УДК 514.76

Полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики

Леонид Н. Кривоносов
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Минина, 24, Н.Новгород, 603950
Россия

Вячеслав А. Лукьянов*
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Павловского, 1а, Нижегородская область, Заволжье, 606520
Россия

Получена 11.10.2010, окончательный вариант 22.02.2011, принята к печати 10.04.2011

Данная статья развивает исследования, начатые в [1]*. Получена система дифференциальных уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики. Приведено общее решение этой системы, выражающееся через эллиптическую* $\wp$*-функцию Вейерштрасса. Для нескольких частных случаев получены решения, выражающиеся через элементарные функции. Доказаны критерии того, что метрика, являющаяся прямой суммой двух бинарных квадратичных форм, является эйнштейновой метрикой и конформно-плоской метрикой.*

Ключевые слова: кривизна связности, оператор Ходжа, уравнения Эйнштейна, уравнения Янга-Миллса, центрально-симметрическая метрика, 4-мерное многообразие конформной связности.

Введение

В [1] показано, что система уравнений Янга-Миллса в *нормальном* (по Картану) 4-мерном пространстве конформной связности может быть сведена к 10 дифференциальным уравнениям 4-го порядка. (В [1] нормальное пространство конформной связности мы, исходя из физических соображений, называли *беззарядным.*) Искомыми функциями этой системы являются 10 коэффициентов угловой метрики этого пространства. Поэтому вполне корректен термин "уравнения Янга-Миллса дифференциальной квадратичной формы (от 4-х переменных)".

В [2, с. 381] центрально-симметрической называется метрика вида

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + e^{2\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

где λ, μ, ν — функции только от r и t. Однако на самом деле не существенно, что перед $d\varphi^2$ стоит именно множитель $\sin^2\theta$. Существенно лишь то, что бинарная квадратичная форма $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ имеет постоянную гауссову кривизну (равную 1). Поэтому мы будем рассматривать метрику несколько более общего вида, заменив в (1) $\sin^2\theta$ на функцию $\sigma^2(\theta)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\varkappa\sigma, \tag{2}$$

где $\varkappa = \text{const}$. Это условие означает, что квадратичная форма $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2$ имеет постоянную гауссову кривизну, равную $\varkappa$.

*oxyzt@ya.ru

Целью статьи является составление и решение уравнений Янга-Миллса для метрики

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + e^{2\mu}(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2), \tag{3}$$

где λ, μ, ν — функции только от r и t, а $\sigma(\theta)$ удовлетворяет условию (2).

Поскольку угловая метрика пространства конформной связности определена лишь с точностью до множителя (см. [3, с. 70]), можно избавиться от одного из множителей $e^{2\nu}$, $e^{2\lambda}$ или $e^{2\mu}$. Удобнее всего избавиться от $e^{2\mu}$, т.к. в итоге получается прямая сумма двух бинарных квадратичных форм

$$\psi = \left(-e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2\right) + (d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2), \tag{4}$$

последняя из которых имеет постоянную гауссову кривизну $\varkappa$.

Как известно [4, с. 183], бинарную квадратичную форму всегда можно привести (в подходящей системе локальных координат) к виду $-dt^2 + e^{2\lambda}dr^2$ или $-e^{2\nu}dt^2 + dr^2$.

Поэтому угловая метрика (4) всегда приводима либо к первому каноническому виду

$$\psi = -dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2, \tag{5}$$

либо ко второму

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2. \tag{6}$$

В данной статье показано, что в обоих канонических представлениях уравнения Янга-Миллса решаются в конечном виде с помощью эллиптической $\wp$-функции Вейерштрасса. Однако в других представлениях квадратичной формы (3) некоторые из этих решений можно получить в элементарных функциях. Поэтому уравнения Янга-Миллса сначала выводятся для метрики (3), затем они решаются для канонических представлений, и далее находятся некоторые решения в элементарных функциях. Попутно решается вопрос о конформности некоторых решений эйнштейновой метрики.

1. Вывод уравнений Янга-Миллса

Пространства конформной связности были введены Э.Картаном в [5] , там же рассмотрены нормальные пространства конформной связности (с. 175). Будем обозначать точкой над буквой производную по t, а штрихом — производную по r.

Рассматривая метрику (3), положим

$$\begin{aligned} \omega^1 &= e^{\nu}dt, \qquad \omega^2 = e^{\lambda}dr, \\ \omega^3 &= e^{\mu}d\theta, \qquad \omega^4 = e^{\mu}\sigma(\theta)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства внешне, получим:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -e^{-\lambda}\nu'\omega^1\wedge\omega^2, \\ d\omega^2 &= e^{-\nu}\dot\lambda\omega^1\wedge\omega^2, \\ d\omega^3 &= e^{-\nu}\dot\mu\omega^1\wedge\omega^3 + e^{-\lambda}\mu'\omega^2\wedge\omega^3, \\ d\omega^4 &= e^{-\nu}\dot\mu\omega^1\wedge\omega^4 + e^{-\lambda}\mu'\omega^2\wedge\omega^4 + e^{-\mu}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^3\wedge\omega^4. \end{aligned}$$

