

УДК 517.55

Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М.А.Гольдштика

Исаак И. Вайнштейн*

Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.01.2011, окончательный вариант 25.02.2011, принята к печати 10.03.2011

Сформулирована общая задача о движении идеальной несжимаемой жидкости с вихревыми зонами с различными постоянными завихренностями. Рассмотрен вариационный подход М.А.Гольдштика к исследованию дуальных задач для течений с вихревыми и потенциальными зонами, описывающих модель отрывных течений и модель движения идеальной жидкости в поле кориолисовых сил. Доказано существование второго нетривиального решения в задаче М.А.Гольдштика.

Ключевые слова: вихревые и потенциальные течения, вариационный метод, функция Грина, экстремум функционала.

1. Общая постановка задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости с вихревыми зонами с постоянными завихренностями

Исследованию вихревых течений несжимаемой жидкости посвящено большое количество работ и монографий. Эта тема представлена в каждом курсе гидромеханики. Основопологающей для данной работы является монография М.А.Гольдштика "Вихревые потоки" [1]. В ней изучаются вихревые потоки с зонами, ограниченные одной и той же "нулевой" линией тока, внутри которой движение происходит по замкнутым траекториям, тогда как внешний поток может быть потенциальным. Там же указаны различные примеры таких потоков в природе и технике, приведено исследование задач, представляющих значительный научный и практический интерес. Это течения за плохобтекаемыми телами, отрывные течения. Техническим применением вращающихся потоков служит поле центробежных ускорений. К числу таких устройств относятся всевозможные сепараторы, сушилки, камеры сгорания, циклоны — пылеуловители, вихревые ядерные реакторы и др.

Стационарное вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в плоском случае описывается уравнением

$$\Delta\Psi = F(\Psi),$$

где завихренность $\omega = F(\Psi)$ — произвольная функция от функции тока Ψ , $v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$. Сама завихренность удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial\omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\Delta\omega,$$

*isvain@mail.ru

ν — кинематическая вязкость [1]. В стационарном случае уравнение для завихренности не содержит величину ω . Для этого случая справедлив двусторонний принцип максимума для величины ω . Это позволяет обосновать предположение о постоянстве завихренности (этот случай рассматривается в работе) для предельного стационарного движения вязкой жидкости в области, ограниченной замкнутой линией тока, когда вязкость ν стремится к нулю [1–3].

Это приводит к рассмотрению класса течений, в которых имеются зоны с замкнутыми линиями тока с различными постоянными завихренностями. Можно даже предположить, что количество таких зон бесконечно. Величины завихренностей могут быть произвольного знака и могут равняться нулю. В последнем случае течение в зоне потенциально.

Таким образом, приходим к постановке задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости с кусочно-постоянными завихренностями, обожающей рассмотренные ниже задачи (1), (3) и (2), (3). Заданы завихренности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и D — область течения с границей Γ (область D может быть неограниченной). Требуется построить зоны течения B_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), $\bigcup B_i = D$ и найти в области D непрерывно дифференцируемую функцию тока $\Psi(x, y)$, которая в каждой зоне B_i удовлетворяет уравнению $\Delta\Psi = \omega_i$. На границе Γ области течения D функция $\Psi(x, y) = \varphi(s)$, а на границах каждой зоны B_i функция $\Psi(x, y)$ равняется одной и той же постоянной.

Чтобы получить полное исследование возможных течений, в постановку задачи стоит включить возможность произвольно изменять значения завихренностей на нулевое значение, чтобы допустить существования зон с потенциальным течением.

Рассматриваемые в работе уравнения (1), (2) задают течения с двумя зонами, в одной из которых завихренность ненулевая, а в другой — равняется нулю. На границах зон функция тока равняется нулю. Это приводит к двум дуальным задачам о склейке вихревых и потенциальных течений [1, 4–6]. Условия на знак функции тока ограничивают класс возможных течений.

Примером течения с потенциальной зоной и двумя вихревыми может служить обтекание прямоугольной траншеи. Как указано в монографии М.А. Лаврентьева, Б.В. Шабата [7], течение может распасться на три зоны. В первой, расположенной над траншеей, движение потенциально. В двух других, расположенных в траншее друг над другом, движение имеет постоянные завихренности: $-\omega$ в верхней и ω в нижней. В работе [8] рассмотрен случай поставленной задачи для двух вихревых зон с завихренностями ω_1 и $-\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — неотрицательные постоянные:

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \omega_1, & \text{если } \Psi < 0, \\ -\omega_2, & \text{если } \Psi > 0, \end{cases}$$

$$\Psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0,$$

и получены условия существования таких течений.

