рис. 4. Решение получено для момента времени $t = 0,33$. Как видно из сравнения, расчет хорошо воспроизводит поведение аналитического решения.

2.3. Численное решение уравнения магнитной индукции

Основная трудность данной работы заключалась в решении уравнения магнитной индукции (5). Сложность численного решения данного уравнения заключается в сильной нелинейности, вызванной наличием членов, связанных с эффектом Холла. Как известно, МГД-задачи с эффектом Холла являются неустойчивыми, и поэтому обычно такие задачи решаются при помощи уравнения для потенциала электрического поля в приближении постоянства магнитной индукции или с использованием вектор-потенциала магнитного поля. Особенность данной работы заключается в том, что уравнение магнитной индукции было решено в той форме, в которой оно записано в уравнении (5).

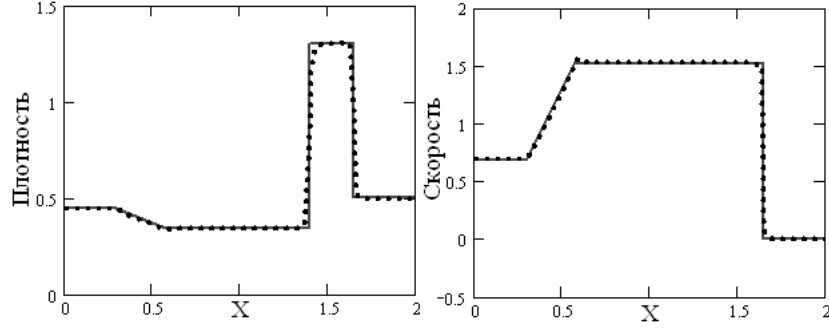


Рис. 4. Сплошной линией представлено аналитическое решение, точками — расчетное

Стоит также заметить, что дифференциальное уравнение (5) является задачей с сильно меняющимися коэффициентами и большими градиентами в решении, что также наложило свои ограничения на выбор метода решения. Преодолеть выше описанные трудности удалось использованием абсолютно устойчивой схемы экспоненциальной подгонки.

Рассмотрим модельное диффузионно-конвективное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - b_1(x, y) \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - b_2(x, y) \varphi \right) = f(x, y),$$

где a — коэффициент диффузии, \vec{b} — вектор скорости потока. Численное решение диффузионно-конвективных уравнений с малым коэффициентом диффузии при помощи традиционных конечно-разностных методов сопряжено со значительными трудностями. Центральная-разностная аппроксимация конвективного слагаемого приводит к условно устойчивой разностной схеме при выполнении условия $Re_h < 1$, $Re_h = \frac{b \cdot h}{2a}$ — разностное число Рейнольдса. Выполнение данного условия накладывает жесткое ограничение на шаг сетки. Применение односторонних направленных разностей ведет к появлению численной диффузии.

Один из способов решения данной проблемы — метод экспоненциальной подгонки. Одной из первых публикаций, где приводится строгое обоснование данного подхода, является работа [8]. Суть метода состоит в локальной перестройке разностного оператора, достаточно полное изложение различных способов применения экспоненциальной подгонки при построении разностных схем, доказательство абсолютной устойчивости методов решения и равномерной сходимости по малому параметру приведены в обзорной монографии [9]. Метод экспоненциальной подгонки хорошо себя зарекомендовал при численном исследовании процессов в МГД-устройствах [10].

Разностная аппроксимация конвективных и диффузионных слагаемых уравнения осуществляется по каждой пространственной переменной в соответствии со схемой:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x} - b\varphi \right) \approx a_R g_R \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j} \exp\left(-\frac{b_R h_x}{a_R}\right)}{h_x^2} + a_L g_L \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j} \exp\left(\frac{b_L h_x}{a_L}\right)}{h_x^2}.$$

Здесь $a_R = \frac{2a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}}$, $a_L = \frac{2a_i a_{i-1}}{a_i + a_{i-1}}$, $b_R = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}$, $b_L = \frac{b_i + b_{i-1}}{2}$;

$$g_R \approx \left(\frac{1}{h_x} \int_0^{h_x} e^{-b(x-x_i)/a} dx \right)^{-1}, \quad g_R = \frac{b_R h_x}{a_R (1 - e^{-b_R h_x / a_R})},$$

$$g_L \approx \left(\frac{1}{h_x} \int_{-h_x}^0 e^{-b(x-x_i)/a} dx \right)^{-1}, \quad g_L = \frac{b_L h_x}{a_L (e^{b_L h_x / a_L} - 1)}.$$

Аппроксимация производных по координате y двумерного диффузионно-конвективного уравнения производится аналогично.

