УДК 519.44+519.1

Перечисление $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов кольца $\mathbf{R_n}(\mathbf{K},\mathbf{J})$

Максим Н. Давлетшин*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.12.2010, окончательный вариант 25.02.2011, принята к печати 10.03.2011

Пусть K — локальное кольцо главных идеалов с нильпотентным максимальным идеалом J. В статье завершается решение проблемы перечисления инвариантных относительно диагональных автоморфизмов идеалов кольца $n\times n$ матриц над K с коэффициентами из J на главной диагонали и над ней.

Ключевые слова: комбинаторные тождества, метод коэффициентов, перечисление на решетках, теория колец.

Введение

Кольцо всех $n \times n$-матриц над ассоциативным кольцом K с единицей с коэффициентами из идеала J на и над главной диагональю обозначают через $R_n(K,J)$. Когда идеал J квазирегулярный (например, нильпотентный), это радикальное кольцо, а при $J=0$ это есть обычное кольцо $NT_n(K)$ (нижних) нильтреугольных матриц степени n над K.

Нормальные подгруппы присоединенной группы кольца $NT_n(K)$ (она изоморфна унитреугольной группе $UT_n(K)$), инвариантные относительно подгруппы $\mathcal{D}$ диагональных автоморфизмов, перечислены для любого поля (даже тела) K порядка >2 в [1, следствие 4.3]. Их число равно $(1/n)\binom{2n}{n-1}$, как показал методоми интегральных представлений комбинаторных сумм Г.П. Егорычев в монографии [2, теорема 2.1.2]; см. также [3]. Согласно [4], это число совпадает с числом $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов кольца $NT_n(K)$ и с аналогичным числом для ассоциированного кольца Ли; столько же $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов имеет алгебра $NT_n(K)$ ($|K|>2$), которую изучали Дюбиш и Перлис [5]. Аналогичные задачи изучались позднее для алгебр Шевалле и унипотентных подгрупп групп лиева типа [6–8].

Идеалы кольца $R_n(K,J)$ характеризуются в [9] и [10] на основе введенного понятия T — границы (см. § 1), зависящей от определенной пары $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ наборов матричных позиций и J-подмодуля T в K. В случае локального кольца K главных идеалов с нильпотентным максимальным идеалом J число всех $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов кольца $R_n(K,J)$ конечно и при $|K/J|>2$ является функцией $\Omega(n,s)$ от n и ступени s нильпотентности J.

Ранее Г.П. Егорычев и В.М Левчук редуцировали проблему нахождения функции $\Omega(n,s)$ к вычислению числа $\Omega^+(n)$ пар $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$, для которых $i>j$ при всех $(i,j)\in\mathcal{L}$ [11]. В настоящей статье мы применяем метод интегральных представлений комбинаторных сумм (метод коэффициентов), устанавливая замкнутый вид числа $\Omega^+(n)$.

Основная теорема. *Для числа $\Omega^+(n)$ выполняются следующие равенства:*

$$\Omega^+(n) = 2^{2n-1} + (n-1)\binom{2n-2}{n-1} - \frac{4}{n}\binom{2n}{n-2} - \binom{2n}{n} =$$

*davmaks@gmail.com

$$= 2^{2n-1} + \frac{2(2n-3)!}{(n-2)!(n+2)!}(n^4 - 2n^3 - 27n^2 + 20n - 4). \qquad (1)$$

С учетом редукционной формулы Егорычева–Левчука мы завершаем решение названной выше проблемы вычисления функции $\Omega(n,s)$: $\Omega(n,1) = (1/n)\binom{2n}{n-1}$ и

$$\Omega(n,s) = (2sn + n - s - 1)\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{2n}{n} - \frac{4}{n}\binom{2n}{n-2} + 2^{2n-1}, \ s > 1. \qquad (2)$$

1. Перечисление $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов кольца $\mathbf{R_n(K,J)}$ на решетках

При описании идеалов кольца $R_n(K,J)$ используется понятие T-границы A, $A = A(T;\mathcal{L},\mathcal{L}')$ ([9, Definition 2.1]), которая зависит от J-подмодуля T в K и следующей пары наборов элементов матриц:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),...,(i_r,j_r)\}, \ r \geqslant 1, \\ 1 &\leqslant j_1 < j_2 < ... < j_r \leqslant n, \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_r \leqslant n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \{(1,j_r), \ (k_1,m_1), \ (k_2,m_2), \ ... \ ,(k_q,m_q), \ (i_1,n)\}, \ q \geqslant 0, \\ j_r &\leqslant m_1 < m_2 < ... < m_q \leqslant n, \ 1 \leqslant k_1 < k_2 < ... < k_q \leqslant i_1. \end{aligned}$$

Мы определим пару $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ как *"множество углов степени n"*.