Если $d\omega^i = \sum\limits_{k<l} c^i_{kl}\omega^k\wedge\omega^l$, то

$$\begin{aligned} c^1_{12} &= -e^{-\lambda}\nu', \qquad c^2_{12} = e^{-\nu}\dot\lambda, \qquad c^4_{34} = e^{-\mu}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}, \\ c^3_{13} &= c^4_{14} = e^{-\nu}\dot\mu, \qquad c^3_{23} = c^4_{24} = e^{-\lambda}\mu'. \end{aligned}$$

Здесь и везде далее все индексы пробегают значения от 1 до 4, по одноименным верхним и нижним индексам предполагается суммирование.

Для вывода уравнений Янга-Миллса воспользуемся алгоритмом, описанным в [1]. Для удобства приведем его здесь:

1. Вычислить пфаффовы *формы Кристоффеля* $\omega_k^i = \gamma_{kl}^i \omega^l$ заданной квадратичной формы ψ по формуле
$$\gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}\left(c_{kl}^i + \eta^{im}\eta_{kj}c_{lm}^j - \eta^{im}\eta_{lj}c_{mk}^j\right)$$
(см. [6, с. 126]), где
$$(\eta_{ij}) = \left(\eta^{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить по формуле $R_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ внешние *формы римановой кривизны* R_j^i квадратичной формы ψ.

3. Найти *тензор Риччи* R_{jm} по формуле $R_{jm} = R_{jmk}^k$.

4. Вычислить скалярную кривизну $R = \eta^{ij}R_{ij}$, коэффициенты b_{jm} пфаффовых форм ω_i, пользуясь доказанными в [1, с. 72] уравнениями Эйнштейна $b_{jm} = \dfrac{1}{2}R_{jm} - \dfrac{1}{12}R\eta_{jm}$, и пфаффовы формы ω_i по формуле $\omega_i = b_{ij}\omega^j$.

   Напомним, что матрица конформной связности имеет вид
$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить внешние формы конформной кривизны Φ_i по формуле $\Phi_i = d\omega_i - \omega_i^k \wedge \omega_k$ и Φ_j^i по формуле $\Phi_j^i = R_j^i + \omega^i \wedge \omega_j + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_m \wedge \omega^n$.

6. Найти $*\Phi_i$ и $*\Phi_j^i$ по формулам
$$\begin{aligned} *\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) &= \omega^3 \wedge \omega^4, & *\left(\omega^1 \wedge \omega^3\right) &= -\omega^2 \wedge \omega^4, \\ *\left(\omega^1 \wedge \omega^4\right) &= \omega^2 \wedge \omega^3, & *\left(\omega^2 \wedge \omega^3\right) &= -\omega^1 \wedge \omega^4, \\ *\left(\omega^2 \wedge \omega^4\right) &= \omega^1 \wedge \omega^3, & *\left(\omega^3 \wedge \omega^4\right) &= -\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned}$$
где $*$ — оператор Ходжа.

7. Проверить выполнимость уравнений Янга-Миллса $d * \Phi_i + \omega_k \wedge *\Phi_i^k - *\Phi_k \wedge \omega_i^k = 0$.

Применяем описанный алгоритм:

1.
$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= e^{-\lambda}\nu'\omega^1 + e^{-\nu}\dot{\lambda}\omega^2, \\ \omega_1^3 &= e^{-\nu}\dot{\mu}\omega^3, \qquad \omega_1^4 = e^{-\nu}\dot{\mu}\omega^4, \\ \omega_2^3 &= e^{-\lambda}\mu'\omega^3, \qquad \omega_2^4 = e^{-\lambda}\mu'\omega^4, \\ \omega_3^4 &= e^{-\mu}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^4. \end{aligned}$$

2. Вычисляем внешние дифференциалы этих форм:

$$
\begin{aligned}
d\omega_1^2 &= \left[e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\lambda}^2\right)\right]\omega^1\wedge\omega^2,\\
d\omega_1^3 &= e^{-2\nu}\left(\ddot{\mu} - \dot{\mu}\dot{\nu} + \dot{\mu}^2\right)\omega^1\wedge\omega^3 +\\
&\quad + e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{\mu}' - \nu'\dot{\mu} + \mu'\dot{\mu}\right)\omega^2\wedge\omega^3,\\
d\omega_1^4 &= e^{-2\nu}\left(\ddot{\mu} - \dot{\mu}\dot{\nu} + \dot{\mu}^2\right)\omega^1\wedge\omega^4 +\\
&\quad + e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{\mu}' - \nu'\dot{\mu} + \mu'\dot{\mu}\right)\omega^2\wedge\omega^4 + e^{-\nu-\mu}\dot{\mu}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^3\wedge\omega^4,\\
d\omega_2^3 &= e^{-2\lambda}\left(\mu'' - \lambda'\mu' + \mu'^2\right)\omega^2\wedge\omega^3 +\\
&\quad + e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{\mu}' - \mu'\dot{\lambda} + \mu'\dot{\mu}\right)\omega^1\wedge\omega^3,\\
d\omega_2^4 &= e^{-2\lambda}\left(\mu'' - \lambda'\mu' + \mu'^2\right)\omega^2\wedge\omega^4 +\\
&\quad + e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{\mu}' - \mu'\dot{\lambda} + \mu'\dot{\mu}\right)\omega^1\wedge\omega^4 + e^{-\lambda-\mu}\mu'\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^3\wedge\omega^4,\\
d\omega_3^4 &= -\varkappa e^{-2\mu}\omega^3\wedge\omega^4.
\end{aligned}
$$

