

УДК 532.5.013.4

О малых возмущениях термокапиллярного стационарного двухслойного течения в плоском слое с подвижной границей

Виктор К. Андреев*

Виктория Б. Бекежанова†

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036

Россия

Получена 17.02.2011, окончательный вариант 25.04.2011, принята к печати 10.05.2011

Изучается задача о плоском однонаправленном двухслойном течении вязкой теплопроводной жидкости в условиях невесомости. В системе возможна ситуация, когда течение возникает только под действием сил Марангони и движения одной из стенок канала. Исследована устойчивость данного режима в линейном приближении. Кризис течения может быть вызван тепловыми колебательными или монотонными волнами.

Ключевые слова: поверхность раздела, неизотермичное течение, нейтральная кривая.

Введение

Впервые задача об однонаправленных двухслойных течениях, где источниками движения вязких жидкостей являлись сила тяжести и термокапиллярный эффект, была рассмотрена в [1]. Для жидкостей с постоянными плотностями (модель Навье-Стокса) в предположении о линейной зависимости температуры от продольной координаты построены профили скоростей в слоях. Они оказались, в общем случае, квадратичными по поперечной координате. Были подробно изучены характеристики полученных решений. Исторически первые работы по устойчивости двухслойных течений в областях различной геометрии (см. [2–8]) касались только вязких изотермических жидкостей. Течение под действием градиента давления двух несмешивающихся жидкостей в трубе исследовалось в [2]. Оказалось, что данная задача имеет множество решений, соответствующих произвольно заданным формам поверхности раздела. Здесь же изучена устойчивость этих решений. Для концентрической конфигурации устойчивым является “положение”, когда более вязкая жидкость располагается во внутренней части трубы. Линейный анализ показал, что решающим фактором в этом случае является величина ее объемного расхода. Существенный результат был получен в [3], где рассматривалось совместное течение Куэтта-Пуазейля в горизонтальном канале жидкостей равных плотностей, но с разными вязкостями. Было установлено, что длинноволновая неустойчивость может развиваться при любом ненулевом суммарном расходе, когда жидкости занимают области равных объемов. В [4] изучалась устойчивость параллельного течения двух стратифицированных, однородных, несмешивающихся жидкостей с постоянным поверхностным натяжением. Показано, что к данной задаче, в условиях, когда система горизонтально ориентирована, а внешними границами являются твердые стенки (возможны подвижные), применимо преобразование Сквайра. Таким образом, наиболее опасными

*andr@icm.krasn.ru

†vbek@icm.krasn.ru

являются плоские возмущения. Причем имеет место симметрия, указывающая на независимость характеристик от направления движения стенок. Результаты Y_{ih} были обобщены в [5, 6]. В первой из указанных работ исследовалась устойчивость плоского течения Пуазейля в трехслойной системе двух жидкостей, когда одна из жидкостей занимает центральную область. Оказалось, что в случае, когда более вязкая жидкость занимает центральную область, течение всегда будет устойчивым. Если же внутреннюю область занимает жидкость с меньшей вязкостью, так называемые пальцевидные течения, то имеет место абсолютная неустойчивость. Авторы [6] рассмотрели случай, когда жидкости с разными плотностями занимают слои произвольной толщины. При этом расчеты проводились и в области коротких волн. Устойчивость двухслойного течения с осевой симметрией в вертикальной трубе относительно длинноволновых возмущений изучалась в [7]. Для течений, формирующихся под действием сил гравитации и приложенного градиента давления, рассмотрен случай, когда жидкости имеют разные плотности, а их прочие физические характеристики совпадают. При близких плотностях на устойчивость влияет направление градиента давления и расположение жидкостей: устойчивыми будут течения, направленные вниз, в системе с более легкой жидкостью в центре. Восходящие течения (направленные вверх относительно силы тяжести) будут устойчивыми, если внутреннюю область занимает более тяжелая жидкость. Также приведены результаты для других значений отношения плотностей. В фундаментальной работе [8] приводятся результаты решения задачи об устойчивости двухслойного течения изотермических жидкостей в наклонном канале. В длинноволновом приближении определяются механизмы, порождающие неустойчивость. Для возмущений с произвольной длиной волны исследуется влияние линейных размеров канала и величины деформации поверхности раздела на устойчивость. Проводится сравнение полученного решения с известными решениями частных задач. В [9] методом малых возмущений исследовалась устойчивость плоского двухслойного течения вязкой теплопроводной жидкости в горизонтальном канале, на стенках которого задано линейное распределение температуры. Установлено, что появление неустойчивостей обусловлено различием определяющих параметров (толщин слоев, условий подогрева, вязких и теплопроводных свойств жидкостей). В поле массовых сил все возмущения монотонны, а в условиях невесомости имеет место колебательная термокапиллярная неустойчивость. Аналогичная задача для течений в наклонном канале относительно плоских возмущений рассмотрена в [10]. При совместном действии массовых и термокапиллярных сил обнаружены различные типы неустойчивости. В системе возможна неустойчивость гидродинамического характера, связанная с образованием вихрей на границах областей с возвратным течением, и термокапиллярная. На основе численных расчетов показано, что при любых углах отклонения системы от горизонтали появляются колебательные возмущения.