Пусть $\mathcal{L}(i,j)$, $i,j \in \overline{1,n}$, будет множество всех последовательностей типа $\mathcal{L}$ произвольной длины r, $r \geqslant 1$, в которых $i_1 = i$, $j_r = j$, а $\mathcal{L}'(i,j)$, $i,j \in \overline{1,n}$, есть множество всех последовательностей $\mathcal{L}'$ типа (включая пустое множество) произвольной длины q, $q \geqslant 0$, определенная начальными условиями $i_1 = i$, $j_r = j$. В [9] указано, что число $N = N(R)$ всех идеалов кольца $R_n(K,J)$ равно

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{L}(i,j)||\mathcal{L}'(i,j)|.$$

Тогда $\Omega(n)$ есть число всех множеств углов $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ степени n , а $\Omega^+(n)$ — число всех множеств углов $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ степени n с $i > j$ для всех $(i,j) \in \mathcal{L}$.

Следующее утверждение доказано в [11, теорема 3].

Теорема 1. *Для чисел $\Omega^+(n)$, $n = 3,4,\ldots$ следующая комбинаторная формула справедлива:*

$$\Omega^+(n) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\left|\overline{\overline{\mathcal{L}}}^{(n-1)}(i-1,j)\right| \times \binom{i-1+n-j}{i-1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\left|\overline{\overline{\mathcal{L}}}^{(n-1)}(i-1,j)\right| \times \binom{i-1+n-j}{i-1}, \qquad (3)$$

где $\left|\overline{\overline{\mathcal{L}}}^{(n-1)}(i-1,j)\right|$ *выражение вида*

$$\sum_{r\geq 1}\left\{\sum_{k_1=0}^{r-1}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{s=r-k_2-1}^{2r-k_1-k_2-2}\binom{i-1}{k_1}\binom{j-i}{s}\binom{n-j}{k_2}\binom{s}{2r-s-k_1-k_2-2} \times \frac{k_1-k_2+1}{s-r+k_1+2}\times\right.$$
$$\times\binom{2s-2r+k_1+k_2+2}{s-r+k_2+1} + \sum_{k_1=0}^{r-1}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{s=r-k_2-1}^{2r-k_1-k_2-2}\binom{i-1}{k_1}\binom{j-i}{s}\binom{n-j}{k_2}\binom{s}{2r-s-k_1-k_2-2}\times \qquad (4)$$
$$\left.\times\frac{k_2-k_1+1}{s-r+k_2+2}\binom{2s-2r+k_1+k_2+2}{s-r+k_1+1}\right\}.$$

2. Вычисление числа $\Omega^+(n)$

В этом параграфе с помощью метода коэффициентов [2] будут найдены интегральные представления и вычислены в замкнутом виде различные комбинаторные суммы, которые последовательно возникают в процессе вычисления исследуемой кратной комбинаторной суммы (3) для чиеел $\Omega^+(n)$.

Пусть $\Omega^+(n) = T_1 + T_2 + T_3$, где

$$T_1 := \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n-i+j-1}{j-1}\binom{i-1+n-j}{i-1}, \tag{5}$$

$$T_2 := \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\binom{i-1+n-j}{i-1}\left(\binom{n-i+j}{j}-\binom{n-i+j}{j+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\binom{i-1+n-j}{i-1}\mathop{\mathbf{res}}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n+j-i}(1-u)}{u^{j+2}}\right\}, \tag{6}$$

$$T_3 := -\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\sum_{s=0}^{j-i-3}\binom{i-1+n-j}{i-1}\binom{i-1+n-j}{s+i}\binom{2j-2i}{j-i-s-3}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\sum_{s=0}^{j-i-1}\binom{i-1+n-j}{i-1}\binom{i-1+n-j}{s+i}\binom{2j-2i}{j-i-s+1}.$$

Лемма 2. *Для натуральных $n > 2$ справедливо следующее комбинаторное тождество:*

$$T_1 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n-i+j-1}{j-1}\binom{n+i-j-1}{i-1} = (n-1)\binom{2n-2}{n-1}. \tag{7}$$

Доказательство. Используя известные соотношения и интегральные представления для соответствующих биномиальных коэффициентов, мы получаем

$$T_1 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n-i+j-1}{j-1}\binom{n+i-j-1}{n-j} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=0}^{i-2}\binom{n-i+j}{j}\binom{n+i-j}{n-j-1} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=0}^{i-2}\left\{\mathop{\mathbf{res}}_{x}\frac{(1-x)^{-n+i-1}}{x^{j+1}}\mathop{\mathbf{res}}_{y}\frac{(1-y)^{-i-2}}{y^{n-j}}\right\}.$$