2. Дуальные задачи о склейке вихревых и потенциальных течений. Вариационный подход М.А.Гольдштика

В теории вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости известны две дуальные задачи: в ограниченной плоской области D с границей Γ требуется найти непрерывно дифференцируемые решения уравнений

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \Psi < 0, \\ 0, & \text{если } \Psi > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

при краевом условии

$$\Psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0, \quad \omega(\text{завихренность}) > 0, \quad (3)$$

где $\Psi(x, y)$ — функция тока [1, 6, 7, 8]. Здесь и в дальнейшем предполагается, что граница Γ кусочно-гладкая, а функция $\varphi(s)$ такая, что существует гармоническая в области D функция, принимающая на границе значение $\varphi(s)$.

Задача (1), (3) описывает схему М.А. Лаврентьева отрывных течений, согласно которой зона отрыва отделена от внешнего потока нулевой линией тока. Внутри зоны течение полагается вихревым с постоянной завихренностью ω . Вне зоны течение является потенциальным [1, 4].

Задача (2), (3) описывает модель плоского движения идеальной жидкости в поле кориолисовых сил [1, 5, 6].

Обозначим через $\Psi_0(x, y)$ гармоническую функцию, удовлетворяющую условию (3). Она положительна в области D и является решением задачи (1), (3). Это решение назовем тривиальным. В [4] доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (1),(3) при достаточно большом значении величины ω . В [6, 8] получено неравенство

$$\omega > \frac{4Ce}{R^2}, \quad C = \max \varphi(s), \quad (4)$$

при котором существует нетривиальное решение задачи, где R — радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D .

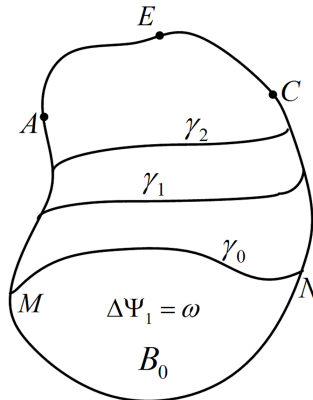


Рис. 1. Схема области течения

Приведем схему доказательства М.А.Гольдштика [1, 4] существования нетривиального решения. Пусть $\varphi(s)$ отличается от нуля лишь на AEC границы Γ (рис.1). Случай $\varphi(s) > 0$ на всей границе Γ не исключается. Проводится гладкая дуга γ_0 , пересекающая AEC и ограничивающая вместе с частью Γ область B_0 . Строится функция

$$\Psi_1(x, y) = \Psi_0(x, y) - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{B_0} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5)$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина оператора Лапласа задачи Дирихле для области D . Величина ω удовлетворяет неравенству

$$\omega > \frac{\Psi_0}{\frac{1}{2\pi} \iint_{B_0} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (6)$$

для всех точек кривой γ_0 . Тогда функция $\Psi_1(x, y)$ отрицательна на γ_0 , и так как в силу краевого условия $\Psi_1 > 0$ вблизи AEC , то существует кривая γ_1 (линия уровня гармонической функции), на которой $\Psi_1 = 0$. Кривая γ_1 лежит вне B_0 и концами упирается в дуги AM и CN границы Γ . Далее определяется функция

$$\Psi_2(x, y) = \Psi_0(x, y) - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{B_1} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где B_1 — область отрицательности функции Ψ_1 , $B_1 \supset B_0$. На кривой γ_1 (кроме ее концов) $\Psi_2 < 0$. Аналогично предыдущему определяется кривая γ_2 и область $B_2 \supset B_1$. Продолжая этот процесс, строится последовательность функций

$$\Psi_n(x, y) = \Psi_0(x, y) - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{B_{n-1}} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (7)$$

и областей B_n , $B_n \supset B_{n-1}$. Доказываем, что последовательность функций Ψ_n сходится к решению задачи (1), (3).