В настоящей работе изучается задача о плоском стационарном двухслойном течении вязкой жидкости при совместном действии градиента давления и сил Марангони в условиях невесомости. Плоский слой ограничен твердыми стенками, одна из которых может двигаться. На внешних границах поддерживаются линейные распределения температур. Задача допускает решение типа Остроумова-Бириха. Меняя скорость движения стенки, градиенты давления и температуры, можно получать различные режимы течений. Методом линеаризации исследована устойчивость течения, сформированного только под действием термокапиллярных сил и движения твердой стенки, в отсутствие градиента давления. Найдено асимптотическое поведение комплексного декремента в длинноволновой области для недеформируемой поверхности раздела. Получены аналитические представления собственных функций в случае плоских возмущений. Показано, что кризис вызывается тепловой модой, при этом неустойчивость может иметь как колебательный (следствие несамосопряженности спектральной задачи), так и монотонный характер. Тип наиболее опасных возмущений зависит от длины волны.

1. Основное течение

Рассматривается совместное стационарное течение двух несмешивающихся вязких жидкостей в плоском слое при отсутствии силы тяжести, см. рис. 1.

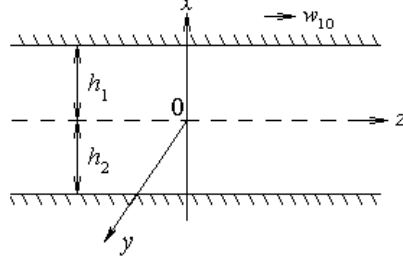


Рис. 1. Схема области течения

Жидкости имеют постоянные плотности ρ_j , кинематические вязкости ν_j (динамические вязкости $\mu_j = \nu_j/\rho_j$), коэффициенты теплопроводностей k_j и занимают слои $0 \leq x \leq h_1$, $-h_2 \leq x \leq 0$ соответственно. Твердая стенка $x = -h_2$ неподвижна, а стенка $x = h_1$ может двигаться с постоянной скоростью w_{10} . На стенках задано линейное распределение температур $\theta_j = Az + T_{j0}$, A, T_{j0} — постоянные. Вдоль границы раздела $x = 0$ действуют касательные силы, причем поверхностное натяжение линейно зависит от температуры: $\sigma(\theta) = \sigma^0 - \varkappa(\theta - \theta^0)$, $\sigma^0 > 0$, $\varkappa > 0$, θ^0 — постоянные.

Предположим, что течение является однонаправленным и вектор скорости имеет вид $\mathbf{u}_j = (0, 0, w_j(x))$. Тогда поля скоростей $w_j(x)$, температур $\theta_j(x, z) = Az + T_j(x)$ и давлений $p_j(x, z)$ будут определяться по формулам из [11] и после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\nu_1}{h_1} \left\{ \bar{a} \left[\eta^2 + \frac{(\nu - h^2)\eta}{h(\mu + h)} - \frac{\mu h + \nu}{h(\mu + h)} \right] + \frac{M(\eta - 1)}{\mu + h} + \frac{\text{Re}(h\eta + \mu)}{\mu + h} \right\}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \\ w_2 &= \frac{\nu_2}{h_2} \left\{ \frac{\nu^2 \bar{a}}{h^3} \left[\eta^2 + \frac{\mu(\nu - h^2)\eta}{\nu(\mu + h)} - \frac{h(\mu h + \nu)}{\nu(\mu + h)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu M(\eta + 1)}{h(\mu + h)} + \frac{\mu \nu \text{Re}(\eta + 1)}{h(\mu + h)} \right\}, \quad -1 \leq \eta \leq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\bar{a} = ah_1^3/2\nu_1^2$, $M = \varkappa Ah_1^2/\mu_2\nu_1$ — число Марангони, $\text{Re} = w_{10}h_1/\nu_1$ — число Рейнольдса, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $h = h_1/h_2$, $\mu = \mu_1/\mu_2$; $\eta = x/h_1$ для w_1 и $\eta = x/h_2$ для w_2 .

Поля давлений p_j являются линейными

$$p_j = \rho_j a z + b, \quad b = \text{const}, \quad (1.2)$$

так что \bar{a} — безразмерный градиент давления.

Температуры в слоях таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{Ah_1} &= \frac{z}{h_1} + \text{Pr}_1 \left\{ \bar{a} \left[\frac{\eta^4}{12} + \frac{(\nu - h^2)\eta^3}{6h(\mu + h)} - \frac{(\mu h + \nu)\eta^2}{2h(\mu + h)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{\mu + h} \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{\text{Re}}{\mu + h} \left(\frac{h\eta^3}{6} + \frac{\mu\eta^2}{2} \right) \right\} + l_1\eta + l_2, \\ \frac{\theta_2}{Ah_2} &= \frac{z}{h_2} + \text{Pr}_2 \left\{ \frac{\nu^2 \bar{a}}{h^3} \left[\frac{\eta^4}{12} + \frac{\mu(\nu - h^2)\eta^3}{6\nu(\mu + h)} - \frac{h(\mu h + \nu)\eta^2}{2\nu(\mu + h)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{h(\mu + h)} (M - \mu \text{Re}) \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right\} + kl_1\eta + l_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