Далее в качестве теста приводим сравнение классических методов и метод экспоненциальной подгонки на следующем примере: $-\left(\frac{\varepsilon}{x^2 - x + 2} u'(x)\right)' + (1 - 0.2x^2) u'(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

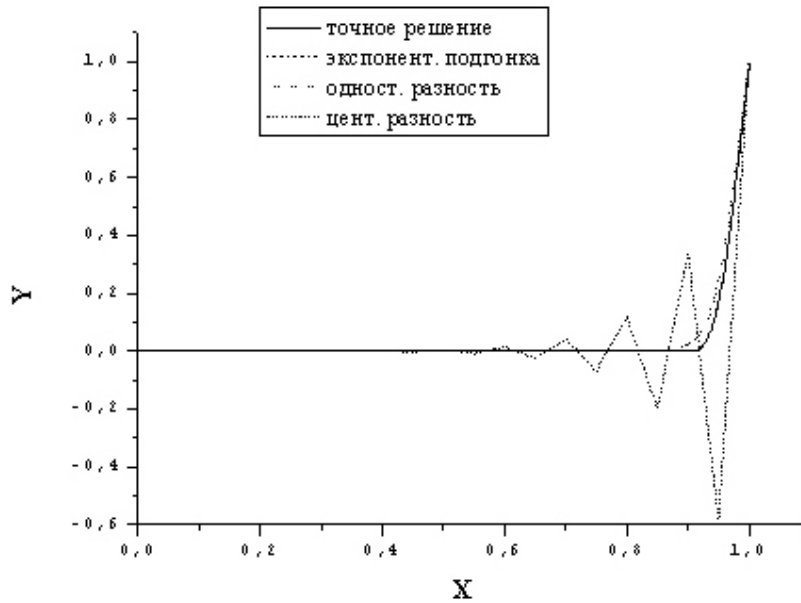


Рис. 5. Решение тестовой задачи различными методами

На рис. 5 приведены графики полученных решений в случае, когда сеточное число Рейнольдса больше 1 ($Re_h = 1, 2$). При таких значениях параметров центрально-разностная схема является неустойчивой, решение осциллирует. Решение, полученное при помощи схемы с односторонней разностью, имеет ошибку первого порядка. Решение, полученное с помощью экспоненциальной подгонки, практически накладывается на точное решение. Метод экспоненциальной подгонки показывает одинаково хорошие результаты как при значениях разностного числа Рейнольдса, превосходящих единицу, так и при малых значениях, данный метод является универсальным способом численного исследования диффузионно-конвективных уравнений.

3. Вычислительный эксперимент

Все представленные в работе результаты приведены в безразмерных единицах, для перевода величины в СИ нужно умножить ее на соответствующий размерный множитель: $T = 10^4$ К, $V = 10^3$ м/с, $P = 10^5$ Па, $J = 10^5$ А/м², $E = 10^3$ В/м, $B = 1$ Тл, $m = 10^{-1}$ кг, $t = 10^{-3}$ с. Для того чтобы отразить динамику нестационарного процесса, на рис. 6 приведено одномерное распределение всех параметров по длине канала для четырех последовательных моментов времени.

Из характера расчетных кривых видно, что начальный плазменный сгусток формируется в токовый слой, температура которого стабилизируется на уровне $2 \cdot 10^4$ К. Толщина Т-слоя примерно равна 2 – 3 см, что обеспечивает гидродинамическую устойчивость поршневой структуры по отношению к неустойчивости Релея-Тейлора. Распределение скорости в потоке рабочего тела имеет неоднородную структуру, в которой скачок скорости соответствует левой границе Т-слоя, т. е. газ в волне разрежения не успевает за плазменным поршнем. В результате плотность в этом месте потока сильно падает. Взаимодействие Т-слоя с газовым потоком приводит к формированию массовых сгустков.

