Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 479–488

УДК 517.518.87

Оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара

Кирилл А. Кириллов*
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 06.07.2011, окончательный вариант 06.08.2011, принята к печати 10.09.2011

На пространствах S_p и H_α найдены оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара.

Ключевые слова: d–свойство Хаара, функционал погрешности квадратурной формулы, пространства функций S_p, H_α.

Введение

Задача построения и исследования кубатурных (квадратурных) формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Кубатурные формулы, точные для конечных сумм Хаара, можно найти в монографии И. М. Соболя [1]. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), было проведено в [2, 3]. В [4] были получены оценки нормы функционала погрешности некоторых из весовых квадратурных формул, построенных в [2].

Представленная работа посвящена исследованию квадратурных формул с весовой функцией $g(x) \equiv 1$, точных для полиномов Хаара. На пространствах S_p найдена нижняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных на константах, и верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара; на пространствах H_α получена верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара.

Установлено, что для рассмотренных в данной работе квадратурных формул $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ при $N = 2^{d-1}$ имеет наилучший порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, равный $N^{-\frac{1}{p}}$; величина $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ при $N = 2^{d-1}$, так же как и для формул с узлами на Π_τ–сетках, исследованных И.М.Соболем [1], ограничена по сравнению с $N^{-\alpha}$, $N \to \infty$. В то же время исследованные автором настоящей статьи квадратурные формулы, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования при указанных ограничениях на число узлов, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

1. Основные определения

В настоящей работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А.Хааром [5], отличное от определения этих функций из [1] в точках разрыва.

*kkirillov@rambler.ru

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $2^{-m+1}(j-1)$, $2^{-m+1}j \quad (m=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots,2^{m-1})$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x)=\begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x\in l^-_{m,j},\\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x\in l^+_{m,j},\\ 0 & \text{при } x\in[0,1]\setminus\overline{l_{m,j}},\\ \frac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0)+\chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,}\end{cases} \tag{1}$$

$\overline{l_{m,j}}=[\,2^{-m+1}(j-1),2^{-m+1}j\,],\quad m=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots,2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,0}(x)\equiv 1$, которая остается вне групп.

Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{0,0}(x)$, $\chi_{m,j}(x)$, где $m=1,2,\ldots,d,\ \ j=1,2,\ldots,2^{m-1}$, причем хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{d,j}(x)$ группы номер d отличен от нуля.

Будем рассматривать квадратурные формулы

$$I[f]=\int\limits_0^1 f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)})=Q[f], \tag{2}$$

где $f(x)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0,1]$, $x^{(i)}\in[0,1]$ — узлы формулы, C_i — коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа), $i=1,2,\ldots,N$.

Функционал погрешности квадратурной формулы (2) обозначим через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f]=I[f]-Q[f]=\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}). \tag{3}$$

Будем говорить, что квадратурная формула (2) обладает d–свойством Хаара, или просто — d–свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x)$ степени, не превосходящей d, т. е.

$$Q[P]=I[P].$$

2. Оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул на пространствах S_p

В настоящем разделе будем считать, что коэффициенты при узлах квадратурной формулы (2) положительны:

$$C_i>0,\ i=1,2,\ldots,N.$$

Сформулируем определение линейного нормированного пространства S_p [1].

Пусть $p>1$ — фиксированный параметр, через q обозначим сопряженное ему значение:

$$p^{-1}+q^{-1}=1.$$

Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x) = c_{0,0} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j} \chi_{m,j}(x) \tag{4}$$

с вещественными коэффициентами $c_{0,0}$, $c_{m,j}$ ($m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$), удовлетворяющими условию

$$A_p(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant A, \tag{5}$$

(A — вещественная константа), определяется как класс $S_p(A)$. Доказано [1], что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле

$$||f||_{S_p} = A_p(f). \tag{6}$$

Указанное линейное нормированное пространство обозначается S_p. При этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются за одну функцию.
Лемма 1. *Если функция $f \in S_p$, то для модуля функционала погрешности квадратурной формулы (2), точной на константах, имеет место неравенство:*

$$|\delta_N[f]| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \Sigma_q(m), \tag{7}$$