Применяя формулу геометрической прогрессии под знаком суммы по индексу j, мы получаем

$$\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1-x)^{-n+i-1}(1-y)^{-i-2}}{xy^n}\frac{1-(y/x)^{i-1}}{1-y/x}\right]_{|x|\gg|y|=\rho,\rho\ll 1} =$$

(правило линейности [2])

$$= \sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1-x)^{-n+i-1}(1-y)^{-i-2}}{y^n}\frac{1}{y-x}\right]_{|x|\gg|y|=\rho,\rho\ll 1} -$$

$$-\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1-x)^{-n+i-1}(1-y)^{-i-2}}{x^{i-1}y^{n-i+1}(y-x)}\right]_{|x|\gg|y|=\rho,\rho\ll 1}.$$

(замена переменных $X=x/(1-x)$, $Y=y/(1-y)$ под знаком оператора **res** в первой и второй суммах)

$$T_1=\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1+x)^{n-i}(1+y)^{n+i-1}}{y^n(x-y)}\right]_{|x|\gg|y|}-$$

$$-\sum_{i=2}^{\infty}\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1+x)^{n-1}(1+y)^{n}}{x^{i-1}y^{n-i+1}(x-y)}\right]_{|x|\gg|y|}=$$

(в первой сумме берём вычет по x, а во второй — под знаком $\mathop{\mathbf{res}}_{xy}$ суммируем по индексу i)

$$=\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{y}\frac{(1+y)^{n-i}(1+y)^{n+i-1}}{y^n}-\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1+x)^{n-1}(1+y)^{n}}{xy^{n-1}(x-y)}\frac{x}{(x-y)}\right]_{|x|\gg|y|}=$$

$$=\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{y}\frac{(1+y)^{2n-1}}{y^n}-\mathop{\mathbf{res}}_{xy}\left[\frac{(1+x)^{n-1}(1+y)^{n}}{y^{n-1}(x-y)^2}\right]_{|x|\gg|y|}.$$

Поступая аналогично, возьмем в первой сумме вычет по y, а во второй — по x:

$$T_1=\sum_{i=2}^{n}\binom{2n-1}{n-1}-\mathop{\mathbf{res}}_{y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{(1+x)^{n-1}(1+y)^{n}}{y^{n-1}}\right)\right]_{x=y}=$$

$$=(n-1)\binom{2n-1}{n-1}-(n-1)\mathop{\mathbf{res}}_{y}\left[\frac{(1+x)^{n-2}(1+y)^{n}}{y^{n-1}}\right]_{x=y}=$$

$$=(n-1)\binom{2n-1}{n-1}-(n-1)\mathop{\mathbf{res}}_{y}\frac{(1+y)^{2n-2}}{y^{n-1}}=$$

$$=(n-1)\binom{2n-1}{n-1}-(n-1)\binom{2n-2}{n-2}=(n-1)\binom{2n-2}{n-1}.$$

□

Пусть

$$T_2:=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\binom{i-1+n-j}{n-j}\left(\binom{n-i+j}{j}-\binom{n-i+j}{j+1}\right) \tag{8}$$

$$=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}...-\sum_{j=n}...\right)=S_1+S_2, \tag{9}$$

где

$$S_1:=\sum_{i=2}^{n}\left(\binom{2n-i}{n+1}-\binom{2n-i}{n}\right), \tag{10}$$

$$S_2:=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i-1+n-j}{n-j}\left(\binom{n-i+j}{j}-\binom{n-i+j}{j+1}\right). \tag{11}$$

Лемма 3. *Для $n = 3, 4, \ldots$ справедливо следующее комбинаторное тождество:*

$$S_1 = \sum_{i=2}^{n} \left(\binom{2n-i}{n+1} - \binom{2n-i}{n} \right) = \binom{2n-1}{n+2} - \binom{2n-1}{n+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$S_1 = \sum_{i=2}^{n} \underset{u}{\mathbf{res}} \left\{ (1+x)^{2n-i}/x^{n+2} - (1+x)^{2n-i}/x^{n+1} \right\} =$$

$$= \underset{u}{\mathbf{res}} \sum_{i=2}^{n} \left\{ (1+x)^{2n-i}(1-x)/x^{n+2} \right\} =$$

$$= \underset{u}{\mathbf{res}} \left\{ (1+x)^{2n-2}(1-x)\left(1-(1+x)^{-(n-1)}\right)/x^{n+2}\left(1-(1+x)^{-1}\right) \right\} =$$

$$= -\underset{u}{\mathbf{res}} \left\{ (1+x)^{n}(1-x)/x^{n+3} + \underset{u}{\mathbf{res}}\,(1+x)^{2n-1}(1-x)/x^{n+3} \right\} =$$

$$= \underset{u}{\mathbf{res}}\,(1+x)^{2n-1}(1-x)/x^{n+3} - 0 =$$

$$= \binom{2n-1}{n+2} - \binom{2n-1}{n+1},$$

таким образом,

$$S_1 = \sum_{i=2}^{n} \left(\binom{2n-i}{n+1} - \binom{2n-i}{n} \right) = \binom{2n-1}{n+2} - \binom{2n-1}{n+1}. \tag{12}$$