с постоянными l_1 и l_2 ($k = k_1/k_2$)

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{h}{k+h} \left\{ \frac{T_{10} - T_{20}}{Ah_1} + \frac{\text{Pr}_1}{12(\mu+h)} [\bar{a}(h^2 + 4\nu + 5\mu h) + 4M - \right. \\
 &\quad \left. - 2\text{Re}(3\mu + h)] - \frac{\text{Pr}_2}{12h^2(\mu+h)} \left[\frac{\nu\bar{a}}{h^2} (\mu\nu + 5\nu h + 9\mu h^2) + 4\nu(M - \mu\text{Re}) \right] \right\}, \\
 l_2 &= \frac{1}{k+h} \left\{ \frac{kT_{10} + hT_{20}}{Ah_2} + \frac{kh\text{Pr}_1}{12(\mu+h)} [\bar{a}(h^2 + 4\nu + 5\mu h) + 4M - \right. \\
 &\quad \left. - 2\text{Re}(3\mu + h)] + \frac{\text{Pr}_2}{12(\mu+h)} \left[\frac{\nu\bar{a}}{h^2} (\mu\nu + 5\nu h + 9\mu h^2) + 4\nu(M - \mu\text{Re}) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Впервые стационарное конвективное течение вида (1.1)–(1.4) (при другом обезразмеривании) было рассмотрено в [12], см. также [13].

Из (1.1) следует, что течения в слоях возникают под действием перепада давлений, термокапиллярных сил и движения твердой стенки. Меняя параметры \bar{a} , M , Re , можно описывать различные режимы течения.

В данной работе предполагается, что в первом слое задан расход жидкости (газа)

$$m_1 = \int_0^{h_1} u_1(x) dx, \tag{1.5}$$

Тогда безразмерный градиент давления определяется из (1.5) в виде

$$\bar{a} = \frac{3h[(h+2\mu)\text{Re} - M] - 6h(\mu+h)m_1\nu_1^{-1}}{h^2 + 4\mu h + 3\nu}. \tag{1.6}$$

Далее, потребуем условия замкнутости течения во втором слое, т. е.

$$\int_{-h_2}^0 w_2(x) dx = 0, \tag{1.7}$$

откуда

$$\text{Re} = \frac{\bar{a}(\mu\nu + 3\mu h^2 + 4\nu h)}{3\mu h^2} + \frac{M}{\mu}.$$

Если одновременно выполнены (1.6), (1.7), то

$$\text{Re}_* = \frac{1}{\mu h^2 + 2\nu h + \mu\nu} \left[\frac{(\nu - h^2)}{2} M + \frac{(\mu\nu + 3\mu h^2 + 4\nu h)m_1}{\nu_1} \right], \tag{1.8}$$

$$\bar{a}_* = \frac{3h^2}{2(\mu h^2 + 2\nu h + \mu\nu)} \left(\frac{2\mu m_1}{\nu_1} - M \right).$$

Таким образом, задавая скорость движения стенки $x = h_1$ специальным образом ($w_{10} = \text{Re}_*\nu_1/h_1$), можно добиться нулевого объемного расхода во втором слое. Заметим также, что можно подобрать градиент температуры A так, чтобы $\bar{a}_* = 0$. Это будет при $M = 2\mu m_1/\nu_1$ ($A = 2\mu_1 m_1/\alpha h_1^2$), тогда $\text{Re}_* = 2m_1/\nu_1$. Если сразу в формулах (1.1)–(1.4) положить $\bar{a} = 0$ (движение только под действием термокапиллярных сил и твердой стенки), то при $\text{Re} = M/\mu$ второй слой вообще остается в покое, $w_2 \equiv 0$, а в первом $w_1 = (\nu_1 M \eta)/(h_1 \mu)$.

Для системы трансформаторное масло (первая жидкость) — муравьиная кислота (вторая жидкость) физические постоянные таковы:

$$\mu_1 = 15,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_2 = 1,452 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}},$$

$$\nu_1 = 1,85 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad \nu_2 = 1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad \varkappa = 3,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Н}}{\text{М} \cdot \text{°C}}.$$

Поэтому для $h_1 = 0,02\text{м}$, $h_2 = 0,04\text{м}$, $m_1 = 184,88 \cdot 10^{-6}\text{М}^2/\text{с}$ и $A = 2^\circ\text{C}/\text{м}$ находим $\text{Re}_* \approx 56$ и размерная скорость стенки $w_{10} = \text{Re}_* \nu_1 / h_1 \approx 0,051\text{м}/\text{с}$.

