Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(2), 249–264

УДК 517.946

О начально-краевой задаче термокапиллярного движения эмульсии в пространстве

Анна Г. Петрова*
Алтайский государственный университет,
Ленина, 61, Барнаул, 656015,
Россия

Получена 10.09.2010, окончательный вариант 10.10.2010, принята к печати 20.11.2010

Данная работа посвящена исследованию начально-краевой задачи термокапиллярного движения эмульсии в замкнутой ограниченной области с достаточно гладкой границей в отсутствие силы тяжести. При помощи теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке доказывается локальная по времени разрешимость задачи с нулевой среднеобъемной скоростью на границе области и нулевым тепловым потоком через эту границу.

Ключевые слова: термокапиллярное движение,эмульсия, начально-краевая задача, существование и единственность решения.

1. Постановка задачи

Математическая модель термокапиллярного движения эмульсии, предложенная В.В.Пухначевым и О.В.Воиновым 1995 г. [1], представляет собой систему неопределенного типа, состоящую из 9 уравнений для определения концентрации дисперсной фазы, температуры смеси, векторов скоростей несущей и дисперсной фаз и общего давления. Некоторые результаты аналитического исследования этой модели приведены в [2]. В случае одномерного движения эмульсии с плоскими волнами корректность постановки простейшей начально-краевой задачи исследована в [3, 4]. Особенностью многомерного случая является, в частности то, что не удается свести модель к классу систем, изученных Вольпертом и Худяевым [5].

Рассмотрим модель термокапиллярного движения эмульсии как двухфазного континуума под действием микроускорений и термокапиллярных сил. В отличие от обычной гидродинамики двухфазных сред, такое движение характеризуется отсутствием межфазного взаимодействия при относительном движении фаз. Пусть объем Ω содержит вязкую несжимаемую жидкость с каплями другой вязкой несжимаемой жидкости, не смешивающейся с первой. Число капелек достаточно велико, поэтому существует $r \ll diam\Omega$ такое, что любой шар радиусом r содержит число капелек $n \gg 1$. Предполагается, что капли имеют сферическую форму с радиусом R. Будем пренебрегать броуновским движением, а также эффектами сближения, слияния и разделения капель. Если среднее расстояние l между каплями такое, что $R \ll l \ll diam\Omega$, то концепции механики гетерогенных сред применимы к системе. Предполагается, что система находится в локальном термодинамическом равновесии. Относительное движение в первую очередь вызвано неоднородностью температурного поля, вследствие чего возникает термокапиллярный эффект, обусловленный зависимостью коэффициента поверхностного натяжения σ от температуры θ. Для простоты эта зависимость предполагается линейной: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_\theta(\theta - \theta^0)$, где $\sigma_0,\ \sigma_\theta,\ \theta^0$ — некоторые положительные константы. Помимо термокапиллярных сил, система подвержена микрогравитации с постоянным ускорением. Предполагается также, что объемная концентрация дисперсной фазы c мала.

*annapetrova07@mail.ru

Определяющими уравнениями модели являются ([1]):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(c\mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(1-c)}{\partial t} + div((1-c)\mathbf{v}) = 0, \tag{1.2}$$

$$\rho_d c\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) + \rho_m(1-c)\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) =$$

$$= -\nabla p + \mathtt{div}\left(\mu_m(1+cN)(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^*)\right) + \rho_d c\mathbf{g} + \rho_m(1-c)\mathbf{g}, \tag{1.3}$$

$$\rho_d\lambda_d c\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta\right) + \rho_m\lambda_m(1-c)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta\right) = \mathtt{div}\left(k(c)\nabla\theta\right), \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = K\mathbf{g} + L\nabla\theta. \tag{1.5}$$

Здесь c — концентрация дисперсной фазы ($0 < c < 1$), θ — общая температура, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — осреднённые скорости дисперсной и несущей фаз соответственно, p — давление. Индекс d будем использовать для обозначения параметров дисперсной фазы, m — несущей; ρ — плотность, μ — динамическая вязкость, λ — удельная теплоёмкость, k — удельная теплопроводность, R — радиус сферических включений,

$$N = \frac{\mu_m + 5\mu_d/2}{\mu_m + \mu_d}, \quad K = \frac{2R^2(\rho_d - \rho_m)(\mu_m + \mu_d)}{3\mu_m(2\mu_m + 3\mu_d)}, \;\; L = \frac{2Rk_m\sigma_\theta}{(2\mu_m + 3\mu_d)(2k_m + k_d)}.$$

Нелинейный коэффициент теплопроводности $k(c)$ ограничен снизу и сверху соответственно $\min(k_d, k_m)$ и $\max(k_d, k_m)$ и пусть $|k'(c)|, |k''(c)|, |k'''(c)| \leqslant K$, где K — положительная константа.