□

Следующее утвержденее устанавливается аналогично доказательству леммы 3

Лемма 4. *Для $n = 3, 4, \ldots$ справедливо следующее тождество:*

$$S_2 = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{i-1+n-j}{n-j} \left(\binom{n-i+j}{j} - \binom{n-i+j}{j+1} \right) =$$

$$= -(n-1) - \binom{2n}{n} + 2\binom{2n}{n+1}. \tag{13}$$

Из формул (9), (12) и (13) следует

Лемма 5. *Для $n = 3, 4, \ldots$ справедливо следующее тождество:*

$$T_2 := \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{i-1+n-j}{n-j} \left(\binom{n-i+j}{j} - \binom{n-i+j}{j+1} \right) =$$

$$= \binom{2n-1}{n+2} - \binom{2n-1}{n+1} - (n-1) - \binom{2n}{n} + 2\binom{2n}{n+1}. \tag{14}$$

2.1. Вычисление суммы $\mathbf{T_3}$

Лемма 6. *Для $n = 3, 4, \dots$ справедливо следующее тождество:*

$$F_1 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=n}\binom{i-1+n-j}{i-1}\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\frac{(1+y)^{n-j+i-1}(1+u)^{2j-2i}\left(1-u^4\right)}{y^i u^{j-i+2}(y-u)} = 0.$$

Доказательство. С помощью метода коэффициентов мы последовательно получаем

$$F_1 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=n}\binom{i-1+n-j}{i-1}\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\frac{(1+y)^{n-j+i-1}(1+u)^{2j-2i}\left(1-u^4\right)}{y^i u^{j-i+2}(y-u)} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\frac{(1+y)^{i-1}(1+u)^{2n-2i}\left(1-u^4\right)}{y^i u^{n-i+2}(y-u)} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\left[\frac{(1+y)^{i-1}(1+u)^{2(n-i)}\left(1-u^4\right)}{y^{i+1}u^{n-i+2}(1-u/y)}\right]_{|y|\gg|u|=\rho} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{2(n-i)}\left(1-u^4\right)}{u^{n-i+2}}\left\{\sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{y}\frac{(1+y)^{i-1}}{y^{i+1}}\left(1+\sum_{s=0}^{\infty}(u/y)^s\right)\right\}\right\} = 0$$

по определению оператора $\mathop{\mathbf{res}}_{u}$. $\square$

Лемма 7. *Для $n = 3, 4, \dots$ справедливо следующее тождество:*

$$\begin{aligned} T_3 = &-\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\sum_{s=0}^{j-i-3}\binom{i-1+n-j}{i-1}\binom{i-1+n-j}{s+i}\binom{2j-2i}{j-i-s-3}+\\ &+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}\sum_{s=0}^{j-i-1}\binom{i-1+n-j}{i-1}\binom{i-1+n-j}{s+i}\binom{2j-2i}{j-i-s+1} = \\ &= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i-1+n-j}{n-j}\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\frac{(1+y)^{n-j+i-1}(1+u)^{2j-2i}\left(1-u^4\right)}{y^i u^{j-i+2}(y-u)} \end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство леммы разобьем на ряд утверждений.

Лемма 8. *Пусть $|t| = \rho = 0,01, |u| = 10, |y| = 10^4$. Тогда*

$$T_3 = \mathop{\mathbf{res}}_{tyu}\left[\frac{t^{-n+1}(1+y)^n\left(1-u^4\right)}{(1-t)^2\left(y-\left(-1+t(1+u)^2/u\right)\right)yu^2(y-u)\left(y-t/(1-t)\right)}\right]_{|y|\gg|u|\gg|t|=\rho} = \tag{16}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \tag{17}$$