Если записать уравнение (1) в виде

$$\Delta\Psi = \frac{\omega}{2}(1 - \text{sign}\Psi),$$

то предложенный в [1, 4] метод нахождения нетривиального решения можно записать как итерационную схему

$$\Delta\Psi_n = \frac{\omega}{2}(1 - \text{sign}\Psi_{n-1}), \quad \Psi_n|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad (8)$$

где Ψ_1 задается формулой (5).

При построении модели идеальной жидкости в поле кориолисовых сил для задачи (2), (3) требуется выполнение неравенства [1, 5]

$$\omega > \min_D \frac{2\pi\psi_0}{\iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta} = L. \quad (9)$$

Область D разбивается на две зоны: проточную, где $\Psi > 0$, и непроточную, где жидкость покоится ($\Psi \equiv 0$). В случае $\omega < L$ непроточная зона отсутствует. Этот случай можно считать тривиальным. В [1, 5] доказано существование и единственность решения задачи (2), (3).

Схема доказательства решения задачи состоит в аппроксимации задачи с разрывной нелинейностью последовательностью нелинейных задач с непрерывной нелинейностью в правой части уравнения.

$$\Delta\Psi_n = \omega \text{th}(\Psi_n n), \quad \Psi_n|_{\Gamma} = \varphi(s).$$

Доказывается существование решения Ψ_n при каждом n и сходимости последовательности Ψ_n к решению задачи (2), (3).

В модельной задаче, если область D — круг радиуса R и $\varphi(s) = C$, при выполнении неравенства (4) задача (1), (3) имеет два нетривиальных решения, в случае равенства — одно, при $\omega < 4Ce/R^2$ нетривиальных решений нет [1]. Решения выписываются в явном виде. Для области D , мало отличающейся от круга и граничной функции — от постоянной, в [1, 9] доказано существование двух нетривиальных решений.

Отличие в свойствах решений дуальных задач можно объяснить разным поведением правых частей уравнений (1), (2). В уравнении (1) правая часть не убывает, а в (2) — не возрастает по Ψ .

Доказательство существования нетривиального решения задачи (1), (3) имеется еще в работах [10–13]. Задачи (1), (3) и (2), (3) для произвольной завихренности $\omega = F(\Psi)$ рассмотрены в [14–16], в которых на модельных примерах при завихренности $\omega = e^{\lambda\Psi}$ установлен эффект увеличения количества решений по сравнению с задачами с постоянной завихренностью. Задача о склейке вихревых и потенциальных течений в неограниченной области рассматривалась в [17–19]. В [19] изучен общий случай завихренности $\omega = F(\Psi)$. В [6, 20] рассмотрен аналог задачи (1), (3) по склейке вихревых и потенциальных осесимметрических течений.

Следует отметить, что задачи о количестве нетривиальных решений, свойствах линии раздела зон в общем случае задачи (1), (3) до настоящего времени остаются нерешенными. В монографиях [1, 7] отдельно отмечается важность решения этих задач.

Для изучения вопроса о количестве решений для общего случая задачи (1), (2) М.А.Гольдштик предложил вариационную формулировку задачи [1]. Рассматривается функционал

$$I(B) = \iint_D (\nabla\Psi)^2 dx dy + 2\omega \iint_B \Psi dx dy, \quad (10)$$

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(x, y) - \frac{\omega}{2\pi} \iint_B G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (11)$$

Он задан на совокупности всевозможных замкнутых множеств $B \subset D$ и преобразуется к виду

$$I(B) = \int_{\Gamma} \Psi_0 \frac{\partial\Psi_0}{\partial n} ds + \omega \iint_B (\Psi + \Psi_0) dx dy. \quad (12)$$

Здесь требуется существование первого интеграла в (12). Выводится формула приращения функционала

$$\Delta I = 2\omega \iint_{\Delta} \Psi dx dy - (2\pi)^{-1} \omega^2 \iint_{\Delta} dx dy \iint_{\Delta} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (13)$$

где Δ — приращение области B .