В данной работе считаем, что сила тяжести отсутствует: $\mathbf{g} = 0$.

Будем считать, что уравнения (1.1)–(1.5) выполнены в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область пространства R^3 с границей S, принадлежащей классу $H^{3+\alpha}, \alpha < 1$ ([6]); S_T — боковая поверхность цилиндра Q_T.

Из уравнений (1.1), (1.2) следует, что

$$\mathrm{div}(c\mathbf{u} + (1-c)\mathbf{v}) = 0.$$

Введем среднеобъемное соленоидальное поле скоростей

$$\mathbf{w} = c\mathbf{u} + (1-c)\mathbf{v}.$$

Рассмотрим систему уравнений (1.1)–(1.5) с простейшими краевыми условиями

$$\mathbf{w} = 0, \;\nabla\theta\cdot n = 0 \;\; \mathtt{на} \;\; S_T, \tag{1.6}$$

где n — нормаль к границе S_T, и начальными условиями

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \;\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \;\theta(x,0) = \theta_0(x), \;c(x,0) = c_0(x). \tag{1.7}$$

Классическим решением задачи (1.1)–(1.7) будем называть удовлетворяющие уравнениям и условиям (1.1)–(1.7) функции $c, \theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ такие, что компоненты ∇c непрерывно дифференцируемы на $\bar{Q}_T$; компоненты $\nabla\theta$ непрерывно дифференцируемы по времени и дважды непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным; $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ непрерывно дифференцируемы по времени и дважды непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным на $\bar{Q}_T$.

Лемма 1.1. *При выполнении условия $0 < c_0(x) < 1$ на начальное распределение концентрации дисперсной фазы для классического решения задачи (1.1)–(1.7) справедлива оценка*

$$0 < c(x,t) < 1.$$

Эта оценка непосредственно следует из решения уравнений (1.1) и (1.2) методом характеристик и определения классического решения.

2. Единственность классического решения задачи

Следуя схеме исследования одномерной задачи [3, 4], введем вспомогательные функции

$$\mathbf{U} = L\nabla\theta, \ \ \mathbf{R} = \nabla c + \mathbf{U}\cdot F(c), \tag{2.1}$$

где

$$F(c) = c(1-c)(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c))/k(c).$$

Перейдем к среднеобъемному соленоидальному полю скоростей

$$\mathbf{w} = c\mathbf{u} + (1-c)\mathbf{v}.$$

При этом, учитывая (1.5), получим

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + (1-c)\mathbf{U}, \ \ \mathbf{v} = \mathbf{w} - c\mathbf{U}. \tag{2.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) теперь могут быть записаны таким образом:

$$c_t + c(1-c)\mathtt{div}\mathbf{U} + (\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})((1-2c)\mathbf{U} + \mathbf{w}) = 0, \tag{2.3}$$

$$\mathtt{div}\mathbf{w} = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (1.4) после подстановки формул (2.1)–(2.2) перепишем в виде

$$L\theta_t = \frac{k(c)}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}\mathtt{div}\mathbf{U} - \frac{k'(c)}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\mathbf{U} -$$

$$-\mathbf{w}\mathbf{U} - \frac{c(1-c)(\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m)}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}\mathbf{U}^2, \tag{2.5}$$

Это же уравнение после взятия градиента запишем как

$$\mathbf{U}_t - \left(\frac{k(c)}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}\right)\Delta\mathbf{U} = -\left(\frac{\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m}{(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c))^2}\right)(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})(1-2c)\mathbf{U}^2 -$$

$$-\nabla(\mathbf{U}\mathbf{w}) + \frac{(\rho_d\lambda_d c - \rho_m\lambda_m(1-c))}{(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c))}(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}^2 - c\nabla\mathbf{U}^2 - \tag{2.5$'$}$$

$$-\frac{\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m}{(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c))^2}(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\left(k(c)\mathtt{div}(\mathbf{U}) + k'(c)(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\cdot\mathbf{U}\right) +$$

$$+\frac{1}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}\left(k'(c)(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U} + k''(c)(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\mathbf{R}\cdot\mathbf{U} + \right.$$

$$\left. + k'(c)\nabla(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}) - (k(c)F(c))'_c(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}^2 + k'(c)F(c)\nabla\mathbf{U}^2\right).$$

Заметим, что в правую часть уравнения (2.5)$'$ входят функции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}$ вместе со своими производными первого порядка, также непрерывно дифференцируемые функции концентрации c.