где интегралы

$$J_1 := \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{\left(1-u^4\right)}{t^n(1-t)u^2\left(u-t(1+u)^2\right)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}, \tag{18}$$

$$J_2 := \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{\left(1-u^4\right)(1+u)^{n-1}}{t^{n-1}(1-t)u^2(u-t(1+u))^2}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}, \tag{19}$$

$$J_3 := \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{1}{t^{n+1}u}\frac{\left(1-u^4\right)(1-t)^{-n-1}}{(u-t/(1-t))^2(u-(1-t)/t)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}, \tag{20}$$

$$J_4 := \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{\left(1-u^4\right)(1+u)^{2n-1}}{u^{n-1}(1-t)^2\left(u-t(1+u)^2\right)(u-t/(1-t))^2(u-(1-t)/t))}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$T_3 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{z}(1+z)^{i-1+n-j}z^{-n+j-1}\times\mathop{\mathbf{res}}_{yu}\left[\frac{(1+y)^{n-j+i-1}(1+u)^{2j-2i}\left(1-u^4\right)}{y^iu^{j-i+2}(y-u)}\right]_{|y|\gg|u|=\rho} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\{\mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\sum_{j=i}^{\infty}\left\{(1+z)^{i-1+n-j}z^{-n+j-1}\}\times\left[\frac{(1+y)^{n-j+i-1}(1+u)^{2j-2i}\left(1-u^4\right)}{y^iu^{j-i+2}(y-u)}\right]_{|y|\gg|u|=\rho}\right\} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\left\{(1+z)^{n-1}z^{-n+i-1}(1-z(1+u)^2/(1+z)(1+y)u)^{-1}\frac{(1+y)^{n-1}\left(1-u^4\right)}{y^iu^2(y-u)}\right\} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\left\{\sum_{i=2}^{\infty}(1+z)^nz^{-n+i-1}\frac{1}{(1+z)(1+y)u-z(1+u)^2}\times\frac{(1+y)^n\left(1-u^4\right)}{y^iu(y-u)}\right\} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\left\{\frac{(1+z)^nz^{-n+1}}{(1+z)(1+y)u-z(1+u)^2}\times\frac{(1+y)^n\left(1-u^4\right)}{y^2u(y-u)(1-z/y)}\right\} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\left[\frac{(1+z)^nz^{-n+1}(1+y)^n\left(1-u^4\right)}{((1+z)(1+y)u-z(1+u)^2)yu(y-u)(y-z)}\right]_{|y|\gg|u|\gg|z|=\rho}.$$

Если здесь сделать замену $t = z(1+z)^{-1} \in H_1$, $z = t(1-t)^{-1}$, $dz/dt = (1-t)^{-2}$, $y-z = y-t(1-t)^{-1}$, то

$$T_3 = \mathop{\mathbf{res}}_{zyu}\frac{(z/(1+z))^{-n+1}\left(1-u^4\right)(1+y)^n}{(u(1+y)-z(1+u)^2/(1+z))yu(y-u)(y-z)} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{tyu}\frac{t^{-n+1}\left(1-u^4\right)(1+y)^n}{(1-t)^2\left(u(1+y)-t(1+u)^2\right)yu(y-u)\left(y-t(1-t)^{-1}\right)} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{tyu}\frac{t^{-n+1}(1+y)^n\left(1-u^4\right)}{(1-t)^2\left(y-(-1+t(1+u)^2u^{-1})\right)yu^2(y-u)\left(y-t(1-t)^{-1}\right)}_{|y|\gg|u|\gg|t|=\rho} =$$

$$= \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left\{\frac{\left(1-u^4\right)}{t^{n-1}(1-t)^2u^2}\mathop{\mathbf{res}}_{y}\left[\frac{(1+y)^n}{(y-u)(y-t/(1-t))\left(y-(-1+t(1+u)^2u^{-1})\right)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}\right\}.$$

Вычислим последний интеграл по теореме о вычетах, в котором при выборе $|t| = \rho = 0,1$, $|u| = 10$, $|y| = 10^3$ мы имеем полюсы первого порядка в точках $y = 0, y = u$, $y = t/(1-t)$ и $y = -1 + t(1+u)^2u^{-1}$. Тогда

$$T_3 = \mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left\{\frac{\left(1-u^4\right)}{t^{n-1}(1-t)^2u^2}\times\left\{\left[\frac{(1+y)^n}{(y-u)\left(y-t(1-t)^{-1}\right)\left(y-(-1+t(1+u)^2u^{-1})\right)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho,y=0}\right.\right. +$$

$$+\left[\frac{(1+y)^n}{y\left(y-t\,(1-t)^{-1}\right)\left(y-(-1+t\,(1+u)^2\,u^{-1})\right)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho,y=u}+$$

$$+\left[\frac{(1+y)^n}{y(y-u)(y-(-1+t\,(1+u)^2\,u^{-1}))}\right]_{|u|\gg|t|=\rho,y=t(1-t)^{-1}}+$$

$$+\left[\frac{(1+y)^n}{y(y-u)\left(y-t\,(1-t)^{-1}\right)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho,y=-1+t(1+u)^2u^{-1})}+$$

$$=\mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left\{\frac{\left(1-u^4\right)}{t^{n-1}\,(1-t)^2\,u^2}\left\{\left[\frac{1-t}{t(u-t\,(1+u)^2)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}+\right.\right.$$

$$+\left[\frac{(1-t)\,(1+u)^n}{(u\,(1-t)-t)\,(u^2+u-t\,(1+u)^2)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}+$$

$$+\left[\frac{u\,(1-t)^{3-n}}{t(t-u\,(1-t))(ut+(1-t)\,u-(1-t)\,t\,(1+u)^2)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}+$$

$$\left.\left.+\left[\frac{(1-t)\,u^3\left(t\,(1+u)^2\,u^{-1}\right)^n}{(-u+t\,(1+u)^2)(-u+t\,(1+u)^2-u^2)(-(1-t)\,u+(1-t)\,t\,(1+u)^2-ut)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}\right\}\right\}$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

