

УДК 539.2; 538.945

## Поведение магнитного поля длинного джозефсоновского перехода при протекании через него постоянного тока

**Илья В. Уваев\***

Институт инженерной физики и радиоэлектроники,  
Сибирский федеральный университет,  
Свободный, 79, Красноярск, 660041,

Россия

**Юрий В. Захаров†**

**Ольга Г. Юшкова‡**

Сибирский государственный технологический университет,  
Мира, 82, Красноярск, 660049,

Россия

Получена 04.11.2010, окончательный вариант 18.01.2011, принята к печати 10.03.2011

*Рассмотрено поведение длинного джозефсоновского перехода при протекании через него постоянного электрического тока. Установлено, что поведение распределения тока в длинном джозефсоновском переходе аналогично поведению длинного упругого стержня-консоли при продольном изгибе. Кроме того, показано, что проникающие в одномерный переход вихри магнитного потока есть аналог цепочки спинов во внешнем поле, ориентация которых зависит от соотношения собственного и внешнего магнитных полей, т.е. длинный джозефсоновский переход может рассматриваться как "динамическая доменная структура".*

*Ключевые слова: длинный джозефсоновский переход, эйлерова неустойчивость, динамическая доменная структура.*

## Введение

Работа ряда электротехнических устройств основана на использовании некоторых нелинейных свойств различных неоднородных структур, свойства которых определяются как собственными характеристиками материала, так и размерными параметрами конкретного образца. Типичным примером такого соотношения свойств являются слоистые материалы, свойства которых во многом определяются условиями на границе раздела слоев, т.е. их граничными условиями. Именно эти граничные условия и определяют размерные и частотные эффекты, которые будут проявляться в конечном изделии.

В частности, в работе [1] было показано, что задача о перемещении тонкого ферромагнитного слоя с намагниченностью, закрепленной на одной поверхности и свободной на другой, под действием магнитного поля аналогична классической эйлеровой задаче об изгибе тонкого стержня. Суть этой работы сводилась к изучению спонтанной потери устойчивости магнитной системы — системы тонких пленок при поперечном их перемещении. При этом была проведена аналогия с устойчивостью упругого стержня под действием сжимающей силы. Однако из классической эйлеровой задачи известно, что потеря устойчивости стержнем приводит к появлению множества мод решений, соответствующих определенному

\*uiv2000@mail.ru

†YuZakharov@mail.ru

‡yushkovaolga85@mail.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

собственному значению краевой задачи, и долгое время способы достижения форм искривления, соответствующих второму и последующему собственному значению спектра, не были известны. В работе М.А.Лаврентьева и А.Ю.Ишлинского [2] было показано, что путём взрывного, динамического нагружения возможно достижения форм искривления стержня соответствующих второй и следующим модам. Пороги, следующие за первым, ими были названы динамическими порогами потери устойчивости, в свою очередь, первый порог был назван статическим порогом потери устойчивости. Поэтому проведенная аналогия между магнитной системой и упругой смогла дать качественное объяснение поведению магнитных пленок при импульсном перемагничивании.

Джозефсоновский переход также является слоистой структурой, его характеристики описываются уравнениями, аналогичными уравнениям для некоторых упругих и магнитных систем. Поэтому ранее, в работе [3], была рассмотрена аналогия поведения длинного джозефсоновского перехода во внешнем магнитном поле и упругого стержня под действием сжимающей нагрузки. В ходе проведенных работ было показано, что длинный джозефсоновский переход также имеет пороговый характер поведения, т.е. при достижении магнитным полем порогового значения, подобного эйлеровому порогу, происходит потеря устойчивости и магнитное поле перехода из мейснеровского распределения переходит в смешанное состояние, сводящееся к проникновению квантов магнитного потока в переход, причем направление и упорядочение проникающих вихрей-квантов магнитного потока определяются соотношением между внешним и внутренним полями перехода. Такое поведение было ассоциировано с динамической доменной структурой спинов во внешнем магнитном поле.

Однако в этих работах рассматривался изолированный переход, в то время как электротехнические устройства представляют собой определенную электрическую цепь.

С этой целью рассмотрим поведение магнитного поля длинного джозефсоновского перехода при протекании через него постоянного электрического тока.

## 1. Электродинамика джозефсоновского контакта

В общем случае разность фаз волновых функций сверхпроводников, образующих контакт, описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое при отсутствии диссипативного члена имеет вид [4]

$$\Delta\varphi_{x,y} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $\bar{c} = c(\frac{1}{4}Cd)^{\frac{1}{2}}$  — скорость распространения вдоль поверхности туннельного перехода электромагнитных волн;  $\lambda_J = (\hbar\mu_0 edJ_c/2)^{\frac{1}{2}}$  — джозефсоновская глубина проникновения, т.е. ширина области по краям контакта, в которой протекают джозефсоновские токи. Здесь  $J_c$  — джозефсоновская критическая плотность тока;  $C$  — емкость контакта, приходящаяся на единицу площади;  $d$  — толщина области контакта, в которую проникает магнитное поле.