Применяя оператор градиента к уравнению (2.3) и используя уравнение (2.5)$'$, получим уравнения первого порядка для новых функций $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}_t - \left(\left(F(c)\frac{1}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}k'(c)\mathbf{U} + (1-2c)\mathbf{U} + \mathbf{w}\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{R} =$$

$$= F(c)\left(\frac{\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m}{(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c))^2}\right)(\mathbf{R} - F(c)\mathbf{U})(1-2c)\mathbf{U}^2 - F(c)\nabla(\mathbf{U}\mathbf{w}) +$$

$$+\frac{F(c)(\rho_d\lambda_d c-\rho_m\lambda_m(1-c))}{(\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c))}(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}^2-F(c)c\nabla\mathbf{U}^2-$$
$$-\frac{F(c)(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)}{(\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c))^2}(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\Big(k(c)\mathtt{div}(\mathbf{U})+k'(c)(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\cdot\mathbf{U}\Big)+$$
$$+\frac{F(c)}{\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c)}\Big(k'(c)(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U}+k''(c)(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}+ \tag{2.6}$$
$$+k'(c)\Big((\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{U}\Big)+(k(c)F(c))'_c(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}^2-k'(c)F(c)\nabla\mathbf{U}^2\Big)+$$
$$+(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\Big(2\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}+(F(c)(1-2c))'_c\mathbf{U}^2-F'(c)\mathbf{U}\cdot\mathbf{w}\Big)-$$
$$-(1-2c)(\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{U}+(\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{w}+$$
$$-F(c)(1-2c)\nabla\mathbf{U}^2-F(c)(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{w}+F(c)(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{U}.)$$

Правая часть уравнения (2.6) содержит функции $\mathbf{U},\mathbf{w}$ с производными по пространственным переменным не выше первого порядка, функции $\mathbf{R}$ и непрерывно дифференцируемые функции от концентрации c.

Осталось переписать уравнение (1.3) в новых функциях. Это нетрудно сделать, учитывая формулы (2.2):

$$(\rho_d c+\rho_m(1-c))\mathbf{w}_t-(\rho_d c+\rho_m(1-c))\mathbf{U}c_t+(\rho_d-\rho_m)c(1-c)\mathbf{U}_t+$$
$$+\rho_d c\Big(((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{w}-((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U}))\mathbf{U}+$$
$$+(1-c)((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{U}\Big)+\rho_m(1-c)\Big(((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{w}-$$
$$-((\mathbf{w}-c\mathbf{U})\cdot(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U}))\mathbf{U}-c((\mathbf{w}-c\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{U}\Big)=$$
$$=-\nabla p+\mu N\Big((\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})(\nabla\mathbf{w}+(\nabla\mathbf{w})^*-$$
$$-c\nabla\mathbf{U}+(\nabla\mathbf{U})^*-(R_i-F(c)U_i)U_j-(R_j-F(c)U_j)U_i)\Big)+$$
$$+\mu(1+cN)\Big(\Delta\mathbf{w}-2c\Delta\mathbf{U}-3\nabla\mathbf{U}\nabla c-\mathtt{div}(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}-(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U}-$$
$$-\nabla(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}\Big).$$