С помощью формулы (13) доказывается, что если на множестве B реализуется экстремум функционала, то на границе γ множества B функция Ψ обращается в нуль. Далее $I(B)$ непрерывен и ограничен сверху и снизу. Доказывается, что нетривиальное решение задачи, полученное в [1] методом итераций (8), реализует минимум функционала. Область B , в которой решение меньше нуля, получена расширением областей B_n , на границе каждой из которых $\Psi_n \leq 0$, и положительные вариации уменьшают функционал. Особо отмечается, что если на некотором множестве реализуется максимум $I(B)$, то оно не содержит внутренних точек, поскольку выбрасывание из B достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , в которой $\Psi < 0$, увеличивает функционал. М.А.Гольдштик здесь остановился и для доказательства второго нетривиального решения предложил искать условно критические точки функционала.

Цель данной работы — распространить вариационный подход, предложенный М.А.Гольдштиком к задаче (1), (3), на дуальные задачи (1), (3) и (2), (3).

3. Решение модельных дуальных задач вариационным методом

Вначале рассмотрим модельные дуальные задачи (1), (3) и (2), (3), если область D — круг радиусом R с центром в начале координат и граничная функция $\varphi(s) = C$. Ищем решения

задач, зависящие только от r .

Рассмотрим задачу (1), (3) и функционал (12) на функциях

$$\Psi(x, y) = C - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{B_a} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (14)$$

где B_a — круг радиусом a с центром в начале координат, $0 \leq a \leq R$. Тогда

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\omega}{4}(r^2 - a^2) + \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C, & \text{если } r \leq a, \\ \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{r}{R} + C, & \text{если } a \leq r \leq R. \end{cases} \quad (15)$$

Функция (15) непрерывно дифференцируема. Удовлетворяя условию $\Psi = 0$ при $r = a$, получаем уравнение для определения величины a :

$$\frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C = 0. \quad (16)$$

Введем функцию

$$y(a) = \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C, \quad (17)$$

доопределив ее в нуле ее предельным значением C . Тогда

$$y(0) = y(R) = C > 0, \quad y'(a) = \omega a \ln \frac{a}{R} + \frac{\omega a}{2}.$$

Производная функции $y(a)$ на интервале $(0, R)$ обращается в нуль в одной точке $a^* = R/\sqrt{2}$.

При выполнении неравенства $y(a^*) = -\frac{\omega R^2}{4e} + C < 0$ ($\omega > \frac{4Ce}{R^2}$) уравнение (16), учитывая $y(0) = y(R) = C > 0$, имеет два решения a_1, a_2 , $0 < a_1 < a_2 < R$. При увеличении ω величина a_1 стремится к нулю, a_2 — к R . Таким образом, при выполнении неравенства

$$\omega > \frac{4Ce}{R^2}$$

модельная задача (1), (3) имеет два нетривиальных решения, в случае равенства — одно.

Вернемся к функционалу (12). После непосредственного интегрирования ($\Psi_0 = C$) получим

$$I(a) = \int_D \Psi_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} ds + \omega \int_{B_a} (\Psi + \Psi_0) dz = 2\pi\omega a^2 \left(\frac{\omega a^2}{4} \ln \frac{a}{R} - \frac{\omega a^2}{16} + C \right). \quad (18)$$

Исследуем функционал $I(a)$. Имеем $I(0) = 0$, $I(R) = 2\pi\omega R^2 \left(C - \frac{\omega R^2}{16} \right)$. Из (18) следует, что для каждого фиксированного ω имеется окрестность $a > 0$, в которой $I(a) > 0$. Приравняем к нулю первую производную:

$$I'(a) = 2\pi\omega a \left(\frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C \right) = 2\pi\omega a y(a) = 0. \quad (19)$$

Полученное уравнение при $a \neq 0$ совпадает с уравнением (16) для нахождения величины a при непосредственном решении задачи. Если выполняется неравенство (4), уравнение (19) имеет два решения a_1, a_2 ($a_1 < a_2$). В случае $a = 0$ имеем тривиальное решение.

Так как в некоторой окрестности $a > 0$ функционал $I(a) > 0$, то в точке a_1 он имеет абсолютный положительный максимум $I(a_1) > 0$, а в a_2 — минимум. Пусть выполняется неравенство

$$\omega > \frac{16C}{R^2}, \quad (20)$$

тогда $I(R) < 0$ и условие (4) выполняется. В точке a_1 у функционала абсолютный максимум, в точке a_2 — абсолютный минимум $I(a_2) < I(R) < 0$.