где

$$\Sigma_q(m) = 2^{-\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |Q[\chi_{m,j}]|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Доказательство. В [1] доказано, что если $f(x) \in S_p$, то ряд (4) сходится абсолютно и равномерно. Подставим его в выражение (3) для $\delta_N[f]$. Учитывая точность квадратурной формулы (2) на константах, выражение для $\left|\delta_N[f]\right|$ запишем в виде

$$\left|\delta_N[f]\right| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j} Q[\chi_{m,j}] \right|. \tag{9}$$

В силу абсолютной сходимости ряда в правой части равенства (9) имеет место неравенство

$$|\delta_N[f]| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j} Q[\chi_{m,j}]| \,. \tag{10}$$

Применяя неравенство Гёльдера к сумме по j в правой части (10), с учетом равенства (8) получаем (7). □
Лемма 2 [2]. *Функции*

$$\kappa_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^m & \text{при } x \in l_{m+1,j}, \\ 2^{m-1} & \text{при } x \in \overline{l_{m+1,j}} \setminus l_{m+1,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m+1,j}}, \end{cases} \tag{11}$$

$j = 1, 2, \ldots, 2^m$, являются полиномами Хаара степени m и образуют базис в линейном пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих m, $m = 1, 2, \ldots$
Лемма 3. *Имеют место равенства:*

$$\chi_{m,j}(x) = 2^{-\frac{m+1}{2}} \left[\kappa_{m,2j-1}(x) - \kappa_{m,2j}(x) \right], m = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}, \tag{12}$$

$$\kappa_{m,2j-1}(x)+\kappa_{m,2j}(x)=2\kappa_{m-1,j}(x),\ m=2,3,\dots,\ j=1,2,\dots,2^{m-1}. \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) непосредственно следуют из равенств (1) и (11).

Лемма 4. *Для любой квадратурной формулы (2) и любого целого положительного числа M существует хотя бы одно значение $m_0 \geqslant M$, такое что*

$$\varSigma_q(m_0)=\sup_{M\leqslant m<\infty}\varSigma_q(m). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $m_1=\min\{m\geqslant M$: каждый отрезок $\overline{l_{m+1,j}}$ содержит не более одного узла квадратурной формулы (2), $j=1,2,\dots,2^m\}$. Если узлы формулы (2) $x_i\notin\{2^{-m_1}(2j-1):\ j=1,2,\dots,2^{m_1-1}\},\ i=1,2,\dots,N$, то положим $m'=m_1$. В противном случае положим $m'=1+\max\big\{m:\ $ существует $x^{(r)}=2^{-m}(2j_r-1)\ j_r\in\{1,2,\dots,2^{m-1}\}\ \big\}$.

Тогда для значения $m=m'$ выполняются следующие три условия:

– имеет место неравенство $m\geqslant M$,

– каждый отрезок $\overline{l_{m+1,j}}$ содержит не более одного узла квадратурной формулы (2) $(j=1,2,\dots,2^m)$,

– узлы формулы (2) не являются точками вида $2^{-m}(2j-1)\ \ (j=1,2,\dots,2^{m-1})$.

Очевидно, для всех $m>m'$ указанные три условия также будут выполняться. В соответствии с (8), (12) имеем:

$$\varSigma_q(m')=2^{-m'}\left[\sum_{j=1}^{2^{m'-1}}\left|\sum_{i=1}^{N}C_i\left(\kappa_{m',2j-1}(x^{(i)})-\kappa_{m',2j}(x^{(i)})\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

Обозначим через N_1 число узлов квадратурной формулы (2), лежащих на границах отрезков $\overline{l_{m'+1,j}}=\operatorname{supp}\{\kappa_{m',j}\}$ и отличных от 0 и 1, то есть в точках $2^{-m'}j$ $(j=1,2,\dots,2^{m'}-1)$. Для определенности будем считать, что это узлы $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(N_1)}$ формулы. По определению числа m' узлы квадратурной формулы (2) не являются точками вида $\{2^{-m'}(2j-1)\}=\operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j-1}\}\cap\operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j}\}$ и каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы. Тогда равенство (15) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varSigma_q(m')=2^{-m'}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{2^{m'}}\left(C_i\kappa_{m',j}(x^{(i)})\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}=2^{-m'}\left[2\sum_{i=1}^{N_1}\left(2^{m'-1}C_i\right)^q+\right.\\ \left.+\sum_{i=N_1+1}^{N}\left(2^{m'}C_i\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}=\left[2\sum_{i=1}^{N_1}(0.5\,C_i)^q+\sum_{i=N_1+1}^{N}{C_i}^q\right]^{\frac{1}{q}}.\end{gathered} \tag{16}$$