Заменяя c_t по формуле (2.3) и учитывая градиентный вид слагаемых $\Delta\mathbf{U},\mathbf{U}_t$, перепишем последнее уравнение в виде

$$(\rho_d c+\rho_m(1-c))\mathbf{w}_t+\nabla(p+(\rho_d-\rho_m)c(1-c)L\theta_t+2c\mu(1+cN)L\mathtt{div}\mathbf{U})-$$
$$-\mu(1+cN)\Delta\mathbf{w}=(\rho_d-\rho_m)c(1-c)(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\times$$
$$\times\Bigg(\frac{k(c)}{\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c)}\mathtt{div}\mathbf{U}-\frac{k'(c)}{\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c)}(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}-\mathbf{w}\mathbf{U}-$$
$$-\frac{c(1-c)(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)}{\rho_d\lambda_d c+\rho_m\lambda_m(1-c)}\mathbf{U}^2\Bigg)+2\mu(1+2Nc)(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U}-$$
$$-(\rho_d c-\rho_m(1-c))\mathbf{U}\Big(c(1-c)\mathtt{div}\mathbf{U}+(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})((1-2c)\mathbf{U}+\mathbf{w})\Big)- \tag{2.7}$$

$$-\rho_d c\Big(((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{w}+((\mathbf{w}-(1-c)\mathbf{U})\cdot(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U}))\mathbf{U}+$$

$$+(1-c)((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{U}\Big)+\rho_m(1-c)\Big(((\mathbf{w}+(1-c)\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{w}-$$

$$-((\mathbf{w}-c\mathbf{U})\cdot(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U}))\mathbf{U}-c((\mathbf{w}-c\mathbf{U})\cdot\nabla)\mathbf{U}\Big)+\mu N\Big((\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})(\nabla\mathbf{w}+(\nabla\mathbf{w})^*+$$

$$+c\nabla\mathbf{U}+(\nabla\mathbf{U})^*-(R_i-F(c)U_i)U_j-(R_j-F(c)U_j)U_i)\Big)+$$

$$+\mu(1+cN)\Big(\Delta\mathbf{w}-3\nabla\mathbf{U}\nabla c-\mathtt{div}(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}-(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U}-$$

$$-\nabla(\mathbf{R}-F(c)\mathbf{U})\mathbf{U}\Big).$$

Правая часть уравнения (2.7) содержит функции R и $\mathbf{U}$ с производными по пространственным переменным до 1-го порядка включительно, непрерывно дифференцируемые функции от концентрации c и функции $\mathbf{w}$ с производными по пространственным переменным до 1-го порядка включительно.

Пусть

$$Z(t)=\int\limits_0^t\Big(\|\mathbf{U}\|^2(t)+\|\mathbf{w}\|^2(t)+\|\mathbf{R}\|^2(t)+\|c\|^2(t)\Big)dt,$$

где $\|\mathbf{U}\|^2(t)=\int\limits_{R^3}(U_1^2+U_2^2+U_3^2)dx$.

Предполагая, что $\mathbf{U}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},\mathbf{R}^{(1)},c^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)},\mathbf{R}^{(2)},c^{(2)}$ — два классических решения задачи на промежутке времени $[0,T]$, обозначим

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(1)}-\mathbf{U}^{(2)},\ \mathbf{w}=\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{w}^{(2)},\ \mathbf{R}=\mathbf{R}^{(1)}-\mathbf{R}^{(2)},\ c=c^{(1)}-c^{(2)},\ p=p^{(1)}-p^{(2)}.$$

Для $\mathbf{U},\mathbf{w},\mathbf{R},c$ имеем линейную систему уравнений

$$c_t=a_1(x,t)c+a_2(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}+\mathbf{a}_1(x,t)\mathbf{U}+\mathbf{a}_2(x,t)\mathbf{w}+\mathbf{a}_2(x,t)\mathbf{R}; \tag{2.8}$$

$$\mathtt{div}\mathbf{w}=0; \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_t=b_0(x,t)\Delta\mathbf{U}+b_1(x,t)\mathbf{U}+b_2(x,t)\mathbf{R}+\nabla(\mathbf{b}_3(x,t)\mathbf{U})+\nabla(\mathbf{U}_1\mathbf{w})+\\+\mathbf{b}_4(x,t)c+\mathbf{b}_5(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}+\nabla(\mathbf{b}_6(x,t)\mathbf{R});\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}d_0(x,t)\mathbf{w}_t+\nabla q-d_1(x,t)\Delta\mathbf{w}=d_2(x,t)\mathbf{U}+d_3(x,t)\mathbf{w}+\\+\nabla(\mathbf{d}_4(x,t)\mathbf{R})-\nabla(\mathbf{w}_1\mathbf{U})+\mathbf{d}_5(x,t)c+\mathbf{d}_6(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}+(\mathbf{d}_7(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{w}+(\mathbf{d}_8(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{U};\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_t+(\mathbf{f}_0(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{R}=f_1(x,t)\mathbf{R}+f_2(x,t)\mathbf{U}+f_3(x,t)\mathbf{w}+f_4(x,t)\nabla(\mathbf{U}_1\mathbf{w})+\\f_5(x,t)\nabla(\mathbf{w}_1\mathbf{U})+\nabla((\mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2)\mathbf{U})+\mathbf{f}_6(x,t)c+f_7(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}+(\mathbf{f}_8\cdot\nabla)\mathbf{U}+(\mathbf{f}_9\cdot\nabla)\mathbf{w}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь

$$\begin{gathered}d_0(x,t)=\rho_d c_1+\rho_m(1-c_1)>\min\{\rho_d,\rho_m\}>0;\\ b_0=\frac{k(c_1)}{\rho_d\lambda_d c_1+\rho_m\lambda_m(1-c_1)};\ \ d_1=\mu(1+c_1N).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Остальные коэффициенты системы (2.8)–(2.13) также являются ограниченными вместе со своими производными 1-го порядка функциями, конкретный вид которых не важен для доказательства.

Умножим уравнение (2.8) на $2c(x,t)$ и проинтегрируем по $Q_t, t\in(0,T)$:

$$\int\limits_\Omega c^2(t)dx = 2\int\limits_{Q_t} a_1(x,t)c^2dxdt + 2\int\limits_{Q_t} a_2(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}cdxdt+$$
$$+2\int\limits_{Q_t}\mathbf{a}_1(x,t)\mathbf{U}cdxdt + \int\limits_{Q_t}\mathbf{a}_2(x,t)\mathbf{w}cdxdt + \int\limits_{Q_t}\mathbf{a}_2(x,t)\mathbf{R}cdxdt \leqslant \tag{2.14}$$
$$\leqslant C_1\|c\|^2 + C_2\|\nabla\mathbf{U}\|\|c\| + C_3\|\mathbf{U}\|\|c\| + C_4\|\mathbf{w}\|\|c\| + C_5\|\mathbf{R}\|\|c\|.$$

Умножим уравнение (2.10) на $2\mathbf{U}(x,t)$ и проинтегрируем по $Q_t, t\in(0,T)$. Используем следующие равенства:

$$\Delta\mathbf{U} = \nabla\mathtt{div}\mathbf{U};$$
$$b_0\nabla\mathtt{div}\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = \mathtt{div}(\mathtt{div}\mathbf{U}(b_0\mathbf{U})) - \nabla b_0\cdot\mathbf{U}\mathtt{div}\mathbf{U} - b_0(\mathtt{div}\mathbf{U})^2;$$
$$\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{b})\mathbf{U} = \mathtt{div}((\mathbf{U}\cdot\mathbf{b})\mathbf{U}) - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{b})\mathtt{div}\mathbf{U}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям для области Ω и учитывая краевые условия, найдем

$$\int\limits_\Omega \mathbf{U}^2dx + 2\int\limits_{Q_t} b_0(x,t)(\mathtt{div}\mathbf{U})^2dxdt =$$
$$= -2\int\limits_{Q_t}\nabla b_0\mathbf{U}\mathtt{div}\mathbf{U} + 2\int\limits_{Q_t} b_1(x,t)\mathbf{U}^2dxdt + 2\int\limits_{Q_t} b_2(x,t)\mathbf{R}\mathbf{U}dxdt+$$
$$+2\int\limits_{Q_t}(\mathbf{U}\mathbf{b}_3(x,t))\mathtt{div}\mathbf{U}dxdt + 2\int\limits_{Q_t}\nabla(\mathbf{U}_1\mathbf{w})\mathbf{U}dxdt+ \tag{2.15}$$
$$+2\int\limits_{Q_t} c(\mathbf{b}_4(x,t)\mathbf{U})dxdt + 2\int\limits_{Q_t}(\mathbf{b}_5(x,t)\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{U}dxdt - 2\int\limits_{Q_t}(\mathbf{b}_6(x,t)\mathbf{R})\mathtt{div}\mathbf{U}dxdt \leqslant$$
$$\leqslant D_1(\mathtt{div}\mathbf{U})^2 + D_2\|\mathbf{U}\|^2 + D_3\|\mathbf{U}\|\|c\| + D_4\|\mathbf{R}\|\|\mathbf{U}\|+$$
$$+D_5\|\mathtt{div}\mathbf{U}\|\|\mathbf{U}\| + D_6\|\nabla\mathbf{w}\|\|\mathbf{U}\| + D_7\|\mathbf{U}\|\|\mathbf{w}\| + D_8\|\mathbf{R}\|\|\mathtt{div}\mathbf{U}\|.$$