Вычисляем внешние формы римановой кривизны для угловой метрики (3):

$$
\begin{aligned}
R_1^2 &= A\omega^1\wedge\omega^2, \qquad R_1^3 = B\omega^1\wedge\omega^3 + C\omega^2\wedge\omega^3,\\
R_1^4 &= B\omega^1\wedge\omega^4 + C\omega^2\wedge\omega^4, \qquad R_2^3 = C\omega^1\wedge\omega^3 + E\omega^2\wedge\omega^3,\\
R_2^4 &= C\omega^1\wedge\omega^4 + E\omega^2\wedge\omega^4, \qquad R_3^4 = F\omega^3\wedge\omega^4,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A = e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\lambda}^2\right),\\
&B = e^{-2\nu}\left(\ddot{\mu} - \dot{\mu}\dot{\nu} + \dot{\mu}^2\right) - e^{-2\lambda}\mu'\nu',\\
&C = e^{-\lambda-\upsilon}\left(\dot{\mu}' - \nu'\dot{\mu} + \mu'\dot{\mu} - \dot{\lambda}\mu'\right),\\
&E = e^{-2\lambda}\left(\mu'' - \lambda'\mu' + \mu'^2\right) - e^{-2\nu}\dot{\lambda}\dot{\mu},\\
&F = e^{-2\lambda}\mu'^2 - \varkappa e^{-2\mu} - e^{-2\nu}\dot{\mu}^2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3. Отсюда компоненты тензора римановой кривизны таковы:

$$
\begin{aligned}
&R^2_{112} = A, \qquad R^3_{113} = R^4_{114} = B,\\
&R^4_{124} = R^3_{123} = R^4_{214} = R^3_{213} = C,\\
&R^4_{224} = R^3_{223} = E, \qquad R^4_{334} = F.
\end{aligned}
$$

Вычисляем компоненты тензора Риччи:

$$
\begin{aligned}
&R_{11} = R^2_{112} + R^3_{113} + R^4_{114} = A + 2B,\\
&R_{12} = R^3_{123} + R^4_{124} = 2C = R_{21},\\
&R_{22} = R^1_{221} + R^3_{223} + R^4_{224} = -R^2_{112} + R^3_{223} + R^4_{224} = 2E - A,\\
&R_{33} = R^1_{331} + R^2_{332} + R^4_{334} = -R^3_{113} + R^3_{223} + R^4_{334} = -B + E + F,\\
&R_{44} = R^1_{441} + R^2_{442} + R^3_{443} = -R^4_{114} + R^4_{224} + R^4_{334} = -B + E + F.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
&R = -2A - 4B + 4E + 2F,\\
&b_{11} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}E + \frac{1}{6}F,\\
&b_{22} = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}E - \frac{1}{6}F,\\
&b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}E + \frac{1}{3}F,\\
&b_{12} = b_{21} = C.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}E + \frac{1}{6}F\right)\omega^1 + C\omega^2,\\
\omega_2 &= C\omega^1 + \left(-\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}E - \frac{1}{6}F\right)\omega^2,\\
\omega_3 &= \left(\frac{1}{6}A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}E + \frac{1}{3}F\right)\omega^3,\\
\omega_4 &= \left(\frac{1}{6}A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}E + \frac{1}{3}F\right)\omega^4.
\end{aligned}
$$

5. Вычисляем внешние формы конформной кривизны:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1^2 = R_1^2 + \omega^2 \wedge \omega_1 - \omega_2 \wedge \omega^1 = 2K\omega^1 \wedge \omega^2,\\
&\Phi_1^3 = -K\omega^1 \wedge \omega^3, \qquad \Phi_1^4 = -K\omega^1 \wedge \omega^4,\\
&\Phi_2^3 = K\omega^2 \wedge \omega^3, \qquad \Phi_2^4 = K\omega^2 \wedge \omega^4,\\
&\Phi_3^4 = -2K\omega^3 \wedge \omega^4,
\end{aligned}
$$