Очевидно, $\varSigma_q(m)$ есть величина, не зависящая от m для всех $m\geqslant m'$, так как проведенные рассуждения имеют место не только для $m=m'$, но и для любого $m>m'$. Поэтому $\sup\limits_{M\leqslant m<\infty}$ в равенстве (14) фактически сводится к $\max\limits_{M\leqslant m\leqslant m'}$, откуда получаем утверждение леммы. □

Теорема 1. *Для функционала погрешности квадратурной формулы (2), точной на константах, имеют место следующие соотношения:*

$$|\delta_N[f]|\leqslant\|f\|_{S_p}\sup_{1\leqslant m<\infty}\varSigma_q(m),\ f\in S_p \tag{17}$$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*}=\sup_{1\leqslant m<\infty}\varSigma_q(m). \tag{18}$$

Если квадратурная формула (2) обладает d–свойством, то

$$|\delta_N[f]|\leqslant\|f\|_{S_p}\sup_{d<m<\infty}\varSigma_q(m),\ f\in S_p \tag{19}$$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{d<m<\infty} \Sigma_q(m). \tag{20}$$

Доказательство. В силу (5), (6) неравенство (17) следует из (7). Из (17) получаем:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \sup_{1\leqslant m<\infty} \Sigma_q(m).$$

Требуется доказать, что это неравенство неулучшаемо. Воспользуемся техникой доказательств, примененной в [1]. Зафиксируем значение m_0, существование которого было доказано в лемме 4. В соответствии с этой леммой

$$\sup_{1\leqslant m<\infty} \Sigma_q(m) = 2^{-\frac{m_0-1}{2}} \Big[\sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} |Q[\chi_{m_0,j}]|^q \Big]^{\frac{1}{q}}. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$f_{m_0}(x) = 2^{-\frac{m_0-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \operatorname{sgn} Q[\chi_{m_0,j}]\, |Q[\chi_{m_0,j}]|^{q-1}\, \chi_{m_0,j}(x).$$

Легко видеть, что для функции $f_{m_0}(x)$ коэффициенты Фурье – Хаара вычисляются по формулам:

$$c_{m_0,j} = 2^{-\frac{m_0-1}{2}} \operatorname{sgn} Q[\chi_{m_0,j}]\, |Q[\chi_{m_0,j}]|^{q-1}, \ j = 1, 2, \ldots, 2^{m_0-1},$$

$c_{0,0} = 0$, $c_{m,j} = 0$, $m \neq m_0$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Следовательно,

$$A_p(f_{m_0}) = \left[\sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} |Q[\chi_{m_0,j}]|^q \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{22}$$

и в соответствии с (9)

$$\delta_N[f_{m_0}] = -2^{-\frac{m_0-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} |Q[\chi_{m_0,j}]|^q . \tag{23}$$

Из (21), (22), (23) с учетом (6) получаем:

$$|\delta_N[f_{m_0}]| = A_p(f_{m_0}) \sup_{1\leqslant m<\infty} \Sigma_q(m) = \|f_{m_0}\|_{S_p} \sup_{1\leqslant m<\infty} \Sigma_q(m).$$

Отсюда следует равенство (18).

Если квадратурная формула (2) обладает d–свойством, то в силу ее точности на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, нижний индекс в сумме по m в правой части равенства (9), а значит, и неравенства (7), будет равен $d+1$, и тогда неравенство (17) примет вид (19). Так же, как и при доказательстве равенства (18), строится функция $f_{m_0}(x)$, для которой

$$|\delta_N[f_{m_0}]| = \|f_{m_0}\|_{S_p} \sup_{d<m<\infty} \Sigma_q(m), \tag{24}$$

где $m_0 > d$ удовлетворяет следующему условию:

$$\Sigma_q(m_0) = \sup_{d<m<\infty} \Sigma_q(m). \tag{25}$$

Число $m_0 > d$, для которого выполняется равенство (25), существует в силу леммы 4, применяемой в данном случае для значения параметра $M = d + 1$.