В свою очередь, плотность тока  $J$ , протекающего через переход, связана с разностью фаз стационарным эффектом Джозефсона, определяемым уравнением [4]

$$J = J_c \sin \varphi, \quad (2)$$

распределение магнитного поля связано с градиентом разности фаз и находится из выражения [5]

$$\nabla\varphi = \frac{\pi ed}{h} [H \times n]. \quad (3)$$

В стационарном случае, когда разность фаз  $\varphi$  не зависит от времени  $t$ , уравнение (1) переходит в хорошо известное уравнение типа нелинейного маятника

$$\Delta\varphi_{x,y} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi. \quad (4)$$

Решению данного нелинейного уравнения посвящено много работ [4]. В частности, в работе [6] впервые были получены распределения плотности тока и магнитного поля вдоль перехода, выраженные через эллиптические функции Якоби, при этом было указано, что распределение поля имеет синусоидальную форму с длиной волны  $\pi k \lambda_J$  для частного случая  $k \ll 1$  и в общем случае  $-2k \lambda_J K(k^2)$ . Однако вместо рассмотрения классической краевой задачи на собственные значения и соответствующие им моды решений авторами была выбрана геометрическая интерпретация полученного спектра решений, т.е. кратность размера перехода  $L$  и джозефсоновской глубины проникновения  $\lambda_J$

$$L = 2nk\lambda_J K(k^2).$$

В свою очередь, в работе [3] последовательно рассматривалась задача на собственные значения и соответствующие моды решения, при этом проведенная механическая аналогия с упругим стержнем позволила качественно объяснить поведение магнитного поля в длинном джозефсоновском переходе.

Здесь также будет последовательно рассмотрено поведение длинного перехода, но для случая протекания через него постоянного тока.

## 2. Поведение перехода при протекании через него постоянного тока

Рассмотрим джозефсоновский контакт простейшей геометрии, показанный на рис. 1. Здесь предполагается, что электрический ток протекает слева направо, туннелируя через тонкий слой диэлектрика толщиной  $d$ .

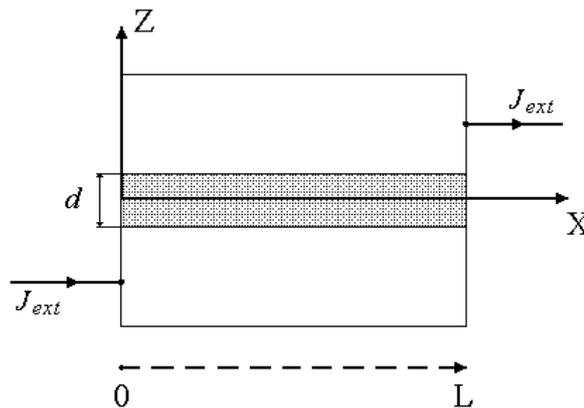


Рис. 1. Одномерный джозефсоновский переход с симметричной линейной геометрией

Распределение разности фаз волновых функций сверхпроводников, образующих контакт вдоль перехода, описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} J_c \sin \varphi(0) = J_{ext} \\ J_c \sin \varphi(L) = -J_{ext} \end{cases}, \quad (6)$$

здесь  $J_{ext}$  — плотность тока, протекающего через переход по электрической цепочке. Для удобства введём обозначение

$$J_{e0} = \frac{J_{ext}}{J_c} \text{ и } q = \frac{1}{\lambda_J}. \quad (7)$$

Решение уравнения (5) записывается с помощью эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов с модулем  $k$ , который определяется плотностью тока, протекающего через переход [3]:

$$\varphi = \pi + 2 \arcsin (k \operatorname{sn} [q(x + x_c), k]), \quad (8)$$

где  $x_c$  — константа интегрирования, найденная с помощью одного из граничных условий и определяемая выражением

$$x_c = -\frac{1}{q} F \left( \arcsin \left( \sin \left( \frac{\arcsin J_{e0}}{2} \right) k^{-1} \right), k \right). \quad (9)$$

Здесь и далее  $F$  — эллиптический интеграл первого рода.

По аналогии с работой [3], используя граничное условие, найдём спектр собственных значений:

$$q = \frac{4m K(k)}{L}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Здесь и далее  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ ,  $L$  — продольный размер одномерного перехода.

Стоит обратить внимание, что выражение для спектра имеет тот же вид, что и выражение, полученное для случая воздействия на длинный переход внешнего однородного магнитного поля.