Проделывая то же самое для уравнения (2.11) и принимая во внимание уравнение (2.9) и равенства

$$d_1\Delta\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = \mathtt{div}(d_1\sum_i\nabla w_iw_i) - d_1|\nabla\mathbf{w}|^2 - \nabla d_1\sum_i\nabla w_iw_i;$$
$$\nabla(\mathbf{d}\mathbf{U})\mathbf{w} = \mathtt{div}((\mathbf{d}\mathbf{U})\mathbf{w}) - (\mathbf{d}\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{w};$$
$$((\mathbf{d}\cdot\nabla)\mathbf{U})\mathbf{w} = \mathtt{div}(\mathbf{d}(\mathbf{w}\mathbf{U})) - (\mathbf{w}\mathbf{U})\mathtt{div}\mathbf{d} - \nabla(\mathbf{d}\mathbf{w})\mathbf{U},$$

где $\mathbf{d} = \mathbf{d}(x,t)$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega d_0(x,t)\mathbf{w}^2dx + 2\int\limits_{Q_t} d_1(x,t)|\nabla\mathbf{w}|^2dxdt = \int\limits_{Q_t}\frac{\partial d_0}{\partial t}\mathbf{w}^2dxdt - 2\int\limits_{Q_t}\nabla(d_1^2)\sum_1^3\nabla w_iw_idxdt+$$
$$+2\int\limits_{Q_t} d_3(x,t)\mathbf{w}^2dxdt + 2\int\limits_{Q_t} d_2(x,t)\mathbf{w}\mathbf{U}dxdt + \int\limits_{Q_t}\mathbf{d}_5(x,t)c\mathbf{w}dxdt+$$
$$+2\int\limits_{Q_t}\mathbf{d}_6(x,t)\mathtt{div}\mathbf{U}\mathbf{w}dxdt + 2\int\limits_{Q_t}(\mathbf{d}_7(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{w}^2dxdt - 2\int\limits_{Q_t}((\mathbf{d}_8(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{w})\mathbf{U}dxdt.$$

Оценим снизу первое слагаемое в левой части этого равенства с учетом (2.13) и разделим все неравенство почленно на $\min\{\rho_d, \rho_m\}$:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{w}^2 dx + \frac{2}{\min\{\rho_d, \rho_m\}} \int\limits_{Q_t} d_1(x,t)|\nabla \mathbf{w}|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant E_1\|\mathbf{w}\|^2 + E_2\|\mathbf{U}\|^2 + E_3\|\mathbf{w}\|\|\nabla \mathbf{w}\| + \tag{2.16}$$

$$+E_4\|\mathbf{w}\|\|\mathtt{div}\mathbf{U}\| + E_5\|\mathbf{U}\|\|\nabla \mathbf{w}\| + E_6\|\mathbf{U}\|\|\mathbf{w}\| + E_7\|\mathbf{w}\|\|c\|.$$

Уравнение (2.12) при

$$2((\mathbf{f}_0(x,t)\cdot\nabla)\mathbf{R})\mathbf{R} = \mathbf{f}_0\mathtt{div}(\mathbf{R}^2) = \mathtt{div}(\mathbf{f}_0\mathbf{R}^2) - \mathbf{R}^2\mathtt{div}\mathbf{f}_0$$

и следствия краевых условий $\mathbf{f}_0(x,t)\cdot\mathbf{n} = 0$, где $x \in \partial\Omega$, а $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S_T дает

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{R}^2 dx \leqslant F_1\|\mathbf{R}\|^2 + F_2\|\mathbf{U}\|\|\mathbf{R}\| + F_3\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{R}\| + F_4\|\nabla\mathbf{w}\|\|\mathbf{R}\| + F_5\|\nabla\mathbf{U}\|\|\mathbf{R}\| + F_6\|c\|\|\mathbf{R}\|. \quad (2.17).$$