2. Малые возмущения и система амплитудных уравнений

Пусть \mathbf{U}_j , P_j , T_j — возмущения основного течения (1.1)–(1.4), а R — возмущение поверхности раздела $x = 0$ (отклонение этой поверхности по нормали). Линеаризованный вариант задачи о малых возмущениях движений вязкой теплопроводной жидкости с границей раздела в общем случае получен в [14], см. также монографию [15]. Для течения (1.1)–(1.4) система уравнений малых возмущений в безразмерных переменных примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1\tau} + w_1 \mathbf{U}_{1\zeta} + w'_1 U_1 \mathbf{e} &= -\nabla P_1 + \Delta \mathbf{U}_1, \\ \frac{\nu}{h^2} \mathbf{U}_{2\tau} + w_2 \mathbf{U}_{2\zeta} + w'_2 U_2 \mathbf{e} &= -\nabla P_2 + \Delta \mathbf{U}_2, \\ U_{j\eta} + V_{j\xi} + W_{j\zeta} &= 0, \quad j = 1, 2, \\ T_{1\tau} + w_1 T_{1\zeta} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla \theta_1 &= \frac{1}{\text{Pr}_1} \Delta T_1, \\ \frac{\nu}{h^2} T_{2\tau} + w_2 T_{2\zeta} + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla \theta_2 &= \frac{1}{\text{Pr}_2} \Delta T_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$, $\Delta = \partial^2 / \partial \eta^2 + \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \zeta^2$; при $j = 1$ $0 < \eta < 1$, при $j = 2$ $0 < \eta < 0$.

На твердых стенках при $\eta = 1$

$$\mathbf{U}_1 = 0, \quad T_1 = 0; \quad (2.2)$$

при $\eta = -1$

$$\mathbf{U}_2 = 0, \quad T_2 = 0. \quad (2.3)$$

На поверхности раздела $\eta = 0$ выполнены следующие условия [15]:

$$\begin{aligned} R_\tau + w_1 R_\zeta &= U_1, \quad \frac{\nu}{h} \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = \left(\frac{\nu}{h} w'_1 - h w'_2 \right) R \mathbf{e}, \\ \theta T_1 - T_2 &= (\theta \theta'_1 - h \theta'_2) R, \\ T'_2 - \frac{k\theta}{h} T'_1 &= \left(h \theta''_2 - \frac{k\theta \theta''_1}{h} \right) R - \left(h \theta_{2\zeta} + \frac{k\theta \theta_{1\zeta}}{h} \right) R_\zeta, \\ P_1 - \frac{h}{\rho \nu^2} P_2 + 2 \left[\frac{h^2}{\rho \nu^2} U_{2\eta} - U_{1\eta} + \left(\frac{h^3}{\rho \nu^2} w'_2 - w'_1 \right) R_\zeta \right] &= \\ &= \left(p_{1\eta} - \frac{h^3}{\rho \nu^2} p_{2\eta} \right) R + (\text{We} - \text{M} \theta_1) (R_{\xi\xi} + R_{\zeta\zeta}), \\ W_{1\eta} + U_{1\zeta} - \frac{h^2}{\rho \nu^2} (W_{2\eta} + U_{2\zeta}) + \left(\frac{h^3}{\rho \nu^2} w''_2 - w''_1 \right) R &= -\text{M} (T_{1\zeta} - \theta'_1 R_\zeta), \\ V_{1\eta} + U_{1\xi} - \frac{h^2}{\rho \nu^2} (V_{2\eta} + U_{2\xi}) &= -\text{M} (T_{1\xi} - \theta'_1 R_\xi), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной η , $R(\xi, \zeta, \tau)$ — отклонение поверхности раздела по нормали от ее невозмущенного значения $\eta = 0$, $\theta = T_{10}/T_{20}$ — отношение температур твердых стенок, $k = k_1/k_2$ — отношение коэффициентов теплопроводностей жидкостей, $\text{We} = \sigma^0 h_1 / \rho_1 \nu_1^2$ — число Вебера.

Метод нормальных мод непосредственно не применим к системе (2.1)–(2.4) из-за наличия члена $We - M\theta_1(1, \zeta)$. Считаем, что поверхностное натяжение σ_0 мало изменяется в пределах длины волны возмущения, т. е.

$$\lambda \ll We/M, \quad (2.5)$$

см. по этому поводу [15]. Тогда можно аппроксимировать выражение $We - M\theta_1(1, \zeta)$ просто как We .

В предположении (2.5) ищем решение задачи (2.1)–(2.4) в виде нормальных волн

$$(\mathbf{U}_j, P_j, T_j, R) = (\mathbf{U}_j(\eta), P_j(\eta), T_j(\eta), R(\eta)) \exp[i(\alpha_1 \zeta + \alpha_2 \xi - C\tau)], \quad (2.6)$$

где C – комплексный декремент, $C = C_r + iC_i$. Значения параметров задачи, для которых $C_i < 0$, соответствуют области устойчивости. Подстановка (2.6) в (2.1)–(2.4) приводит к спектральной задаче относительно параметра C :

$$\begin{aligned} i(\alpha_1 w_1 - C)U_1 &= -P'_1 + LU_1, \quad L = \frac{d^2}{d\eta^2} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \\ i(\alpha_1 w_1 - C)V_1 &= -i\alpha_2 P_1 + LV_1, \\ i(\alpha_1 w_1 - C)W_1 + w'_1 U_1 &= -i\alpha_1 P_1 + LW_1, \\ U'_1 + i\alpha_2 V_1 + i\alpha_1 W_1 &= 0, \\ i(\alpha_1 w_1 - C)T_1 + \theta'_1 U_1 + \theta'_{1\zeta} W_1 &= \frac{1}{Pr_1} LT_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