Сопоставляя взаимное расположение скачков плотности и пиков температуры, обнаруживаем, что максимум плотности опережает максимум температуры как раз на толщину Т-слоя. Это непосредственный результат воздействия плазменного поршня на газ. Из анализа распределения магнитного поля в канале видно, что образуется ступенчатая структура с резким падением магнитной индукции на Т-слое. Следует отметить, что Т-слой не полностью экранирует магнитное поле, которое сохраняет достаточное значение. Токовый слой, подобно поршню, увлекает за собой холодный газ, поэтому давление в волне разрежения за Т-слоем сильно падает по мере продвижения плазмы по каналу. Низкое давление плазмы в хвосте токового слоя, как и ожидалось, приводит к тому, что параметр Холла в волне разряжения достигает значительной величины. Однако из-за высокой температуры плазмы в МГД-канале происходит непрерывная эрозия электродов, которая обеспечивает приток массы газа в волну разрежения, поэтому давление (а вместе и ним и параметр Холла) в хвосте Т-слоя постепенно стабилизируется. В данной работе приток массы от горящих электродов моделировался введением источника в уравнение неразрывности. Определение точного количества образующегося газа — весьма сложная задача, но качественно можно считать, что интенсивность эрозии зависит от температуры по закону Аррениуса. Введение источника не только привело к уменьшению параметра Холла в волне разрежения до величин, соответствующих эксперименту, но и в целом стабилизировало расчет.

На рис. 7–9 в виде изолинии приведено двумерное распределение скорости газа, магнитной индукции и плотности тока в расчетной области. Поскольку параметр Холла в МГД-канале намного превышает единицу, возникает достаточно большая холловская компонента силы тока, а вместе с ней и перпендикулярная потоку компонента силы Лоренца. Токовый слой, оставаясь непроницаемым для холодного газа, отклоняется от ортогонального к электродам направления, т. е. имеет место ярко выраженное явление "накренения" (canting) плазменного сгустка. Представленные на рис. 7–9 изолинии наглядно демонстрируют такое поведение токового слоя. Для сопоставления расчета с экспериментом в работе [5] приводим измеренное в различные моменты времени распределение плотности тока (рис. 10). Как можно видеть, численные результаты (рис. 9) качественно верно описывают поведение Т-слоя в эксперименте.

Для изучения влияния параметра Холла на токовый слой был проведен расчет с параметром Холла, равным нулю. Результаты расчета представлены на рис. 11. Как видно из рисунков, отклонения токового слоя от направления, перпендикулярного электродам, в этом случае не наблюдается. Таким образом, показана ключевая роль эффекта Холла в возникновении "накренения" токового слоя.

Если сопоставить распределение плотности тока в МГД-канале с учетом (рис. 9) и без учета эффекта Холла (рис. 11) в одни и те же моменты времени, то видно, что накрененный токовый слой существенно запаздывает относительно плоского токового слоя. С ростом угла наклона токового слоя его отставание увеличивается. Это связано с тем, что часть электромагнитной энергии затрачивается на движение токового слоя поперек канала. В данном случае установлено, что наличие эффекта Холла приводит к тому, что скорость на выходе из МГД-канала оказывается примерно на 30 – 40 % меньше той скорости, которая могла бы быть, если бы токовый слой оставался плоским. Таким образом, при проектировании ЭРД с неоднородной токовой структурой необходимо стараться, чтобы параметр Холла в таком