где

$$
K = \frac{1}{6}\left(A - B + E - F\right). \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= d\omega_1 - \omega_1^2 \wedge \omega_2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3 - \omega_1^4 \wedge \omega_4 = P\omega^1 \wedge \omega^2,\\
\Phi_2 &= Q\omega^1 \wedge \omega^2, \qquad \Phi_3 = S\omega^1 \wedge \omega^3 + T\omega^2 \wedge \omega^3,\\
\Phi_4 &= S\omega^1 \wedge \omega^4 + T\omega^2 \wedge \omega^4,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&P = -e^{-\lambda}\left(b'_{11} + \nu'\left(b_{11} + b_{22}\right)\right) + e^{-\nu}\left(\dot{b_{12}} + 2b_{12}\dot{\lambda}\right),\\
&Q = -e^{-\lambda}\left(b'_{12} + 2b_{12}\nu'\right) + e^{-\nu}\left(\dot{b_{22}} + \dot{\lambda}\left(b_{11} + b_{22}\right)\right),\\
&S = e^{-\nu}\left(\dot{b_{33}} + \dot{\mu}\left(b_{11} + b_{33}\right)\right) - e^{-\lambda}b_{12}\mu',\\
&T = e^{-\lambda}\left(b'_{33} + \mu'\left(b_{33} - b_{22}\right)\right) + e^{-\nu}b_{12}\dot{\mu}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Непосредственными вычислениями по формулам (11), (10) и (9) можно проверить справедливость тождеств

$$
S = e^{-\nu}\left(\dot{K} + 3K\dot{\mu}\right), \qquad T = e^{-\lambda}\left(K' + 3K\mu'\right). \tag{12}
$$

6. Вычисляем преобразования Ходжа внешних форм конформной кривизны:

$$
\begin{aligned}
*\Phi_1^2 &= 2K\omega^3 \wedge \omega^4, \qquad *\Phi_3^4 = 2K\omega^1 \wedge \omega^2,\\
*\Phi_1^3 &= K\omega^2 \wedge \omega^4, \qquad *\Phi_1^4 = -K\omega^2 \wedge \omega^3,\\
*\Phi_2^3 &= -K\omega^1 \wedge \omega^4, \qquad *\Phi_2^4 = K\omega^1 \wedge \omega^3;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} *\Phi_1 &= P\omega^3\wedge\omega^4, & *\Phi_4 = S\omega^2\wedge\omega^3 + T\omega^1\wedge\omega^4,\\ *\Phi_2 &= Q\omega^3\wedge\omega^4, & *\Phi_3 = -S\omega^2\wedge\omega^4 - T\omega^1\wedge\omega^4. \end{aligned}$$

7. При $i = 1$ получаем первое уравнение Янга-Миллса:

$$d*\Phi_1 + \omega_2\wedge*\Phi_1^2 + \omega_3\wedge*\Phi_1^3 + \omega_4\wedge*\Phi_1^4 -$$
$$- *\Phi_2\wedge\omega_1^2 - *\Phi_3\wedge\omega_1^3 - *\Phi_4\wedge\omega_1^4 = 0.$$

Будучи записанным в компонентах, оно дает два условия:

$$e^{-\nu}\left(\dot{T} + 3T\dot{\mu}\right) - Kb_{12} - Se^{-\lambda}\nu' = 0, \tag{13}$$

$$e^{-\lambda}\left(T' + 2T\mu'\right) - K\left(b_{22} - b_{33}\right) - Se^{-\nu}\left(\dot{\lambda} - \dot{\mu}\right) = 0. \tag{14}$$

При $i = 2$ получаем еще два уравнения:

$$e^{-\nu}\left(\dot{S} + 2S\dot{\mu}\right) - K\left(b_{11} + b_{33}\right) - Te^{-\lambda}\left(\nu' - \mu'\right) = 0, \tag{15}$$

$$e^{-\lambda}\left(S' + 3S\mu'\right) - Kb_{12} - Te^{-\nu}\dot{\lambda} = 0. \tag{16}$$

Уравнения Янга-Миллса для внешних форм $*\Phi_3$ и $*\Phi_4$ новых условий не накладывают. Если воспользоваться тождествами (12), увидим, что уравнения (13) и (16) совпадают. Поэтому система уравнений Янга-Миллса для квадратичной формы (3) свелась к трем дифференциальным уравнениям (13)–(15).

2. Отыскание основного решения системы уравнений (13)–(15)

Для квадратичной формы (4), иначе говоря, при $\mu = 0$, определенные выше величины примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &B = C = E = 0, \qquad F = -\varkappa,\\ &b_{11} = -b_{22} = \frac{1}{3}A - \frac{\varkappa}{6},\\ &b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{\varkappa}{3}, \qquad b_{12} = b_{21} = 0,\\ &K = \frac{1}{6}\left(A + \varkappa\right), \qquad S = \frac{1}{6}e^{-\nu}\dot{A}, \qquad T = \frac{1}{6}e^{-\lambda}A'. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (13)-(15) станут такими:

$$\begin{aligned} &\dot{A}' - \dot{\lambda}A' - \nu'\dot{A} = 0,\\ &e^{-2\lambda}\left(A'' - \lambda'A'\right) - e^{-2\nu}\dot{\lambda}\dot{A} - \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0,\\ &e^{-2\nu}\left(\ddot{A} - \dot{\nu}\dot{A}\right) - e^{-2\lambda}\nu'A' + \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Замечание. Все формулы предыдущего пункта справедливы лишь в канонической калибровке, т.е. когда $\omega_0^0 = 0$. Переход от угловой метрики (3) к угловой метрике (4), осуществляемый умножением (3) на $e^{-2\mu}$, приводит к неравенству $\omega_0^0 \neq 0$. Но, как показано в [7, с. 436], калибровочным преобразованием нормализации, не меняющим угловой метрики