при $0 < \eta < 1$;

$$\begin{aligned} i\left(\alpha_1 w_2 - \frac{\nu}{h^2} C\right)U_2 &= -P'_2 + LU_2, \\ i\left(\alpha_1 w_2 - \frac{\nu}{h^2} C\right)V_2 &= -i\alpha_2 P_2 + LV_2, \\ i\left(\alpha_1 w_2 - \frac{\nu}{h^2} C\right)W_2 + w'_2 U_2 &= -i\alpha_1 P_2 + LW_2, \\ U'_2 + i\alpha_2 V_2 + i\alpha_1 W_2 &= 0, \\ i\left(\alpha_1 w_2 - \frac{\nu}{h^2} C\right)T_2 + \theta'_2 U_2 + \theta'_{2\zeta} W_2 &= \frac{1}{Pr_2} LT_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

при $-1 < \eta < 0$;

$$U_1(1) = V_1(1) = W_1(1) = T_1(1) = 0, \quad (2.9)$$

$$U_2(-1) = V_2(-1) = W_2(-1) = T_2(-1) = 0;$$

на поверхности раздела $\eta = 0$

$$\begin{aligned} i(\alpha_1 w_1 - C)R &= U_1, \quad \frac{\nu}{h} U_1 = U_2, \quad \frac{\nu}{h} V_1 = V_2, \\ \frac{\nu}{h} W_1 - W_2 &= \left(\frac{\nu}{h} w'_1 - h w'_2\right) R, \quad \theta T_1 - T_2 = (\theta\theta'_1 - h\theta'_2) R, \\ T'_2 - \frac{k\theta}{h} T'_1 &= \left[h\theta''_2 - \frac{k\theta\theta''_1}{h} + i\alpha_1 \left(\frac{k\theta\theta_{1\zeta}}{h} - h\theta_{2\zeta}\right)\right] R, \\ P_1 - \frac{h}{\rho\nu^2} P_2 + 2\left(\frac{h}{\rho\nu^2} U'_2 - U'_1\right) &= \left[2i\alpha_1 \left(w'_1 - \frac{h^3}{\rho\nu^2} w'_2\right) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) We\right] R, \\ V'_1 + i\alpha_2 U_1 - \frac{h^2}{\rho\nu^2} (V'_2 + i\alpha_2 U_2) &= -i\alpha_2 M(T_1 - \theta'_1 R), \\ W'_1 + i\alpha_1 U_1 - \frac{h^2}{\rho\nu^2} (W'_2 + i\alpha_1 U_2) + \left(\frac{h^3}{\rho\nu^2} w''_2 - w''_1\right) R &= -i\alpha_1 M(T_1 - \theta'_1 R). \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Длинноволновые возмущения

Рассмотрим сначала возмущения, распространяющиеся только вдоль слоев: $\alpha_2 = 0$, $V_1 = V_2 = 0$. Для недеформируемой поверхности раздела ($We = \infty$) динамическое граничное условие в (2.10) дает $R = 0$ и комплексный декремент C остается только в амплитудных уравнениях (2.7), (2.8). Положим с учетом уравнения сохранения массы

$$\begin{aligned} U_j &= \alpha_1^2 U_j^2 + \dots, & W_j &= \alpha_1 W_j^1 + \dots, & P_j &= P_j^0 + \alpha_1 P_j^1 + \dots, \\ T_j &= T_j^0 + \alpha_1 T_j^1 + \dots, & C &= C^0 + \alpha_1 C^1 + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

при $\alpha_1 \rightarrow 0$. После подстановки (3.1) в (2.1)–(2.10) задача для $T_j^0(\eta)$ и C^0 отделяется и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{k\theta^2}{h} T_1^{0''} + \frac{k\theta^2}{h} iC^0 Pr_1 T_1^0 &= 0, & 0 < \eta < 1; \\ T_2^{0''} + \frac{\nu}{h^2} iC^0 Pr_2 T_2^0 &= 0, & -1 < \eta < 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$T_1^0(1) = T_2^0(-1) = 0, \quad \theta T_1^0(0) = T_2^0(0), \quad \frac{k\theta}{h} T_1^{0'}(0) = T_2^{0'}(0) \quad (3.3)$$