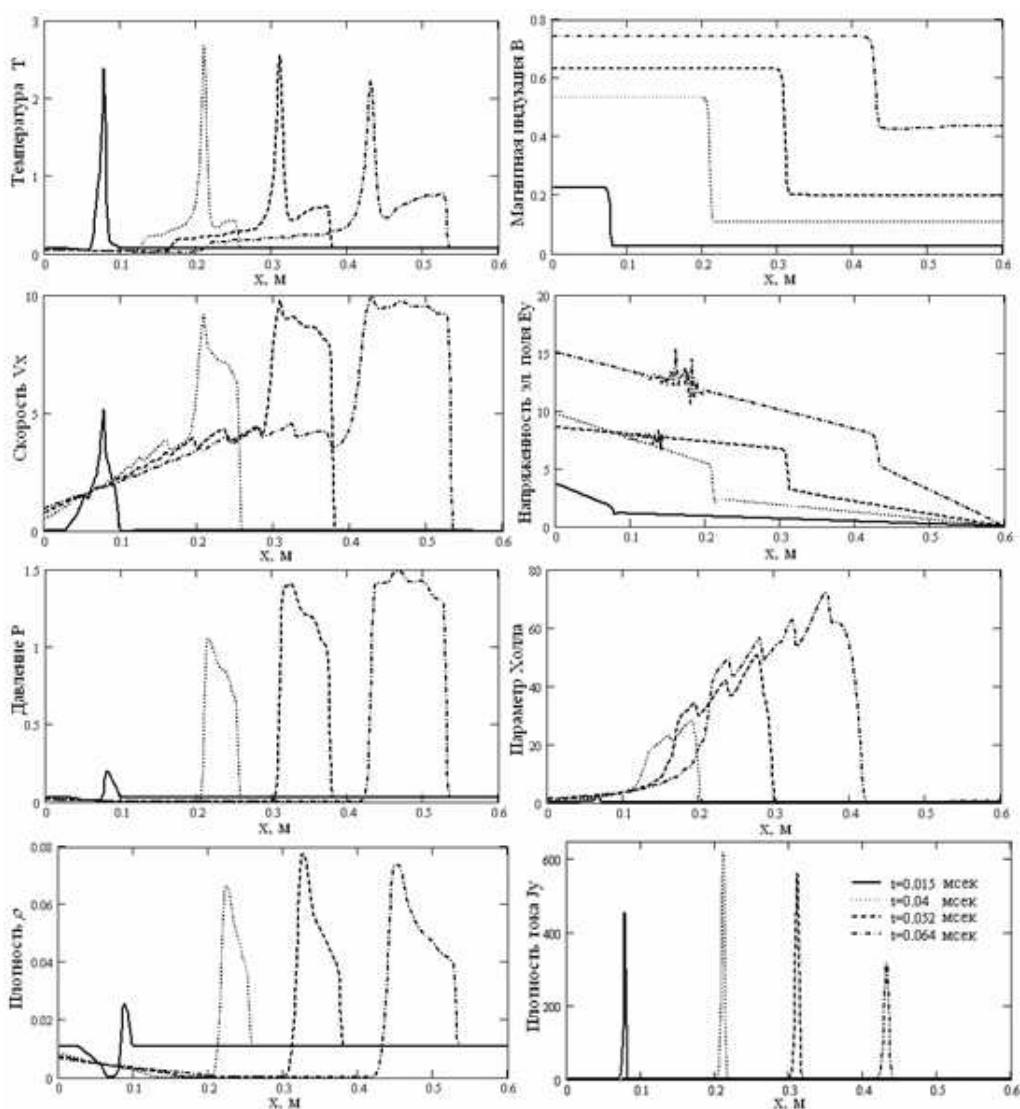


Рис. 6. Мгновенное распределение величин вдоль центральной линии МГД-канала

устройстве был как можно меньше.

Заключение

По результатам проделанной работы можно сделать следующие выводы:

- Разработан высокоэффективный численный алгоритм, позволяющий рассчитывать широкий класс двумерных нестационарных сильно неоднородных МГД-течений идеального газа, с большими значениями параметра Холла.
- В результате применения разработанного алгоритма решена задача двумерного численного моделирования МГД-процесса эволюции плазменного сгустка в канале линейного ускорителя. В работе получено численное подтверждение наблюдаемого в экспе-