□

Лемма 9. *При $|u|\gg|t|=\rho$ справедливо следующее равенство:*

$$J_1=\mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{\left(1-u^4\right)}{(1-t)\,t^nu^2(u-t\,(1+u)^2)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}=0. \tag{22}$$

Доказательство. Так как $|t|=\rho=0,01$, $|u|=10$ и $\left|t\,(1+u)^2\,/u\right|<1$, то вычисление вычетов по u и t проводится с использованием метода коэффициентов, аналогично тому, как это сделано в лемме 7. □

Лемма 10. *При $|u|\gg|t|=\rho$ для $n=3,4,\ldots$ справедливо следующее равенство:*

$$J_2=\mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{t^{-n+1}\left(1-u^4\right)(1+u)^n}{(1-t)\,u^2\,(u\,(1-t)-t)\,(u^2+u-t\,(1+u)^2)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}$$

$$=(n-1)-\frac{2}{n}\binom{2n}{n-2}. \tag{23}$$

Доказательство проводится аналогично лемме 8.

$$J_3=\mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{1}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}}\frac{\left(1-u^4\right)}{u(u-t/\,(1-t))^2(u-(1-t)\,/t)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho},$$

$$J_4=\mathop{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{\left(1-u^4\right)(1+u)^{2n-1}}{u^{n-1}\,(1-t)^2\,(u-t\,(1+u)^2)(u-t/\,(1-t))^2(u-(1-t)\,/t))}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}. \tag{24}$$

$\square$

Лемма 11. *При $n=3,4,\ldots$ и выполнении условий $|u|\gg|t|=\rho$ справедливо следующее равенство:*

$$J_3=\underset{tu}{\mathbf{res}}\left[\frac{1}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}}\frac{\left(1-u^4\right)}{u(u-t/\,(1-t))^2(u-(1-t)\,/t)}\right]_{|u|\gg|t|=\rho}=$$

$$=2^{2n-1}-\binom{2n}{n+1}-\binom{2n+1}{n}+\binom{2n}{n}. \qquad (25)$$

Доказательство. Поскольку $|t|=\rho_1=0,01, |u|=\rho_2=10$ и $|t/\,(1-t)|<1<\rho_2$, $|(1-t)/t|\approx 100>10=\rho_2$, то вычислим последний интеграл как вычет по u в точках $u=0,\ u=t/\,(1-t)$, исключая точку $u=(1-t)\,/t$, получаем

$$J_3=\underset{t}{\mathbf{res}}\left\{\frac{1}{t^{n+1}\,(1-t)^{n+1}}\left(\left[\frac{\left(1-u^4\right)}{(u-t/\,(1-t))^2(u-(1-t)\,/t)}\right]_{u=0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d}{du}\left[\frac{\left(1-u^4\right)}{u(u-(1-t)\,/t)}\right]_{u=t/(1-t)}\right)\right\}+$$

$$=\underset{t}{\mathbf{res}}\left\{\frac{1}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}}\times\frac{1}{(-t/\,(1-t))^2(-(1-t)\,/t)}\right\}+$$

$$+\underset{t}{\mathbf{res}}\left\{\frac{1}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}}[\frac{-4u^3}{u(u-(1-t)\,/t)}-\frac{\left(1-u^4\right)(2u-(1-t)\,/t)}{u^2(u-(1-t)\,/t)^2}]_{u=t/(1-t)}\right\}.$$

Так как

$$[\left(1-u^4\right)]_{u=t/(1-t)}=[\left(1-u^2\right)\left(1+u^2\right)]_{u=t/(1-t)}=(1-2t)\,(2t^2-2t+1)/\,(1-t)^4\,,$$

то

$$J_3=-\underset{t}{\mathbf{res}}\,\frac{(1-t)^{-n}}{t^{n+2}}-\mathbf{res}_t\frac{4\,(t/1-t)^2}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}(t/\,(1-t)-(1-t)\,/t)}-$$

$$-\underset{t}{\mathbf{res}}\{\frac{1}{(1-t)^{n+1}\,t^{n+1}}\frac{(1-2t)\,(2t^2-2t+1)\,(2t/(1-t)-(1-t)\,/t)}{(1-t)^4\,(t/1-t)^2((t/1-t)-(1-t)\,/t)^2}\}=$$

$$=-\binom{2n}{n+1}+\underset{t}{\mathbf{res}}\,\frac{2t^4-2t^3+5t^2-4t+1}{(1-t)^{n+2}\,t^{n+2}(1-2t)}.$$