(уравнения (3.2) записаны в самосопряженной форме для граничных условий (3.3)). Легко показывается, что $iC^0 > 0$, т. е. $\text{Im}C^0 < 0$ и длинноволновые возмущения монотонно затухают. На самом деле, с точностью до мультипликативной постоянной

$$\begin{aligned} T_1^0(\eta) &= \sin \omega(1 - \eta), & \omega^2 &= iC^0 Pr_1 > 0, \\ T_2^0(\eta) &= \theta \left[\frac{k}{\sqrt{\chi}} \cos \omega \sin \left(\frac{\sqrt{\chi}}{h} \omega \eta \right) + \sin \omega \cos \left(\frac{\sqrt{\chi}}{h} \omega \eta \right) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где ω есть положительный корень уравнения

$$\sin \omega \cos \left(\frac{\sqrt{\chi}}{h} \omega \right) + \frac{k}{\sqrt{\chi}} \cos \omega \sin \left(\frac{\sqrt{\chi}}{h} \omega \right) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет счетное число корней ω_n и $C^0 = C_n^0 = -i\omega_n^2 / Pr_1$, $n = 1, 2, \dots$; в частности, при $k = \sqrt{\chi}$ находим $\omega_n = n\pi(1 + k/h)^{-1}$. В табл. 1 приведены значения первых трех корней для системы жидкостей трансформаторное масло–муравьиная кислота ($\chi = 4,59 \cdot 10^{-3}$).

Таблица 1

h	ω_1	ω_2	ω_3	h	ω_1	ω_2	ω_3
10^{-4}	$4,64 \cdot 10^{-3}$	$9,27 \cdot 10^{-3}$	0,088	1	2,364	5,137	8,116
10^{-2}	0,452	0,898	1,31	10^2	3,129	6,257	9,386
0,1	1,65	4,21	5,144	10^4	3,141	6,283	9,424

Приведем еще выражения для W_1^0, W_2^0 , которые понадобятся для нахождения первого приближения C^1 комплексного декремента ($\omega = \omega_n$). Для этого необходимо решить краевую задачу

$$\begin{aligned} W_1^{1''} + \frac{\omega^2}{Pr_1} W_1^1 &= iP_1^0, & U_1^{2'} &= -iW_1^1, & 0 < \eta < 1; \\ W_2^{1''} + \frac{\nu}{h^2} \frac{\omega^2}{Pr_1} W_2^1 &= iP_2^0, & U_2^{2'} &= -iW_2^1, & -1 < \eta < 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} W_1^1(1) = U_1^2(1) = 0, \quad W_2^1(-1) = U_2^2(-1) = 0, \\ U_1^2(0) = U_2^2(0) = 0, \quad W_2^1(0) = \frac{\nu}{h} W_1^1(0), \\ W_1^1(0) - \frac{h^2}{\rho\nu^2} W_2^1(0) = -iMT_1^0(0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отметим, что в задаче (3.6), (3.7) наряду с W_j^1, U_j^2 неизвестными являются и постоянные P_1^0, P_2^0 . После некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} W_1^1 &= \frac{iPr_1 P_1^0}{\omega^2} \left[a_1 \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \eta\right) + a_2 \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \eta\right) + 1 \right], \\ W_2^1 &= \frac{iPr_1 h^2 P_2^0}{\nu\omega^2} \left[a_3 \cos\left(\frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \eta\right) + a_4 \sin\left(\frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \eta\right) + 1 \right]; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} U_1^2 &= \frac{Pr_1^{3/2} P_1^0}{\omega^3} \left\{ a_1 \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \eta\right) + a_2 \left[1 - \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \eta\right) \right] + \frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \eta \right\}, \\ U_2^2 &= \frac{h^3 Pr_1^{3/2} P_2^0}{\nu^{3/2} \omega^3} \left\{ a_3 \sin\left(\frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \eta\right) + a_4 \left[1 - \cos\left(\frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \eta\right) \right] + \frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \eta \right\}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} P_1^0 &= \frac{M\omega \sin \omega}{\sqrt{Pr_1}} \left[\frac{\sqrt{\nu}}{\rho} \frac{(1+a_1)}{(1+a_3)} - a_2 \right]^{-1}, \\ P_2^0 &= \frac{\nu^2(1+a_1)M\omega \sin \omega}{h^3 \sqrt{Pr_1} (1+a_3)} \left[\frac{\sqrt{\nu}}{\rho} \frac{(1+a_1)}{(1+a_3)} - a_2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Постоянные a_1, \dots, a_4 определяются формулами

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{\omega}{\sqrt{Pr_1}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega}{2\sqrt{Pr_1}} \right), \\ a_2 &= \frac{\omega}{2\sqrt{Pr_1}} \left[\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\omega}{2\sqrt{Pr_1}} \right) - 1 \right] - \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega}{2\sqrt{Pr_1}} \right), \\ a_3 &= 1 - \frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega}{2h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \right), \\ a_4 &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega}{2h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega}{h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \left[\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\omega}{2h} \sqrt{\frac{\nu}{Pr_1}} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\omega = \omega_n$ есть решение уравнения (3.5).