По аналогии с эйлеровой силой для упругого стержня

$$P_c = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{EI}{L^2}$$

введём критическое значение плотности тока, соответствующее первому статическому порогу [3]:

$$J_1 = (2\pi)^2 \frac{I_0}{L^2}, \quad (11)$$

здесь  $I_0 = \Phi_0/L_0$  есть минимальный ток [5], создающий в переходе с индуктивностью  $L_0 = 2\pi\mu_0 d$  квант магнитного потока  $\Phi_0$ .

Соответственно первое критическое значение для магнитного поля, следуя [3], имеет вид

$$H_1 = 4\pi H_0. \quad (12)$$

Используя спектр собственных значений (10), найдём зависимость модуля  $k$  от плотности тока:

$$J^{(m)} = J_1 \frac{4m^2 K^2(k)}{\pi^2}. \quad (13)$$

Полученная зависимость представлена на рис. 2. Она имеет идентичный вид зависимости из работы [3].

Аналогично рассмотрим поведение магнитного поля в переходе.

Используя введенное выражение для критического значения магнитного поля в виде (12), получим зависимость модуля  $k$  от магнитного поля:

$$H^{(m)} = H_1 \frac{2m K(k)}{\pi}. \quad (14)$$

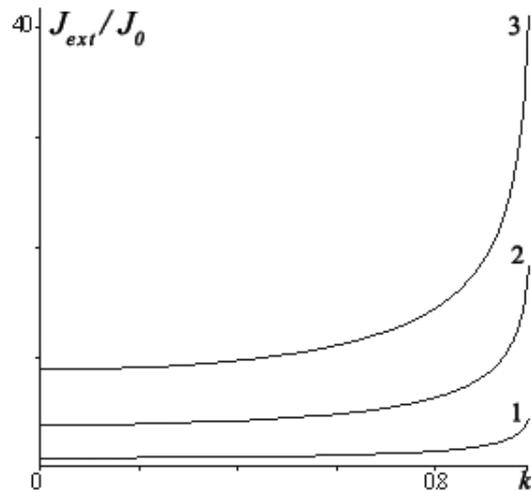


Рис. 2. Зависимость модуля эллиптических функций  $k$  от внешней плотности тока при  $m = 1, m = 2, m = 3$

Построим график зависимости модуля эллиптических функций  $k$  от внешнего магнитного поля (рис. 3).

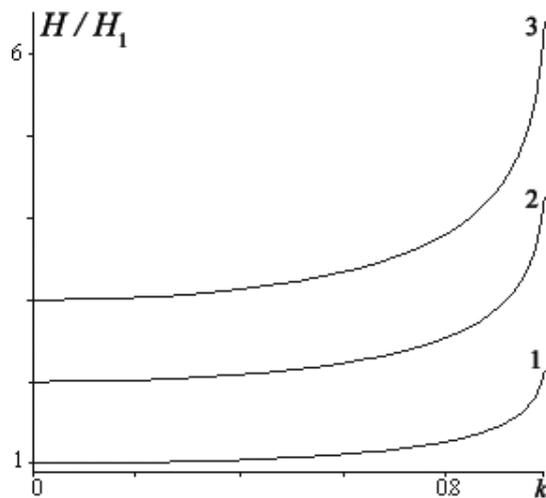


Рис. 3. Зависимость модуля эллиптических функций  $k$  от внешнего магнитного поля при  $m = 1, m = 2, m = 3$

Как и в случае плотности тока, зависимость для магнитного поля также имеет совпадающий характер с полученными зависимостями для случая, когда на переход действует однородное магнитное поле. Поскольку выражения (13) и (14) идентичны выражениям для случая воздействия на переход однородного магнитного поля, то и вид полученных выражений для распределений плотности тока и магнитного поля идентичен:

$$J(x) = -\frac{8}{\pi^2} m^2 k K^2(k) J_1 \operatorname{sn} \left( \frac{4m K(k)}{L} (x + x_c), k \right) \operatorname{dn} \left( \frac{4m K(k)}{L} (x + x_c), k \right), \quad (15)$$

и для магнитного поля

$$H(x) = 4mk K(k) H_0 \operatorname{sn} \left( \frac{4m K(k)}{L} (x + x_c), k \right). \quad (16)$$

### 3. Обсуждения

Анализ полученных распределений плотности тока (15) и магнитного поля (16) вдоль перехода, представленных на рис. 4, показал, что длинный джозефсоновский переход, включенный в электрическую цепь, по которой протекает ток постоянной величины, ведет себя аналогично длинному джозефсоновскому переходу, находящемуся во внешнем однородном магнитном поле. При этом полученные выражения для спектра собственных значений (10) и соответствующих мод решений (13, 14) имеют идентичный вид выражениям, полученным в работе [3].