(4), пфаффову форму ω_0^0 можно снова обратить в нуль. Поэтому система уравнений (18) эквивалентна системе (13)–(15). Переход от квадратичной формы (4) к одному из канонических видов (5) или (6) осуществляется координатным преобразованием и поэтому не может вызывать возражений.

Переход к первому каноническому виду (5) означает, что в уравнениях (18) следует положить $\nu = 0$. Получим

$$\dot{A}' - \dot{\lambda} A' = 0, \tag{19}$$

$$e^{-2\lambda}\left(A'' - \lambda' A'\right) - \dot{\lambda}\dot{A} - \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0, \tag{20}$$

$$\ddot{A} + \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0, \tag{21}$$

где

$$A = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2. \tag{22}$$

Предполагая $A' \neq 0$ и интегрируя (19), получим $e^{\lambda} = A' q(r)$. Это равенство можно упростить: заменой переменной r на

$$\widetilde{r} = \int q(r)\, dr$$

функция $q(r)$ сводится к 1. Это приводит к равенствам $e^{\lambda} = A',\ A'' - \lambda' A' = 0$.

В итоге система уравнений Янга-Миллса свелась к

$$\begin{array}{c} e^{\lambda} = A', \\ -\dot{\lambda}\dot{A} - \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0, \\ \ddot{A} + \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) = 0, \\ A = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2. \end{array} \tag{23}$$

Если выразить из 1-го уравнения λ и подставить в 4-е уравнение, то получим

$$\ddot{A} + \frac{1}{2}\left(p(t) - A^2\right) = 0,$$

где $p(t)$ — произвольная функция. Это равенство является следствием 3-го уравнения (23), поэтому в системе (23) последнее уравнение можно отбросить.

Складывая 2-е и 3-е уравнения (23), получим $\ddot{A} - \dot{\lambda}\dot{A} = 0$, $\ln\left|\dot{A}\right| + \ln\left|s'(r)\right| = \lambda$,

$$\dot{A} s'(r) = e^{\lambda}, \tag{24}$$

где $s(r)$ — произвольная функция. Сравнивая с первым уравнением (23), находим

$$\dot{A} s'(r) = A'.$$

Данное линейное относительно A уравнение имеет своим общим решением функцию $A(t + s(r))$. Но вид функции A нам известен из 3-го уравнения (23). Она выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса

$$A(t) = 12\wp\left(t, \frac{\varkappa^2}{12}, \alpha\right),$$

где α — произвольная константа. Окончательно имеем:

$$A(t, r) = 12\wp\left(t + s(r), \frac{\varkappa^2}{12}, \alpha\right). \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) при произвольной функции $s\,(r)$ и произвольной константе α дают общее решение системы (23). Но эти формулы допускают дальнейшее упрощение. Заменой $s\,(r) \to \widetilde{r} + \beta$, где $\beta = \mathrm{const}$, они сводятся к виду

$$\begin{gathered} \dot{A} = e^{\lambda}, \\ A = 12\wp\left(t + r + \beta, \tfrac{\varkappa^2}{12}, \alpha\right). \end{gathered} \tag{26}$$

3. Другие решения системы уравнений (23)

1. Решение (26) было получено в предположении, что $A' \neq 0$. Рассмотрим теперь случай

$$A' = 0. \tag{27}$$

В этом случае уравнения (19)-(21) сведутся к

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}\dot{A} - \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) &= 0, \\ \ddot{A} + \frac{1}{2}\left(\varkappa^2 - A^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Складывая их, снова придем к (24). Перенормируя переменную r, сведем в (24) $s'\,(r)$ к 1. Последнее уравнение имеет своим решением

$$A\,(t) = 12\wp\left(t + \beta, \frac{\varkappa^2}{12}, \alpha\right),$$

α и β — константы. В итоге получаем решение

$$\begin{gathered} A\,(t) = 12\wp\left(t + \beta, \tfrac{\varkappa^2}{12}, \alpha\right), \\ \dot{A} = e^{\lambda}. \end{gathered} \tag{28}$$

2. Формулы (28) теряют смысл, когда $\dot{A} = 0$. Вместе с $A' = 0$ это означает, что $A = \mathrm{const}$. Поэтому данный случай требует отдельного рассмотрения. В этом случае система (19)–(21) приводит к $A = \pm\varkappa$.