Можно видеть, что система уравнений для первого приближения будет неоднородной

$$\begin{aligned} \frac{k\theta^2}{h} T_1^{1''} + \frac{k\theta^2}{h} iC^0 Pr_1 T_1^1 &= \frac{k\theta^2}{h} Pr_1 [i(w_1 - C^1)T_1^0 + \theta_{1\zeta} W_1^1], \\ T_2^{1''} + \frac{\nu}{h^2} iC^0 Pr_2 T_2^1 &= Pr_2 \left[i \left(w_2 - \frac{\nu}{h^2} C^1 \right) T_2^0 + \theta_{2\zeta} W_2^1 \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

с теми же граничными условиями (3.3) для T_1^1, T_2^1 . Поэтому первая поправка к C^0 находится из условия разрешимости задачи (3.12), (3.3)

$$\begin{aligned} C^1 = C_n^1 &= -i \left\{ \frac{k\theta^2}{h} \int_0^1 [i w_1 |T_1^0|^2 + \theta_{1\zeta} W_1^1 T_1^0] d\eta + \right. \\ &+ \frac{\chi}{\nu} \int_{-1}^0 [i w_2 |T_2^0|^2 + \theta_{2\zeta} W_2^1 T_2^0] d\eta \left. \right\} \left[\frac{k\theta^2}{h} \int_0^1 |T_1^0|^2 d\eta + \frac{\chi}{h^2} \int_{-1}^0 |T_2^0|^2 d\eta \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку W_1^0, W_2^0 — чисто мнимые (см. (3.8)), то C^1 — вещественное число (для каждого $\omega = \omega_n$).

Итак,

$$C = C_n = -i \frac{\omega_n^2}{Pr_1} + \alpha_1 C_n^1 + \dots \tag{3.14}$$

4. Спектр возмущений и границы устойчивости

Рассмотрим случай, когда движение жидкости происходит в отсутствие градиента давления ($\bar{a} = 0$) только под действием термокапиллярных сил и твердой стенки. Согласно п. 1 в условиях, когда выполнено условие (1.7), при $Re = M/\mu$ второй слой находится в состоянии покоя, а в первом реализуется течение Куэтта. Исследуем устойчивость данного режима в предположении о недеформируемости поверхности раздела.

Системы (2.7), (2.8) простыми заменами приводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и интегрируются методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с ортогонализацией [16]. В случае плоских возмущений ($\alpha_2 = 0, V_1 = V_2 = 0$) в каждой из областей $-1 < \eta < 0$ и $0 < \eta < 1$ амплитуды возмущений ищутся в виде линейных комбинаций трех линейно–независимых решений. Коэффициенты решений определяются из условий на поверхности раздела $\eta = 0$. Обозначим определитель полученной однородной системы линейных уравнений для коэффициентов через Φ ; тогда данная система имеет нетривиальное решение при $\Phi = 0$. Это соотношение позволяет определить спектр комплексных декрементов C и границы устойчивости. Следует отметить, что Φ зависит от параметров задачи $Re, M, m_1, \alpha_1, \nu, h, k, Pr_1, Pr_2, \theta$.

Рассматриваемое состояние системы есть суперпозиция термокапиллярной конвекции, порожденной наличием продольного градиента температуры, и сдвигового течения Куэтта, когда жидкость увлекается движущейся границей. Согласно результатам п. 3 целесообразно рассмотреть отдельно возникающие тепловые и гидродинамические моды. Вследствие того, что вынужденная компонента течения (поток Куэтта в первом слое) является устойчивой, можно ожидать, что ее присутствие приведет к стабилизации режима. Этот эффект проявляется на гидродинамической моде неустойчивости. Анализ спектров показывает, что неустойчивость имеет монотонный характер. Типичная структура нейтральных кривых гидродинамических мод неустойчивости в плоскости (α_1, M) показана на рис. 2а. Области неустойчивости расположены внутри кривых. Отрицательным значениям параметра M соответствует случай охлаждения стенок канала в направлении оси z . При этом, направление движения стенки канала противоположно направлению продольной оси. Видна симметрия относительно оси $M = 0$, что означает независимость характеристик устойчивости от направления движения стенки.

Для тепловой моды характерна зависимость от соотношения параметров (h, M) — возможна как стабилизация, так и дестабилизация режима. Нейтральные кривые тепловых мод и их эволюция с изменением h представлена на рис. 2б. Имеет место неустойчивость, связанная с развитием монотонных (стоячих) тепловых возмущений (сплошные линии) или колебательных (бегущих) гидротепловых волн (штриховые). При этом происходит замыкание области колебательной неустойчивости при малых значениях h и смена критической моды неустойчивости. Видно, что в длинноволновой области наиболее опасными являются колебательные возмущения, а в коротковолновой — монотонные. Причем, прямые $M = \pm 1494, 26$ служат общей асимптотой монотонной неустойчивости для любых значений h .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 11-01-00283 и Сибирского отделения Российской академии наук, гранты 65, 116.