Таким образом, если ищем экстремум функционала на множестве кругов $r \leq a \leq R$, то при выполнении неравенства (4) у функционала имеется два экстремума: абсолютный максимум при $a = a_1$, минимум при $a = a_2$. Функция (15) при подстановке a_1 и a_2 дает два нетривиальных решения модельной задачи (1), (3). В случае равенства в (4) у функционала один экстремум, и задача имеет одно нетривиальное решение.

Рассмотрим задачу (2), (3) и функционал (12) на функциях

$$\Psi(x, y) = C - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{B_a} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (21)$$

где B_a — кольцо $a \leq r \leq R$. В этом случае

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\omega}{4}(a^2 - R^2) - \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C, & \text{если } r \leq a, \\ \frac{\omega}{4}(r^2 - R^2) - \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{r}{R} + C, & \text{если } a \leq r \leq R. \end{cases} \quad (22)$$

Функция (22) непрерывно дифференцируема. Удовлетворяя условию $\Psi = 0$ при $r = a$, получаем уравнение для определения величины a :

$$\frac{\omega}{4}(a^2 - R^2) - \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C = 0. \quad (23)$$

Исследуем уравнение (23). Введем функцию

$$y_1(a) = \frac{\omega}{4}(a^2 - R^2) - \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C, \quad (24)$$

доопределив ее в нуле ее предельным значением. Имеем

$$y_1(0) = C - \frac{\omega R^2}{4}, \quad y_1(R) = C > 0, \quad y_1'(a) = -\omega a \ln \frac{a}{R} > 0. \quad (25)$$

Функция $y_1(a)$ возрастает и, как следует из (24), при выполнении неравенства

$$\omega > \frac{4C}{R^2} \quad (26)$$

имеет единственный корень a^* на промежутке $[0, R]$ (функция $y_1(a)$ на концах отрезка $[0, R]$ имеет разные знаки).

Таким образом, задача (2), (3) в случае круга и $\varphi(s) = C$ при выполнении неравенства (26) имеет единственное решение (22), где $a = a^*$ — корень уравнения (23).

Вернемся к функционалу (12). После непосредственного интегрирования ($\Psi_0 = C$) получаем

$$I(a) = 2\pi\omega(C(R^2 - a^2) + \frac{\omega a^4}{4} \ln \frac{a}{R} + \frac{\omega R^2 a^2}{4} - \frac{\omega R^4}{16} - \frac{3\omega a^4}{16}). \quad (27)$$

Исследуем функционал $I(a)$. Имеем $I(0) = 2\pi\omega R^2(C - \frac{\omega R^2}{16})$, $I(R) = 0$. Приравниваем к нулю его первую производную:

$$I'(a) = -4\pi\omega a(\frac{\omega}{4}(a^2 - R^2) - \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C) = -4\pi\omega a y_1(a) = 0. \quad (28)$$

Полученное уравнение при $a \neq 0$ совпадает с уравнением (23) для нахождения величины a при непосредственном решении задачи. При выполнении неравенства (26) оно имеет одно решение a^* . При переходе через точку a^* функция $y_1(a)$ меняет знак с минуса на плюс. В соответствии с (28) производная функционала меняет знак с плюса на минус. В точке a^* имеем максимум. Других точек экстремума нет. При выполнении неравенства (26) $I(0) < 0$. А так как экстремум только один, то $I(a^*) > 0$. У функционала абсолютный максимум.

Таким образом, если ищем экстремум функционала на множестве колец, примыкающих к границе круга, то у функционала при выполнении неравенства (26) имеется только один экстремум (абсолютный максимум) при $a = a^*$. Функция (22) при $a = a^*$ реализует его экстремум и является решением модельной задачи (2), (3).

4. Исследование дуальных задач в общем случае

Вернемся к общему случаю вариационной постановки задачи (1), (2). Пусть экстремум функционала достигается на области D . Покажем, что в этом случае минимума быть не может. Возьмем на границе Γ точку M_0 , в которой $\Psi > 0$. Пусть $K(M_0, \rho)$ — круг радиусом ρ с центром в точке M_0 . Радиус ρ выбран так, чтобы в $\Delta = D \cap K(M_0, \rho)$ функция Ψ вида (11) была больше нуля ($\text{mes } \Delta \neq 0$). Рассмотрим приращение функционала $\Delta I = I(D \setminus \Delta) - I(D)$. Учитывая, что на Δ функция Ψ больше нуля, выбираем ρ (вместе с ним и $\text{mes } \Delta$) достаточно малым, чтобы в соответствии с (13) ΔI было меньше нуля. Это означает, что выбрасывание Δ из области D уменьшает функционал.