Из (19) и (24) вытекает равенство (20). □

Лемма 5. *Для целых положительных $l \leqslant m-1$ имеет место неравенство*

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} Q^q[\kappa_{m-l,j}]\Big]^{\frac{1}{q}}. \qquad (26)$$

Доказательство. Доказательство неравенства (26) проведем индукцией по l.

Из (12), (13) получаем:

$$\Big|Q[\chi_{m,j}]\Big| = 2^{-\frac{m+1}{2}}\Big|Q[\kappa_{m,2j-1}-\kappa_{m,2j}]\Big| \leqslant 2^{-\frac{m+1}{2}}Q[\kappa_{m,2j-1}+\kappa_{m,2j}] = 2^{-\frac{m+1}{2}+1}Q[\kappa_{m-1,j}],$$

откуда непосредственно следует истинность (26) при $l=1$. Исходя из индуктивного предположения о справедливости неравенства

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l-1}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l+1}} Q^q[\kappa_{m-l+1,j}]\Big]^{\frac{1}{q}}, \qquad (27)$$

докажем (26). Легко видеть, что при $a,b>0$, $q>1$ имеет место неравенство

$$a^q+b^q \leqslant (a+b)^q. \qquad (28)$$

Принимая во внимание (13), (28), из (27) получаем:

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l-1}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} \left(Q^q[\kappa_{m-l+1,2j-1}]+Q^q[\kappa_{m-l+1,2j}]\right)\Big]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-m+l-1}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} \left(Q[\kappa_{m-l+1,2j-1}]+Q[\kappa_{m-l+1,2j}]\right)^q\Big]^{\frac{1}{q}} = 2^{-m+l}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} Q^q[\kappa_{m-l,j}]\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

□

Лемма 6. *Если квадратурная формула (2) обладает d–свойством, то*

$$\sup_{d<m<\infty} \Sigma_q(m) \leqslant \left(2^d\right)^{-\frac{1}{p}}. \qquad (29)$$

Доказательство. Из леммы 2 и условия точности квадратурной формулы (2) на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, следует равенство

$$Q[\kappa_{m,j}] = I[\kappa_{m,j}] = 1, \quad m=1,2,\ldots,d, \; j=1,2,\ldots,2^m. \qquad (30)$$

В силу (30), (26) для $m-l \leqslant d$

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l}\Big[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} 1\Big]^{\frac{1}{q}} = \left(2^{m-l}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Подставляя в это неравенство значение $m=d+l$, приходим к (29). □

Лемма 7. *Если квадратурная формула (2) точна на константах, то*

$$\sup_{1\leqslant m<\infty} \Sigma_q(m) \geqslant 2^{-\frac{1}{p}}N^{-\frac{1}{p}}. \qquad (31)$$

Доказательство. Несложно показать, что при условии

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_N = 1 \ (C_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, N),$$

которое следует из точности квадратурной формулы (2) на константах, функция

$$\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_N) = 2\sum_{i=1}^{N_1} (0.5\, C_i)^q + \sum_{i=N_1+1}^{N} C_i{}^q$$

достигает своего наименьшего значения, равного $(N + N_1)^{1-q}$, когда

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{N_1} = 2(N + N_1)^{-1},\ C_{N_1+1} = C_{N_1+2} = \ldots = C_N = (N + N_1)^{-1}.$$

Тогда из (16) получаем:

$$\Sigma_q(m') \geqslant (N + N_1)^{-\frac{1}{p}} \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}},$$

где m' — значение, выбранное в доказательстве леммы 4. Отсюда следует неравенство (31). □

Теорема 2. *Для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2), точной на константах, справедлива следующая нижняя оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}. \tag{32}$$

Если квадратурная формула (2) обладает d–свойством, то

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant (2^d)^{-\frac{1}{p}}. \tag{33}$$

Неравенство (32) следует из теоремы 1 (равенство (18)) и леммы 7, неравенство (33) — из теоремы 1 (равенство (20)) и леммы 6.