   (a) Если $A = \varkappa$, из формул (8) с учетом (17) видно, что выполняются равенства $R_{ij} = -\varkappa\eta_{ij}$, т.е. метрика (5) эйнштейнова. В этом случае λ вычислятся из уравнения (22), а именно, полагая $e^{\lambda} = H$, получаем линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\ddot{H} - \varkappa H = 0$. Его очевидные решения приводят к метрикам из списка А.З. Петрова [8, с. 208]

$$\begin{gathered} \psi = -dt^2 + \mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\varkappa}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \cos^2\left(\sqrt{\varkappa}\theta + \alpha\right)d\varphi^2, \\ \psi = -dt^2 + \cos^2\left(\sqrt{-\varkappa}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}\theta + \alpha\right)d\varphi^2. \end{gathered} \tag{29}$$

   (b) В случае $A = -\varkappa$ легко видеть, что все компоненты матрицы конформной кривизны Φ_i^j и Φ_j равны нулю, поэтому метрика (5) является *конформно-плоской* (имеет нулевую вейлеву кривизну) [1, с. 72, 73]. Снова полагая $e^{\lambda} = H$, найдем H из уравнения $\ddot{H} + \varkappa H = 0$. Его решения дают метрики вида

$$\begin{gathered} \psi = -dt^2 + \mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}\theta + \alpha\right)d\varphi^2, \\ \psi = -dt^2 + \cos^2\left(\sqrt{\varkappa}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \cos^2\left(\sqrt{\varkappa}\theta + \alpha\right)d\varphi^2. \end{gathered} \tag{30}$$

   Эти метрики, как допускающие 6-членную группу инвариантности, также имеются в [8, с. 188].

Замечание. Функция $A(t,r)$, определенная формулами (7), выражает гауссову кривизну бинарной квадратичной формы $-e^{2\nu}dt^2+e^{2\lambda}dr^2$. Поэтому рассмотрением случая $A=\mathrm{const}$ фактически доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Прямая сумма двух бинарных квадратичных форм, одна из которых имеет постоянную гауссову кривизну $\varkappa$, является эйнштейновой тогда и только тогда, когда второе прямое слагаемое имеет ту же гауссову кривизну $\varkappa$.*

Теорема 2. *Прямая сумма двух бинарных квадратичных форм, одна из которых имеет постоянную гауссову кривизну $\varkappa$, будет конформно-плоской тогда и только тогда, когда второе прямое слагаемое имеет гауссову кривизну $(-\varkappa)$.*

Более общая формулировка (для случая произвольной размерности) достаточной части теоремы 1 имеется в [9, с. 66].

Если угловая метрика (4) приводится ко 2-му каноническому виду (6), то аналоги решений (26) и (28)–(30) имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} e^{\nu} &= A', \qquad A=-12\wp\left(t+r+\beta,\frac{\varkappa^2}{12},\alpha\right); \\ e^{\nu} &= A', \qquad A=-12\wp\left(r+\beta,\frac{\varkappa^2}{12},\alpha\right); \end{aligned} \tag{31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=-\cos^2\left(\sqrt{\varkappa}r+\beta\right)dt^2+dr^2+d\theta^2+\cos^2\left(\sqrt{\varkappa}\theta+\alpha\right)d\varphi^2, \\ \psi=-\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}r+\beta\right)dt^2+dr^2+d\theta^2+\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}\theta+\alpha\right)d\varphi^2; \end{array}\right. \tag{32}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=-\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\varkappa}r+\beta\right)dt^2+dr^2+d\theta^2+\cos^2\left(\sqrt{\varkappa}\theta+\alpha\right)d\varphi^2, \\ \psi=-\cos^2\left(\sqrt{-\varkappa}r+\beta\right)dt^2+dr^2+d\theta^2+\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}\theta+\alpha\right)d\varphi^2. \end{array}\right. \tag{33}$$

4. Некоторые решения в элементарных функциях

1. Можно получить другое представление для решения (28), имеющее то преимущество, что оно выражается через элементарные функции. Для отыскания этого решения не будем прибегать к каноническому представлению (5), а просто добавим условие (27) $A'=0$ к уравнениям (18). Они станут такими:

$$\begin{aligned} &\nu'\dot{A}=0, \\ &-e^{-2\nu}\dot{\lambda}\dot{A}-\frac{1}{2}\left(\varkappa^2-A^2\right)=0, \\ &e^{-2\nu}\left(\ddot{A}-\dot{\nu}\dot{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\varkappa^2-A^2\right)=0. \end{aligned} \tag{34}$$

   (a) Сначала рассмотрим случай $\nu'=0$. Складывая второе и третье равенства, получим $\ddot{A}=\dot{A}\left(\dot{\lambda}+\dot{\nu}\right)$, откуда $\dot{A}=e^{\lambda}e^{\nu}q(r)$. Перенормировкой переменной r добьемся равенства $q(r)=1$. Следовательно, $\dot{A}=e^{\lambda}e^{\nu}$. Выразим отсюда e^{ν} и подставим во второе уравнение (34): $2e^{2\lambda}\dot{\lambda}=\left(A^2-\varkappa^2\right)\dot{A}$. Тогда после интегрирования

$$e^{2\lambda}=\frac{1}{3}A^3-\varkappa^2A+\alpha, \quad e^{2\nu}=\dot{A}^2e^{-2\lambda}.$$