Рассмотрим возможность максимума. Пусть $\Psi > 0$ во всех точках области D . В этом случае функция Ψ не может быть решением задачи (1), (3). Пусть ω удовлетворяет неравенству (9). Тогда в области D найдутся точки, в которых функция Ψ меньше нуля. Следовательно, Ψ не может быть решением как задачи (1), (3), так и задачи (2), (3).

Оценим величину L . Пусть R — радиус наибольшего по площади круга C_R , который можно вписать в область D (можно считать, что его центр находится в начале координат) и G_R — функция Грина оператора Лапласа для круга C_R задачи Дирихле. Рассмотрим функцию

$$W = \frac{\omega}{2\pi} \iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{C_R} G_R(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Она гармоническая внутри круга C_R и на его границе $W \geq 0$. Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что $W > 0$ внутри C_R . Таким образом, в C_R

$$\frac{\omega}{2\pi} \iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta > \frac{\omega}{2\pi} \iint_{C_R} G_R(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (29)$$

Из представления (11) функции Ψ и неравенства (29) в C_R

$$\Psi \leq U = C - \frac{\omega}{2\pi} \iint_{C_R} G_R(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad C = \max \varphi(s). \quad (30)$$

Функция U в круге C_R удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = \omega$ и на его границе равняется константе $C > 0$. Это дает возможность выписать ее в явном виде:

$$U = C + \frac{\omega}{4} (r^2 - R^2), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Если

$$\omega > L = \frac{4C}{R^2}, \quad (31)$$

то $U \leq 0$ в C_{R_1} , $R_1 = \sqrt{R^2 - 4C/\omega}$. Отсюда и из (30) ($\Psi \leq U$) следует, что $\Psi \leq 0$ в C_{R_1} .

Таким образом, получили в отличие от труднопроверяемого условия (9) простое условие (31) на величину ω , при котором следует рассматривать дуальную задачу (2), (3). Неравенство (29) справедливо для любого круга $C_R \subset D$. Но в этом случае оценка величины ω увеличится.

Рассмотрим утверждение М.А.Гольдштика: если некоторое множество B^* реализует экстремум функционала, то на его границе $\Psi = 0$. Для точек границы, лежащих внутри области D , доказательство справедливо. Но не исключена возможность ненулевого пересечения границ B^* и D , содержащего точки, в которых $\varphi > 0$. В этом случае B^* не дает минимум функционалу (доказывается аналогично случаю $B^* = D$). Функция Ψ не является решением задачи (1), (2). Пусть на B^* максимум, и во всех точках B^* $\varphi > 0$. Тогда функция Ψ является решением задачи (2), (3). Если в некоторой точке $\Psi < 0$, то, выбрасывая из B^* достаточно малую окрестность точки, в которой $\Psi < 0$, мы увеличиваем функционал.

Значит, если не накладывать дополнительных условий при вариационной постановке, экстремумы функционала могут не дать решения рассматриваемых задач. Так как на границе Γ функция $\varphi \geq 0$, то область B , при которой достигается экстремум функционала и которая дает решение задачи (1), (3), не должна примыкать к точкам границы Γ , в которых $\varphi > 0$ в отличие от решения задачи (2), (3).

Пусть $\varphi > 0$ всюду на Γ . Тогда область B отрицательности решения задачи (1), (3) должна строго находиться внутри области D . Область положительности решения задачи (2), (3) не может быть всей областью D , и одной из связных компонент ее границы должна быть вся граница области D . Выше на примере модельных задач в этих предположениях вариационным методом получено решение задачи (2), (3) и два нетривиальных решения задачи (1), (3). Отметим, что решение задачи (1), (3) вариационным методом искали на односвязных областях. Это не дает возможности выбрасывать из областей окрестности ее точек, что приводит к увеличению связности. Таким образом, при вариационной постановке задачи (1), (3) следует указывать, что функционал задается на односвязных областях, строго лежащих в области D . Тогда в случае максимума можно получить второе нетривиальное решение. Для нахождения вариационным методом решения дуальной задачи (2), (3) функционал следует задавать на областях, не обязательно односвязных, требуя, чтобы одна из связных компонент ее границы совпадала со всей границей области D .