Таким образом,

$$J_3=-\binom{2n}{n+1}+\underset{t}{\mathbf{res}}\,\frac{2t^4-2t^3+5t^2-4t+1}{(1-t)^{n+2}\,t^{n+2}(1-2t)}. \qquad (26)$$

Если под знаком интеграла (26) сделать замену $t=(1-(1-4w)^{1/2})/2\in H_1$, то

$$w=t\,(1-t)\in H_1,\quad t=(1-(1-4w)^{1/2})/2\in H_1,\quad 1-2t=(1-4w)^{1/2}\,,$$

$$dt/dw=(1-4w)^{-1/2}\,,\quad (1-4w)^{1/2}=-2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}w^{s+1}\,,$$

что в результате простых вычислений приводит к следующему выражению для J_3:

$$J_3 = -\binom{2n}{n+1} + \operatorname*{\mathbf{res}}_{t}\left[\frac{2t^4-2t^3+5t^2-4t+1}{(1-t)^{n+2}\,t^{n+2}(1-2t)}\right]_{t=(1-(1-4w)^{1/2})/2} =$$

$$= -\binom{2n}{n+1} + \operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{1+10\,(1-4w)-2\,(1-4w)^{1/2}-2\,(1-4w)^{3/2}+(1-4w)^2}{8\,(1-4w)}$$

$$= -\binom{2n}{n+1} + \frac{1}{8}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{1}{(1-4w)\,w^{n+2}} + \frac{5}{4}res_w\frac{1}{w^{n+2}}$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{-1/2}}{w^{n+2}} - \frac{1}{4}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{1/2}}{w^{n+2}} + \operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)}{w^{n+2}}$$

$$= -\binom{2n}{n+1} + \frac{1}{8}4^{n+1} + 0 - \frac{1}{4}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{-1/2}\,(1+(1-4w))}{w^{n+2}} + 0$$

$$= -\binom{2n}{n+1} + 2^{2n-1} - \frac{1}{4}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{-1/2}\,(2-4w)}{w^{n+2}}$$

$$= -\binom{2n}{n+1} + 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{-1/2}}{w^{n+2}} + \operatorname*{\mathbf{res}}_{w}\frac{(1-4w)^{-1/2}}{w^{n+1}}. \qquad (27)$$

Используя хорошо известное разложение $(1-4w)^{1/2} = -2\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}w^{s+1}$ для (27), мы получаем

$$J_3 = -\binom{2n}{n+1} + 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n}{n} = 2^{2n-1} - \binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n} + \binom{2n}{n}.$$

□

Лемма 12. *Справедливо следующее равенство:*

$$J_4 = \operatorname*{\mathbf{res}}_{tu}\left[\frac{(1-u^4)\,(1+u)^{2n-1}}{u^{n-1}\,(1-t)^2\,(u-t\,(1+u)^2)(u-t/\,(1-t))^2(u-(1-t)\,/t))}\right]_{|u|\gg|t|=\rho} = 0. \qquad (28)$$

Доказательство. Положим

$$J_4 = \operatorname*{\mathbf{res}}_{u}\left\{\frac{(1-u^4)\,(1+u)^{2n-6}}{u^{n-1}} \times \operatorname*{\mathbf{res}}_{t}\frac{t}{(t-u/\,(1+u)^2)\,(t-1/\,(1+u))(t-u/\,(1+u))^2}\right\},$$

где $|u|\gg|t|=\rho$. Если теперь в соответствии с условием $|u|\gg|t|=\rho$ положить, например, $|t|=\rho_1=0,01,\ |u|=\rho_2=10$ и $\left|u/\,(1+u)^2\right|\approx 10\gg\rho_1=0,01$, $|u/\,(1+u)|\approx 1\gg\rho_1=0,01$, $|1/\,(1+u)|\approx 0,1\gg\rho_1=0,01$, то подынтегральная функция по переменной t в интеграле (20) не имеет особенностей внутри области $|t|=\rho_1=0,01$, и потому интеграл (28) равен нулю. □

Замечание. *Вычисление сумм для J_1, J_2 J_3 в замкнутом виде было проведено выше с помощью соответствующих теорем о вычетах, а их результаты получили подтверждение при численной проверке. Две из них были вычислены с помощью известной теоремы о вычетах, в то время как интегралы $J_1 = J_4 = 0$ тривиально поддались вычислению по теореме о полной сумме вычетов, поскольку соответствующий вычет в бесконечно удаленной точке равнялся нулю.*

Из формул (22) – (25) и (28) немедленно вытекает следующая формула для $T_3 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$.
Лемма 13. *Для $n = 3, 4, \ldots$ справедливо следующее тождество:*

$$T_3 = 2^{2n-1} + (n-1) - \frac{2}{n}\binom{2n}{n-2} - \binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n} + \binom{2n}{n}. \tag{29}$$

Из формул (7), (14) и (29) вытекает справедливость основной теоремы.