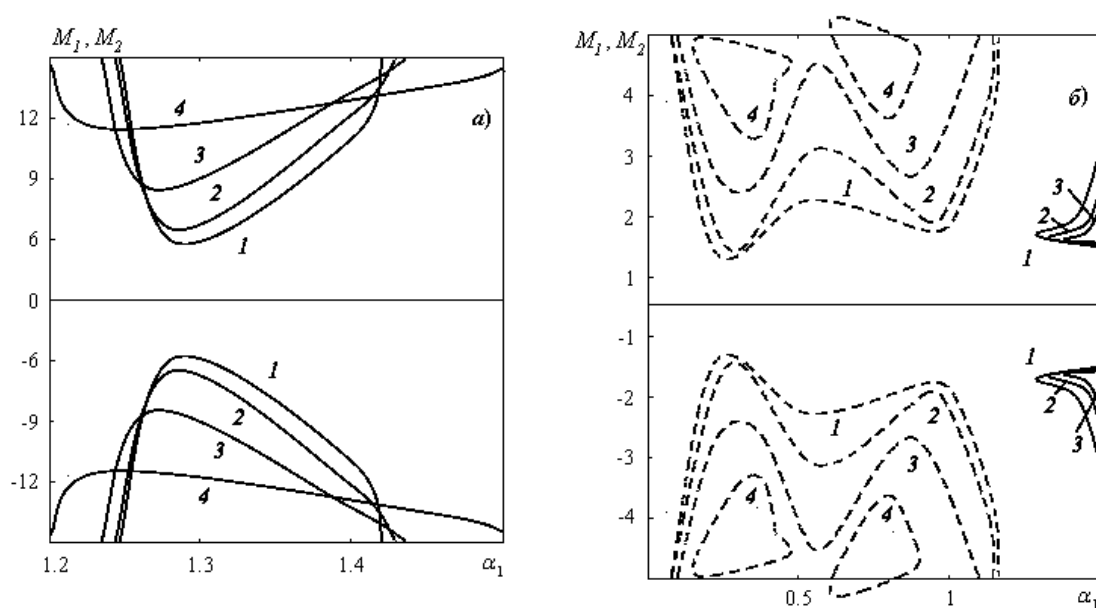


Рис. 2. Нейтральные кривые а) гидродинамические моды, б) тепловые моды: 1–3 — $h = 10^4, 10^2, 1$, $M_1 = M \cdot 10^3$; 4 — $h = 10^{-4}$, $M_2 = M \cdot 10^4$

Список литературы

- [1] L.G.Napolitano, Plane Marangoni–Poiseuille flow two immiscible fluids, *Acta Astronautica*, **7**(1980), 461–478.
- [2] D.D.Daniel, M.Renardy, Y.Renardy, Instability of the flow of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe, *J. Fluid. Mech.*, **141**(1983), 309–317.
- [3] C.S.Yih, Instability due to viscosity stratification, *J. Fluid Mech.*, **27**(1967), 337–352.
- [4] T.I.Hesla, F.R.Pranckh, L.Preziosi, Squire’s theorem for two stratified fluids, *Phys. Fluids*, **29**(1986), 2808–2811.
- [5] P.T.Than, F.Rosso, D.D.Joseph, Instability of Poiseuille flow of two immiscible liquids with different viscosities in a channel, *Int. J. Eng. Sci.*, **25**(1987), 189–204.
- [6] S.G.Yiantsios, B.G.Higgins, Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 3225–3238.
- [7] M.K.Smith, The axisymmetric long-wave instability of a concentric two-phase pipe flow, *Phys. Fluids A*, **1**(1989), 494–506.
- [8] B.S.Tilley, S.H.Davis, S.G.Bankoff, Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel, *Phys. Fluids*, **1**(1994), №12, 3906–3922.
- [9] В.Б.Бекежанова, Конвективная неустойчивость течения Марангони–Пуазейля при наличии продольного градиента температуры, *ПМТФ*, **52**(2011), №1, 92–100.
- [10] В.К.Андреев, В.Б.Бекежанова, Устойчивость неизотермических жидкостей, Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2010.

- [11] Р.В.Бирих, О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости, *ПМТФ*, **7**(1966), № 3, 69–72.
- [12] И.В.Репин, Стационарные течения двухслойной теплопроводной жидкости в плоском слое, Тр. междунар. конф. "Математические модели и методы их исследования", Красноярск, КГУ, 2001, 161–165.
- [13] В.К.Андреев, Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения, Препринт № 1-10, Красноярск, ИВМ СО РАН, 2010, 68 с.
- [14] В.К.Андреев, Малые возмущения термокапиллярного течения жидкости с поверхностью раздела, Тр. сем. "Математическое моделирование в механике", Красноярск, ИВМ СО РАН, 1997, 27–40. (Деп. ВИНТИ 12.02.97, № 446-1397.)
- [15] В.К.Андреев, В.Е.Захватаев, Е.А.Рябицкий, Термокапиллярная неустойчивость, Новосибирск, Наука, 2000.
- [16] С.К.Годунов, О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Успехи мат. наук*, **11**(1961), № 3, 171–174.

On Small Perturbations of Thermocapillary Stationary Two-layer Flow in Plane Layer with Movable Boundary

Viktor K. Andreev
Viktoriya B. Bekezhanova

Problem on plane unidirectional two-layer flow of viscous heat-conducting fluid in microgravity is studied. There is a situation in which the flow is generated by Marangoni forces and motion of one of channel's walls only. Using the linearization method the stability of the regime is investigated. The flow crisis is induced by thermal oscillatory or monotonic waves for different wavenumber.

Keywords: interface, nonisothermal flow, neutral curve.