Рассмотрим вариационную постановку задачи (1), (3) при указанных выше дополнительных условиях. Функционал (12) перепишем в виде

$$I(B) = q + 2\omega \iint_B \Psi_0 dx dy - \frac{\omega^2}{2\pi} \iint_B dx dy \iint_B G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (32)$$

$$q = \int_{\Gamma} \Psi_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} ds.$$

Здесь учтено представление (11) функции $\Psi(x, y)$. В силу формулы Грина для гармонических функций

$$q = \int_{\Gamma} \Psi_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} ds = \iint_D (\nabla \Psi_0)^2 dx dy \geq 0.$$

Обозначим

$$\iint_B \Psi_0 dx dy = A(B) > 0, \quad \frac{1}{2\pi} \iint_B dx dy \iint_B G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = Q(B) > 0.$$

Тогда

$$I(B) = q + 2\omega A(B) - \omega^2 Q(B) - \quad (33)$$

квадратный трехчлен относительно ω . При

$$\omega > L_1 = \frac{A(1 + \sqrt{1 + \frac{Qq}{A^2}})}{Q} \quad (34)$$

функционал (32) отрицателен на множестве B . Множество B_1 может совпадать со всей областью D . Из (33) следует, что при любом фиксированном ω существует $B_1 \subset D$, на котором

$$I(B_1) > q. \quad (35)$$

На тривиальном решении $\Psi_0(x, y)$ имеем $I = q$.

Оценим величину L_1 . Используя неравенство (29), получаем

$$I(D) \leq q + 2\pi R_1^2 \omega C - \frac{\omega^2}{2\pi} \iint_{C_R} dx dy \iint_{C_R} G_R(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta < 0. \quad (36)$$

где R — радиус наибольшего по площади круга C_R , который можно вписать в область D , R_1 — радиус наименьшего по площади круга, в который можно вписать область D . После вычисления интегралов в (36) получаем неравенство

$$q + 2\pi R_1^2 C \omega - \frac{\pi R^4}{8} \omega^2 < 0, \quad (37)$$

которое выполняется при

$$\omega > L_1 = \frac{8R_1^2 C \left(1 + \sqrt{1 + \frac{qR^4}{8\pi R_1^4 C^2}}\right)}{R^4}. \quad (38)$$

Рассмотрим экстремумы функционала. Предположим, что экстремум реализуется на всей области D . Как показано выше, минимум невозможен. Пусть ω удовлетворяет неравенству (34) при $B = D$, тогда функционал отрицателен. При данном ω в силу (33) можно подобрать B так, чтобы $I(B) > 0$. Отсюда и из $I(D) < 0$ следует, что D не реализует абсолютный максимум.

Пусть B реализует абсолютный максимум функционала и $B \subset D$. Такое множество существует, так как в противном случае функционал равен q , а в силу (33) можно подобрать область B , чтобы $I(B) > q$. Как показано Гольдштиком [4], на границе B функция Ψ обращается в ноль. Тогда $\Psi < 0$ внутри B , так как там $\Delta\Psi = \omega > 0$. При выбрасывании из B малой окрестности происходит возрастание функционала, однако этого нельзя делать, так как функционал рассматривается на односвязных областях.

Таким образом, обосновано существование нетривиального решения задачи (1), (3). Еще одно нетривиальное решение получено Гольдштиком, оно дает минимальное значение функционалу.

Рассмотрим теперь функционал на областях, у которых одна из связных компонент границы совпадает с границей Γ области D . Требование односвязности не накладывается. Покажем, что в случае максимума при выполнении неравенства (31) имеем решение дуальной задачи (2), (3). На всей области D максимума быть не может. В силу неравенства (31) в D существует круг C_r , в котором $\Psi < 0$. Так как нет ограничения на односвязность, можно выбросить из C_r малую окрестность с целью увеличения функционала. Если на D минимум, то, как было показано ранее, при выполнении неравенства (31) Ψ не дает решения дуальной задачи.