В результате, используя основную теорему, мы получаем общую формулу (2) для перечисления $\mathcal{D}$-инвариантных идеалов кольца $R_n(K, J)$.
Замечание. *Упрощения формул обычно дает новую информацию о структуре объектов перечисления. Например, упрощение известных формул для $R_q^{(3)}(n)$ позволило Г.П. Егорычеву лучше понять структуру множества перечисляемых правильных слов (коммутаторов) и затем решить проблему Каргаполова о вычислении рангов факторов $R_q^{(k)}(n)$ нижнего центрального k-ступенио разрешимого ряда свободной разрешимой группы с q образующими для произвольных k [2]. Это дало возможность ему и другим авторам в дальнейшем решить аналогичную задачу для свободной полинильпотентной группы и для свободных групп многообразий. Другой ответ на проблему Каргополова был предложен в [13].*

Вычисление в замкнутом виде и простота формул суммирования (1) и (2) позволяют поставить следующую проблему: *дать независимое графовое доказательство и алгебраическую интерпретацию формулы (1) для числа всех множеств углов $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ степени n с $i > j$ для всех $(i, j) \in \mathcal{L}$.*

Выражаю признательность профессору Г.П.Егорычеву и профессору В.М.Левчуку за ряд полезных замечаний при подготовки этой статьи к печати.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00717).

Список литературы

[1] В.М.Левчук, Подгруппы унитреугольных групп, *Известия АН СССР, Сер. матем.*, **38**(1974), №6, 1202-1220.

[2] Г.П.Егорычев, Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм, Новосибирск, Наука, (1977); English: Transl. of Math. Monographs **59**, *AMS*, 1984, 2-nd Ed. in 1989.

[3] B.A.Tolasov, The number of normal subgroups of triangular group that are contained in the unitriangular subgroup, *Algebra and Number Theory. Nalchik: Kabardino-Balkarsk. Gos. Univ.*, **2**(1977), 122–126.

[4] В.М.Левчук, Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами, *Алгебра и логика*, **5**(1976), 348–360.

[5] R.Dubish, S.Perlis, On total nilpotent algebras, *Amer. J. Math.* **73**(1951), №3, 439–452.

[6] G.P.Egorychev, V.M.Levchuk, Enumeration of characteristic subgroups of unipotent Lie-type groups. Algebra. *Ed.: Yu.L.Ershov, E.I.Khukhro, V.M.Levchuk, N.D.Podufalov, Walter de Gruyter: Berlin–New York*, 1996, 49–62.

[7] Г.П.Егорычев, В.М.Левчук, Перечислительные проблемы для групп и алгебр типа Ли, *Докл. РАН*, **330**(1993), 464–467.

[8] G.P.Egorychev, V.M.Levchuk, Enumeration in the Chevalley algebras, *ACM SIGSAM Bulletin*, **35**(2001), 20–34.

[9] F.Kuzucuoglu, V.M.Levchuk, Ideals of some matrix rings, *Commun. in Algebra*, 28(**7**), (2000), 3503-3513.

[10] В.М.Левчук, Г.С.Сулейманова, Нормальное строение присоединенной группы в радикальных кольцах $R_n(K, J)$, *Сиб. матем. журн.*, **43**(2002), №2, 519–537.

[11] М.Н.Давлетшин, Г.П.Егорычев, В.М.Левчук, Комбинаторная формула для D-инвариантных идеалов кольца $R_n(K, J)$, Материалы Всероссийской конференции Алгебра, логика и методика обучения математике, Красноярск, Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П.Астафьева, 2010, 23–32.

[12] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп), 14-е изд., Новосибирск, ИМ СО РАН, 1999.

[13] V.M.Petrogradsky, Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle, *Intern. J. Algebra Comput.*, **9**(1999), 179–212.

Enumeration of $\mathcal{D}$-invariant Ideals of the Ring $\mathbf{R_n(K, J)}$

Maxim N. Davletshin

Let K be a local ring of the main ideal with a nilpotent maximal ideal J. The paper is devoted to finished of solution of problem enumeration of ideals of the ring K of $n \times n$ matrices with coefficients of J on the main diagonal and above it.

Keywords: combinatorial identities, method of coefficients, enumeration of lattice, ring theory.