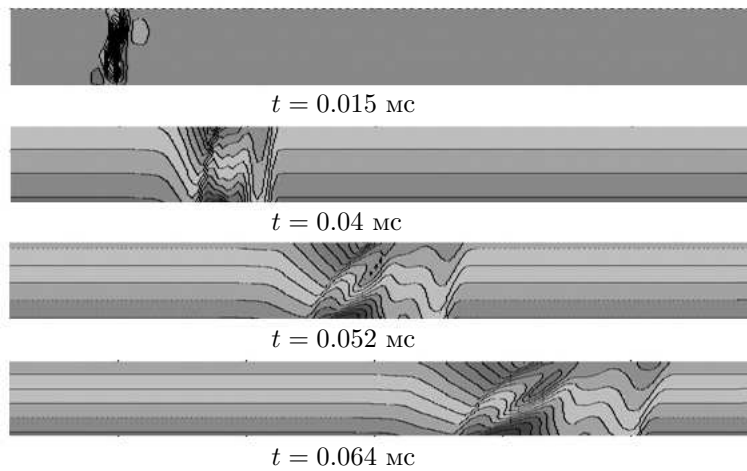


Рис. 7. Изолинии осевой скорости газа от -1 до 10 в различные моменты времени

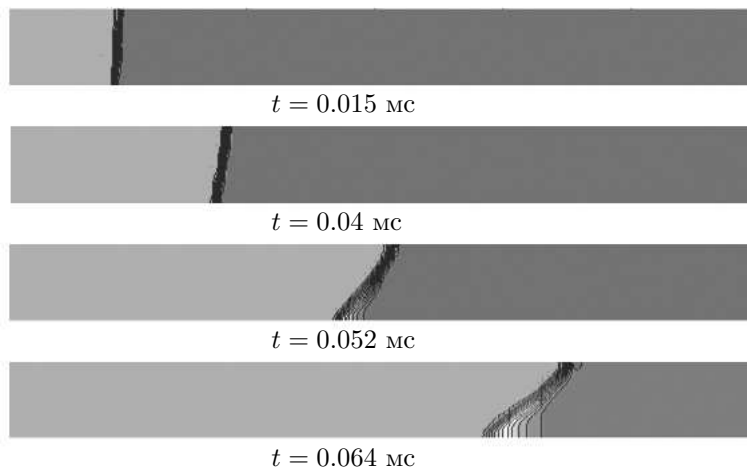


Рис. 8. Изолинии магнитной индукции в диапазоне от $0,01$ до $0,78$ в различные моменты времени

риментах эффекта отклонения Т-слоя от направления, перпендикулярного электродам. Показана ключевая роль эффекта Холла при развитии данного явления. Установлено, что влияние эффекта Холла приводит к уменьшению на $30 - 40\%$ средней скорости на выходе из МГД-канала.

- Основной результат данной работы состоит в том, что было показано, что система уравнений магнитной газодинамики в рассмотренной постановке дает возможность качественно правильно предсказывать поведение токового слоя на поздних этапах его развития в стадии снежного плуга.
- В целом, по итогам данного исследования можно подчеркнуть, что наличие пространственных эффектов, хотя и существенно сказывается на работе МГД-устройства, но в целом не перечеркивает идею создания эффективного МГД-ускорителя с неоднородным газоплазменным потоком. Дальнейшее исследование этой проблемы, по-видимому, потребует включение в обобщенный закон Ома слагаемого, связанного

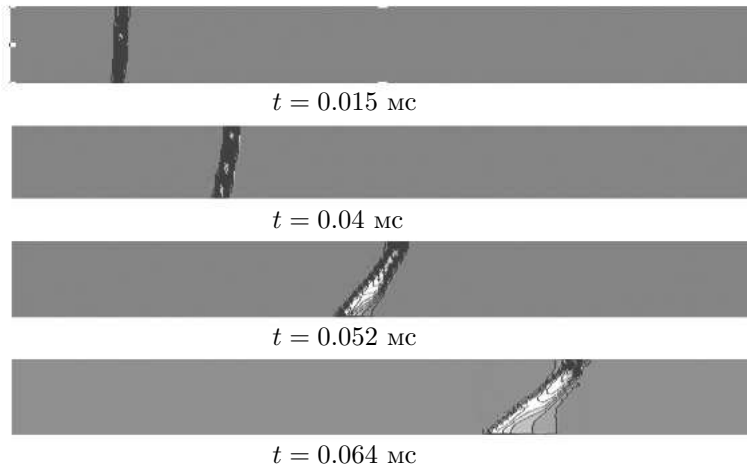


Рис. 9. Изолинии плотности тока в диапазоне от 0 до 640 в различные моменты времени