Пусть на B^* реализуется максимум функционала и $B^* \neq D$. Одна из связных компонент границы B^* совпадает с Γ . Если в некоторой точке $M_0 \in B^*$ $\Psi < 0$, то можно подобрать малую окрестность точки M_0 , в которой $\Psi < 0$, так, чтобы выбрасывание ее из B^* в соответствии с (13) увеличивало функционал. В $D \setminus \overline{B}$ функция Ψ является гармонической и на ее границе равняется нулю, откуда $\Psi \equiv 0$ в $D \setminus \overline{B}$.

Таким образом, вариационным методом, предложенным М.А. Гольдштиком, установили, что при выполнении неравенства (38) задача (1), (3) имеет второе нетривиальное решение. Так же вариационным методом устанавливается существование решение дуальной задачи (2), (3). Доказательство проводили для случая $\varphi(s) > 0$. Общий случай $\varphi(s) \geq 0$ существенно не усложняет доказательство.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00283).

Список литературы

- [1] М.А.Гольдштик, Вихревые потоки, Новосибирск, Наука, 1961.
- [2] G.K.Bathelot, A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds numbers, *J.Fluid Mech.*, **1**(1956), №4, 388–398.
- [3] Э.Г.Шифрин, *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, (1976), №1, 140–143.
- [4] М.А.Гольдштик, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, *Докл. АН СССР*, **8**(1962), №6, 1310–1313.
- [5] И.И.Вайнштейн, М.А.Гольдштик, О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил, *Докл. АН СССР*, **6**(1967), №6, 1277–1230.
- [6] И.И.Вайнштейн, О движении идеальной жидкости с завихренными зонами, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Новосибирск, 1972, 12 с.
- [7] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, Москва, Наука, 1977.
- [8] И.И.Вайнштейн, В.К.Юровский, Об одной задаче сопряжения вихревых течений, *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, (1976), №5, 98–100.
- [9] И.И.Вайнштейн, В.К.Юровский, Исследование течений с вихревыми зонами, Красноярск, *Особенности гидротехнического и меллиаративного строительства в Сибири*, 1978, 36–41.
- [10] О.В.Титов, *Прикл. мат. и мех.*, **41**(1977), №2, 370–372.
- [11] Д.К.Потапов, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, *Известия РАН, Сер. МММИУ*, **8**(2004), №3–4, 163–170.
- [12] М.Г.Лепчинский, Существование и устойчивость краевых задач с разрывными нелинейностями, Автореферат диссертации на соискание ученой степени к. ф.-м. н., Екатеринбург, 2008, 24 с.
- [13] Д.К.Потапов, Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика, *Матем. заметки*, **87**(2010), Вып. 2, 262–266.

- [14] И.И.Вайнштейн, П.С.Литвинов, Модель М.А. Лаврентьева о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости, *Вестник СибГау*, **24**(2009), №3, 7–9.
- [15] П.С.Литвинов, Математическое моделирование двухслойных потоков в подшипниках скольжения, сепараторах и течениях по схеме М.А. Лаврентьева, Автореферат диссертации на соискание ученой степени к. ф.-м. н, Красноярск, 2009, 24 с.
- [16] И.И.Вайнштейн, Дуальная задача к задаче М.А. Гольдштика с произвольной завихренностью, *Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика*, **3**(2010), №4, 500–506.
- [17] А.Б.Шабат, О двух задачах на склеивание, *Докл. АН СССР*, **150**(1963), №6, 1242–1245.
- [18] С.Н.Антонцев, В.Д.Лелюх, *Динамика сплошной среды*, (1969), №1, 131–153.
- [19] П.И.Плотников, О разрешимости одного класса задач на склеивание вихревых и потенциальных течений, *Динамика сплошной среды*, (1969), №3, 61–69.
- [20] И.И.Вайнштейн, Об одной краевой задаче вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости в осесимметрическом случае, *Дифференциальные уравнения*, **6**(1970), №1, 109–122.

Solution of Two Dual Problems of Gluing Vortex and Potential Flows by M.A.Goldshtick Variational Method

Isaak I. Vainshtein

A general problem of motion of incompressible liquid with vortex zones with different constant vorticity is formulated. It is considered the M.A.Goldshtick variational method of the research of dual problems for flows with vortex and potential areas that describe the model of separated flows and the model of ideal liquid motion in a field of Coriolis forces. It is proved the existence of the second nontrivial solution to the M.A.Goldshtick problem.

Keywords: vortex and potential flows, variational method, Green's function, extremum of the functional.