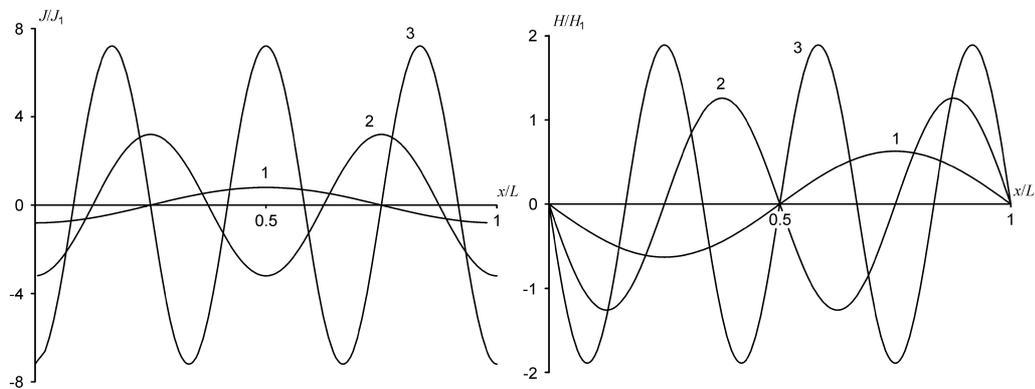


Рис. 4. Распределение плотности тока *слева* и магнитного поля *справа* вдоль перехода для различных мод: 1 — статической ( $m = 1$ ); 2 и 3 — динамической ( $m = 2$  и  $m = 3$ ), при одинаковом модуле  $k^* = 0.1$

Следовательно, можно сделать вывод, что динамические воздействия отдельно взятых магнитного поля и электрического тока на длинный джозефсоновский переход являются эквивалентными. Результатом такого воздействия на переход служит потеря им устойчивости, т.е. магнитное поле перехода из мейснеровского распределения спонтанно, по достижении полем некоторого критического значения — первого порога рассматриваемой задачи, переходит в смешанное состояние, что, как было показано ранее [3], связано с проникновением в переход кванта магнитного потока.

Количественное отличие полученных распределений работы [3] сводится к различию в величинах констант интегрирования (9), что приводит к различному смещению разности фаз волновых функций сверхпроводников, образующих переход в полученных распределениях относительно начала координат.

Для случая, когда на переход действует однородное магнитное поле, смещение разности фаз равно нулю в силу симметрии граничных условий [3], следовательно, геометрическое расположение вихрей, проникших в переход, также симметрично. Для случая, когда через переход протекает постоянный ток, смещение начальной разности фаз тем больше, чем больше величина протекающего тока, кроме того, знак — направление этого смещения — зависит от направления протекающего тока. Таким образом, можно сделать вывод, что величина протекающего тока определяет не только количество проникающих в переход вихрей, но и их геометрическое расположение в переходе.

Поведение перехода, включенного в электрическую цепь и при этом находящегося во внешнем магнитном поле, предполагается исследовать отдельно.

*Работа поддержана проектом (код 2.1.1/2584) в рамках программы Министерства образования РФ "Развитие научного потенциала высшей школы".*

## Список литературы

- [1] Ю.В.Захаров, Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании, *Докл. РАН*, **344**(1995), №3, 328–332.
- [2] М.А.Лаврентьев, А.Ю.Ишлинский, Динамические формы потери устойчивости упругих систем, *Докл. АН СССР*, **64**(1949), №6, 779–782.
- [3] Ю.В.Захаров, И.В.Уваев, Джозефсоновский переход под действием магнитного поля, *Вестник КрасГУ, сер. физико-математические науки*, (2003), №3, 17–23.
- [4] А. Бароне, Дж. Патерно, Эффект Джозефсона. Физика и применения, М., Мир, 1984.
- [5] К.К.Лихарев, Введение в динамику джозефсоновского перехода, М., Наука, 1985.
- [6] C.S.Owen, D.J.Scalapino, Vortex structure and critical currents in Josephson junctions, *Phys. Rev.*, **164**(1967), 538–544.

## Behaviour of Josephson Junction at Course through it of a Direct Current

Ilya V. Uvaev  
Yurii V. Zakharov  
Olga G. Yushkova

---

*The behaviour of long Josephson junction surveyed at course through it of a constant electric current. It is established, that behaviour of allocation of a current in long Josephson junction analog to behaviour long elastic rods–cantilevers at a buckling. Besides it is shown, that curls of a magnetic flux penetrating into the one-dimensional junction are analog of a line-up of spins in an external field which orientation depends on a relation of a natural and exterior magnetic field, i.e. long Josephson junction can be considered as "dynamic domain structure".*

*Keywords: long Josephson junction, the Eulerian threshold losses, dynamic domain structure.*