   Это и есть общее решение системы уравнений (18) и (27), выраженное через произвольную функцию $A(t)$ и произвольную константу α. Однако от функции $A(t)$

можно избавиться перенормировкой переменной t: $\widetilde{t}+\beta = A(t)$, $\beta = \text{const}$. В итоге получим

$$e^{2\lambda} = \tfrac{1}{3}(t+\beta)^3 - \varkappa^2 (t+\beta) + \alpha, \qquad e^{2\nu} = e^{-2\lambda}. \tag{35}$$

Из этого решения можно получить решения (28) простой перенормировкой параметра t:

$$\widetilde{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{3}(t+\beta)^3 - \varkappa^2 (t+\beta) + \alpha}}.$$

Поэтому метрики, определяемые решениями (28) и (35), изометричны.

(b) Рассмотрим теперь другую возможность, вытекающую из (34): $\dot{A} = 0$. Это означает, что $A = \text{const}$, поэтому система (18) сводится к $A^2 = \varkappa^2$. Учитывая первое равенство (7), получим, что

$$e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\lambda}^2\right) = \pm\varkappa. \tag{36}$$

Это равенство означает, что гауссова кривизна квадратичной формы — первого слагаемого в (4) — равна $\pm\varkappa$. Здесь одну из функций, λ или ν, можно взять произвольно, например, положить $\nu = 0$. Это даст решение (29) при $+\varkappa$ и (30) при $(-\varkappa)$. Если же взять $\lambda = 0$, получим решения (32) и (33). Итак, все метрики вида (4), для которых $A = const$, изометричны одной из метрик (29), (30), (32) или (33).

2. Если условия случая 1a $A' = \nu' = 0$ заменить на $\dot{A} = \dot{\lambda} = 0$, то рассуждениями, аналогичными случаю 1a, получим

$$e^{2\nu} = \frac{1}{3}(r+\beta)^3 + \varkappa^2 (r+\beta) + \alpha, \qquad e^{2\nu} = e^{-2\lambda}. \tag{37}$$

Это решение есть другое представление решения (31), т.е. метрики (31) и (37) изометричны.

3. Для решений (28) и (31) имеются другие представления в элементарных функциях, но уже не вида (4), а вида (3). Они примечательны в том отношении, что определяемые ими метрики эйнштейновы. Для получения такого представления умножим метрику (4), определенную решением (37),

$$\psi = -\left(\frac{1}{3}(r+\beta)^3 + \varkappa^2 (r+\beta) + \alpha\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{1}{3}(r+\beta)^3 + \varkappa^2 (r+\beta) + \alpha} + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2,$$

на $\dfrac{1}{r^2}$, сделаем замену $r \to \dfrac{1}{r}$ и положим $\beta = -\varkappa$. Получим метрику вида

$$\begin{aligned} \psi \;=\; & -\left(\varkappa - \frac{1}{3r} + \left(\alpha - \frac{2}{3}\varkappa^3\right) r^2\right) dt^2 + \\ & + \frac{dr^2}{\varkappa - \frac{1}{3r} + \left(\alpha - \frac{2}{3}\varkappa^3\right) r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Далее, умножим эту метрику на постоянное число γ^2 и сделаем замену $\gamma t \to t,\ \gamma r \to r$. Получим

$$\psi = -\left(\varkappa - \tfrac{\gamma}{3r} + \left(\alpha - \frac{2}{3}\varkappa^3\right)\frac{r^2}{\gamma^2}\right)dt^2 + \\ + \frac{dr^2}{\varkappa - \tfrac{\gamma}{3r} + \left(\alpha - \frac{2}{3}\varkappa^3\right)\frac{r^2}{\gamma^2}} + r^2\left(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{38}$$

Аналогичные действия над метрикой (4), определенной решением (35), приводят к метрике вида

$$\psi = \frac{-dt^2}{-\varkappa + \dfrac{\gamma}{3r} + \left(\alpha + \dfrac{2}{3}\varkappa^3\right)\dfrac{t^2}{\gamma^2}} + \\ + \left(-\varkappa + \frac{\gamma}{3r} + \left(\alpha + \frac{2}{3}\varkappa^3\right)\frac{t^2}{\gamma^2}\right)dr^2 + t^2\left(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{39}$$

Оказывается, метрики (38) и (39) эйнштейновы, и любая эйнштейнова метрика вида (3) изометрична одной из метрик (29), (32), (38) или (39). Для доказательства запишем условие эйнштейновости метрики (3):

$$-R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44}, \qquad R_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

В силу формул (8) это дает

$$B + E = 0, \qquad A + F = 0, \qquad C = 0. \tag{40}$$

Кроме того, в равенстве $R_{ij} = \sigma\eta_{ij}$ коэффициент $\sigma = \mathrm{const}$. Из (8) следует $A + 2B = -\sigma$. Так как

$$-b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44}, \qquad b_{12} = 0,$$

то из формул (11) для величин P, Q, S и T следует, что все они равны нулю. Тогда формулы (12) дают $\dot{K} + 3K\dot{\mu} = 0,\ K' + 3K\mu' = 0$, что равносильно $K = qe^{-3\mu},\ q = \mathrm{const}$.