Замечание 1. В [2] описаны все минимальные весовые квадратурные формулы

$$\int_0^1 g(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}),$$

обладающие d–свойством. Доказано, что в случае весовой функции $g(x) \equiv 1$ минимальная формула единственна: число ее узлов $N = 2^{d-1}$, узлы этой формулы $x^{(i)} = 2^{-d}(2i-1)$, коэффициенты при узлах $C_i = 2^{-d+1},\ i = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$. Указанная квадратурная формула имеет вид (2); в соответствии с неравенством (33) норма ее функционала погрешности

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}},$$

и поскольку $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ удовлетворяет также неравенству (32), имеет место равенство

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}. \tag{34}$$

Отсюда, в частности, следует, что константа $2^{-\frac{1}{p}}$ в правой части неравенства (32) не может быть увеличена, а величина $(2^d)^{-\frac{1}{p}}$ в (33) не может быть уменьшена. Таким образом, мы установили, что минимальная квадратурная формула (2), обладающая d–свойством, является наилучшей формулой на пространствах S_p.

3. Верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул на пространствах H_α

Сформулируем определение классов функций $H_\alpha(L)$, введенное в [1].

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $L > 0$. Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha$$

для любых $x, y \in [0,1]$, называют классом $H_\alpha(L)$. Константу L называют определяющей постоянной этого класса.

В [1] показано, что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $H_\alpha(L)$ (со всевозможными значениями L, значение α фиксировано), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле

$$||f||_{H_\alpha} = \sup_{x,\, x+t \in [0,1]} \{|f(x+t) - f(x)||t|^{-\alpha}\}.$$

Указанное линейное нормированное пространство обозначается H_α. При этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются за одну функцию.

В [1] доказаны утверждения, которые в одномерном случае принимают следующий вид (леммы 8 – 10).

Лемма 8. *Для коэффициентов Фурье – Хаара суммируемой функции $f(x) \in H_\alpha(L)$ имеют место неравенства*

$$|c_{m,j}| \leqslant 2^{-m(\alpha+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}L, \quad m = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}. \tag{35}$$

Лемма 9. *Если $\alpha p > 1$, то $H_\alpha(L) \subset S_p(A)$ при $A = 0.5\, L\, (2^\alpha - 2^{\frac{1}{p}})^{-1}$.*

Лемма 10. *Для функции $f(x) \in H_\alpha(L)$ норма $||f||_{H_\alpha} \leqslant L$. Если для $f(x)$ выбрать наименьшую возможную определяющую постоянную L, то $||f||_{H_\alpha} = L$.*

Теорема 3. *Если функция $f(x) \in H_\alpha$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2), обладающей d–свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant 2^{-\alpha d-1}(2^\alpha - 1)^{-1}. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть $p > \alpha^{-1}$, L — определяющая постоянная одного из классов $H_\alpha(L)$, содержащих функцию $f(x)$. Тогда в соответствии с леммой 9 $f(x) \in S_p(A)$, где $A = 0,5\, L\, (2^\alpha - 2^{\frac{1}{p}})^{-1}$.

Рассмотрим неравенство (7). Так как квадратурная формула (2) точна на функциях Хаара первых d групп, то с учетом (8)

$$|\delta_N[f]| \leqslant \sum_{m>d} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |Q[\chi_{m,j}]|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{m>d} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \sup_{d<m<\infty} \Sigma_q(m). \tag{37}$$

В силу (35) имеем:

$$\begin{gathered} \sum_{m>d} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{m>d} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[2^{m-1} \left(2^{-m(\alpha+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} L\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \\ = 2^{-1-\frac{1}{p}} L \sum_{m>d} 2^{-m(\alpha-\frac{1}{p})} = 2^{-d(\alpha-\frac{1}{p})} L\, (2^{1+\alpha} - 2^{1+\frac{1}{p}})^{-1}. \end{gathered} \tag{38}$$

Из неравенства (37) с учетом (29), (38) получаем:

$$|\delta_N[f]| \leqslant 2^{-d(\alpha-\frac{1}{p})} L \left(2^d\right)^{-\frac{1}{p}} (2^{\alpha+1} - 2^{1+\frac{1}{p}})^{-1} = 2^{-\alpha d-1} L\, (2^\alpha - 2^{\frac{1}{p}})^{-1}.$$

Следовательно,

$$|\delta_N[f]| \leqslant 2^{-\alpha d-1} L\, (2^\alpha - 1)^{-1}, \tag{39}$$

поскольку выражение в правой части (39) есть $\inf\limits_{p>1/\alpha} \{2^{-\alpha d-1} L\, (2^\alpha - 2^{1/p})^{-1}\}$.