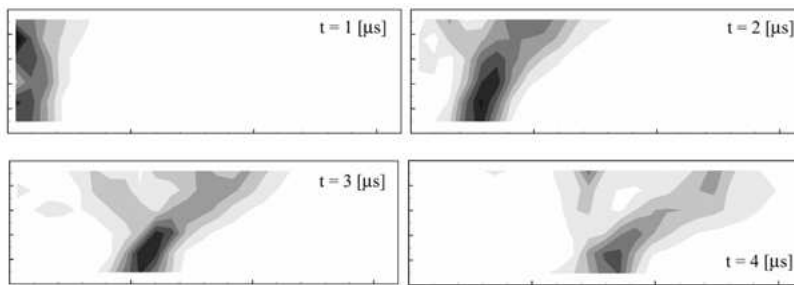


Рис. 10. Экспериментальные изолинии плотности тока в диапазоне от 0 до 400 в различные моменты времени

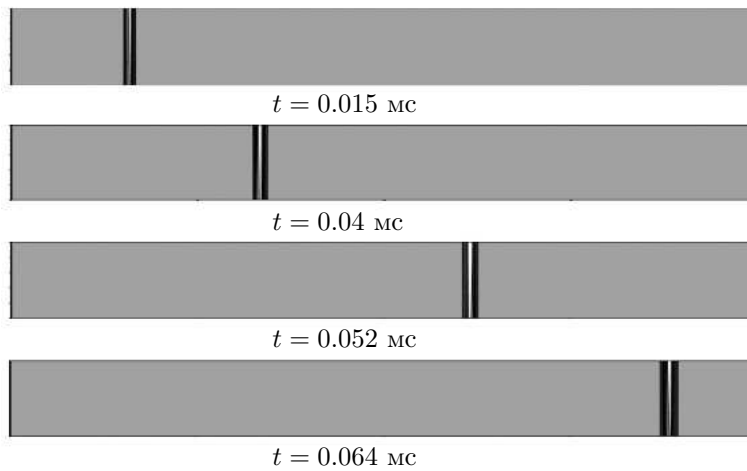


Рис. 11. Изолинии плотности тока в диапазоне от 0 до 730 в различные моменты времени без учета эффекта Холла

с градиентом давления, а также учета вязких сил и турбулентности.

Список литературы

- [1] В.С.Славин, Е.Н.Васильев, В.В.Овчинников, Диаграмма состояний стабилизированного токового слоя в канале МГД-генератора, *Докл. АН СССР*, **290**(1986), №6, 1305–1309.
- [2] А.А.Гаврилов, В.С.Славин, Структура турбулентного неоднородного газоплазменного течения в канале магнитогидродинамического ускорителя, Сборник докладов XXVI Сибирского теплофизического семинара, 2002.
- [3] В.С.Славин, В.С.Соколов, К.А.Финников и др., Космическое применение магнитогидродинамических методов преобразования энергии с использованием неоднородных газоплазменных потоков, Под ред. В.С.Славина, Красноярск, ИПЦ КГТУ, 2004.
- [4] T.E.Marcusic, E.Y.Choueiri, Phenomenological model of current sheet canting in pulsed electromagnetic accelerators, In 28th International Electric Propulsion Conference, Toulouse, France, March 17–24, 2003, IEPC 2003–0293.
- [5] T.E.Marcusic, E.Y.Choueiri, J.W.Berkery, Measurements of current sheet canting in pulsed electromagnetic accelerator, *Physics of plasmas*, **11**(2004), №10.
- [6] Г.И.Марчук, Методы расщепления, М., Наука, 1988.
- [7] A.Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of computational physics*, **49**(1983), 357–393.
- [8] А.М.Ильин, Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, *Матем. заметки*, **6**(1969), №2, 237–248.
- [9] Э.Дулан, Дж.Миллер, У.Шилдерс, Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем, М., Мир, 1983.
- [10] И.А.Кузоватов, Т.А.Миловидова, В.С.Славин, Анализ влияния эффекта Холла на структуру неравновесного плазменного слоя в канале МГД-генератора, *Вычислительные технологии*, **12**(2007), №4, 73–84.

The Hall Effect Influence on Current Layer Structure in MHD Accelerator Channel

Igor A. Kuzovatov
Andrey V. Minakov

The mathematical modeling of unsteady process flowing in the channel of the plane MHD accelerator is done. In full statement the two-dimensional problem of the magnetic hydrodynamics with the Hall's effect has been solved numerically. The obtained results agree with the experimental data in the quality way.

Keywords: mathematical simulation of physical processes, computational hydrodynamics, exponential fitting.