Так как, в силу (10) и (40), $K = \dfrac{1}{3}(A - B)$, то для отыскания A и B получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} A - B &= 3qe^{-3\mu}, \\ A + 2B &= -\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A &= -\sigma + 6qe^{-3\mu}, \\ B &= -\sigma + 3qe^{-3\mu}. \end{aligned} \tag{41}$$

Теперь рассмотрим три случая.

(a) Предположим сначала, что $\mu' \neq 0$. Тогда можно сделать замену $e^{\mu} \to r$. Для новой переменной r будет теперь $\mu = \ln r$ и будут выполняться формулы

$$\begin{aligned} B &= -e^{-2\lambda}\frac{\nu'}{r}, \\ E &= -e^{-2\lambda}\frac{\lambda'}{r}, \\ F &= \frac{1}{r^2}\left(e^{-2\lambda} - \varkappa\right). \end{aligned} \tag{42}$$

Второе из равенств (40) позволяет найти $e^{-2\lambda}$ в силу (41) и (42):

$$e^{-2\lambda} = \varkappa - \frac{6q}{r} + \sigma r^2. \tag{43}$$

Первое из равенств (40) и первые два равенства (42) дают $\lambda' + \nu' = 0$, откуда $\lambda + \nu = f(t)$.

Перенормировкой переменной t можно свести функцию $f(t)$ к нулю. Это дает

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda}. \tag{44}$$

В итоге получилась метрика, только обозначением константы отличающаяся от (38). При $\varkappa = 1$ формулы (43) и (44) дают решение Коттлера уравнений Эйнштейна (см. [8, с. 89]).

(b) Если предположить, что $\dot\mu \neq 0$, то, делая замену $e^{\mu} \to t$ и производя остальные аналогичные предыдущим действия, придем к решению

$$e^{-2\nu} = -\varkappa + \frac{6q}{t} - \sigma t^2, \quad e^{2\lambda} = e^{-2\nu},$$

дающему метрику, отличающуюся от метрики (39) лишь обозначениями констант.

(c) Если же $\mu' = \dot\mu = 0$, то $e^{\mu} = N = \mathrm{const}$. Замена $N\theta \to \theta$, $N\varphi \to \varphi$ сделает $N = 1$, а $\varkappa$ заменит на $\dfrac{\varkappa}{N}$. В итоге получится метрика вида (4). При этом выполняются равенства

$$B = C = E = 0, \qquad F = -\frac{\varkappa}{N}.$$

Второе из равенств (40) вместе с (7) дадут

$$e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot\lambda - \dot\lambda\dot\nu + \dot\lambda^2\right) = \frac{\varkappa}{N}.$$

Мы пришли к одному из двух уравнений (36), которое дает метрики, изометричные метрикам (29) и (32). Доказательство закончено.

Итак, решение (28) дает метрику, хотя и не эйнштейнову, но конформную эйнштейновой метрике. Только решение (26) приводит к метрике ненулевой вейлевой кривизны и неконформной эйнштейновой.

Список литературы

[1] Л.Н.Кривоносов, В.А.Лукьянов, Связь уравнений Янга–Миллса с уравнениями Эйнштейна, *Изв. вузов. Матем.*, (2009), №9, 69–74.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, М., Наука, 1973.

[3] В.А.Лукьянов, Уравнения Янга–Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности, *Изв. вузов. Матем.*, (2009), №3, 67–72.

[4] В.Ф.Каган, Теория поверхностей, т. I, М.-Л., 1947.

[5] Э.Картан, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Изд-во Казанского университета, 1962.

[6] Э.Картан, Риманова геометрия в ортогональном репере, М., МГУ, 1960.

[7] Л.Н.Кривоносов, В.А.Лукьянов, Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **2**(2009), №4, 432–448.

[8] А.З.Петров, Новые методы в общей теории относительности, М., Наука, 1966.

[9] А.Бессе, Многообразия Эйнштейна, т. I, М., Мир, 1990.

The Full Decision of Young-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics

Leonid N. Krivonosov
Vyacheslav A. Luk'yanov

This article develops the researches begun in [1]. The system of the differential Young-Mills equations for the central-symmetric metrics is deduced. The general solution of this system expressed through elliptic $\wp$-function of Weierstrass is resulted. For several special cases the solutions expressed through elementary functions are received. Criteria that the metrics which is the direct sum of two binary quadratic forms is Einstein metrics and the conformally-flat metrics are proved.

Keywords: curvature of the connection, Hodge operator, Einstein equations, Maxwell's equations, Young-Mills equations, central-symmetric metrics, 4-dimensional conformally connected manifold.