Выберем в качестве L наименьшую возможную определяющую постоянную для $f(x)$. В соответствии с леммой 10 из (39) получим:

$$|\delta_N[f]| \leqslant 2^{-\alpha d-1}(2^\alpha - 1)^{-1}||f||_{H_\alpha},$$

откуда следует неравенство (36). □

Замечание 2. В случае минимальных квадратурных формул (2), обладающих d-свойством, с $N = 2^{d-1}$ узлами $x^{(i)} = 2^{-d}(2i-1)$ и коэффициентами при узлах $C_i = 2^{-d+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{d-1}$ (замечание 1) оценка (36) может быть записана в виде

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant 2^{-\alpha-1}(2^\alpha - 1)^{-1} N^{-\alpha}.$$

Следовательно, для указанных квадратурных формул

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty.$$

Заключение

В [1] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, \dots dx_n \approx N^{-1} \sum_{i=1}^N f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \tag{40}$$

с 2^d узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in [0,1]^n$, образующими Π_τ–сетки ($0 \leqslant \tau < d$), и доказано, что они точны на полиномах Хаара степеней $s \leqslant d - \tau$. Для нормы функционала погрешности таких формул на пространствах H_α доказано [1] асимптотическое равенство

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O\left(N^{-\alpha} \ln^{n-1} N\right), \ N \to \infty,$$

а на пространствах S_p — двусторонняя оценка

$$N^{-\frac{1}{p}} \leqslant \|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{\frac{n-1+\tau}{p}} N^{-\frac{1}{p}}. \tag{41}$$

Также установлено [1], что при $n = 1, 2, 3$ Π_τ–сетки со сколь угодно большим числом $N = 2^d$ узлов существуют для любых значений $\tau = 0, 1, 2, \dots$ Следовательно, в одномерном случае константа–множитель в правой части неравенств (41) принимает наименьшее значение при $\tau = 0$, и соотношения (41) записываются в виде равенства

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = N^{-\frac{1}{p}}. \tag{42}$$

Очевидно, для квадратурных формул, исследованных автором данной работы, норма функционала погрешности $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ при $N = 2^{d-1}$ тоже ограничена по сравнению с $N^{-\alpha}$, $N \to \infty$. Норма функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ при $N = 2^{d-1}$ так же, как и для формул

(40), рассмотренных в [1] (в случае $n = 1$), имеет порядок $N^{-\frac{1}{p}}$, причем константа в правой части равенства (34) меньше, чем в (42).

В частности, условию $N = 2^{d-1}$ удовлетворяют квадратурные формулы, построенные в [2]. Указанные формулы можно рассматривать как обобщение формул (40), исследованных в [1] (при $n = 1$) — квадратурные формулы (40) с 2^d узлами, образующими Π_0–сетки, представляют собой частный случай формул, обладающих d–свойством. При этом квадратурные формулы, рассмотренные в [2], будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

Список литературы

[1] И.М.Соболь, Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, М., Наука, 1969.

[2] К.А.Кириллов, М.В.Носков, Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **42**(2002), №6, 791–799.

[3] M.V.Noskov, K.A.Kirillov, Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials, *Journal of Approximation Theory*, **162**(2010), №3, 615–627.

[4] К.А.Кириллов, Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара, *Вычислительные технологии*, **11**(2006), спец. выпуск, 44–50.

[5] A.Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.*, **69**(1910), 331–371.

Estimates for the Norm of the Error Functional of Quadrature Formulas Exact for Haar Polynomials

Kirill A. Kirillov

On the spaces S_p and H_α, the estimates are found for the norm of the error functional of quadrature formulas possessing the Haar d–property.

Keywords: Haar d–property, error functional of quadrature formula, function spaces S_p, H_α.