Складывая (2.14)–(2.17), замечая, что $\|\mathtt{div}\mathbf{U}\| \leqslant \|\nabla\mathbf{U}\|$ и применяя неравенство Коши с "эпсилон" , получим оценку

$$\int\limits_{\Omega} c^2(t)dx + \int\limits_{\Omega} \mathbf{U}^2 dx + 2\int\limits_{Q_t} b_0(x,t)(\mathtt{div}\mathbf{U})^2 dxdt + \frac{2}{\min\{\rho_d, \rho_m\}} \int\limits_{\Omega} \mathbf{w}^2 dx +$$

$$+\frac{2}{\min\{\rho_d, \rho_m\}} \int\limits_{Q_t} d_1(x,t)|\nabla\mathbf{w}|^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} \mathbf{R}^2 dx \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_0^t \|\nabla\mathbf{U}\|^2 dt + \varepsilon_2 \int\limits_0^t \|\nabla\mathbf{w}\|^2 dt + N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)Z(t).$$

Выбирая $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_1 \leqslant 2\min_{\bar{Q}_T} b_0(x,t), \quad \varepsilon_2 \leqslant \frac{2\min\limits_{\bar{Q}_T} d_1(x,t)}{\min\{\rho_d, \rho_m\}},$$

приходим к неравенству

$$\frac{dZ}{dt} \leqslant N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)Z(t), \quad Z(0) = 0,$$

откуда и следует, что $c = \mathbf{U} = \mathbf{w} = \mathbf{R} \equiv 0$ для почти всех $x \in \Omega$, $t \in (0, T]$.

Единственность для температуры θ следует из единственности решения начально-краевой задачи для уравнения (2.5).

Замечание 2.1. Здесь, как и в задачах для вязкой несжимаемой жидкости, единственность для давления понимается с точностью до произвольного слагаемого, не зависящего от пространственных переменных.

Таким образом, справедливо

Утверждение 2.1. *Классическое решение задачи (1.1)–(1.7) единственно на всем интервале времени существования.*

3. Построение оператора

Для доказательства локальной по времени разрешимости задачи (1.1)–(1.7) введем вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{R}$ по формуле (2.1). $\mathbf{U}$ теперь будет играть роль обозначения, а не самостоятельной вектор-функции, как ранее для $L\nabla\theta$. Введем модифицированное соленоидальное поле скоростей $\mathbf{w}$ в соответствии с формулами (2.2).

Для подлежащих определению функций $c, \theta, p, \mathbf{R}, \mathbf{w}$ получаем систему уравнений (2.3)–(2.7), которую можно записать в виде

$$c_t + c(1-c)\mathtt{div}\nabla\theta + (\mathbf{R} - F(c)\nabla\theta)((1-2c)\nabla\theta + \mathbf{w}) = 0, \tag{3.1}$$

$$\mathtt{div}\mathbf{w} = 0, \tag{3.2}$$

$$L\theta_t - \frac{k(c)}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}\Delta\theta = G_1(c, \nabla\theta, \mathbf{R}, \mathbf{w}), \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_t - \Big(\Big(F(c)\frac{1}{\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1-c)}k'(c)\nabla\theta + (1-2c)\nabla\theta + \mathbf{w}\Big)\cdot\nabla\Big)\mathbf{R} = \\ = \mathbf{H}(c, \mathbf{R}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_x, \theta_x, \theta_{xx}),\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$(\rho_d c + \rho_m(1-c))\mathbf{w}_t + \nabla q - \mu(1+cN)\Delta\mathbf{w} = \mathbf{G}(c, \mathbf{R}, \mathbf{R}_x, \theta_x, \mathbf{w}, \mathbf{w}_x, \theta_{xx}), \tag{3.5}$$

где правые части $G_1, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ представляют собой аналитические функции своих аргументов, а функция, стоящая под знаком градиента в левой части $(2.5)'$ обозначена через q.

Система (3.1)–(3.5) дополняется краевыми условиями

$$\mathbf{w} = 0, \nabla\theta\cdot\mathbf{n} = 0 \ \mathtt{на}\ S_T, \tag{3.6}$$

являющимися следствиями краевых условий (1.6), и начальными условиями

$$\begin{aligned}c(x,0) = c_0, \theta(x,0) = \theta_0, \mathbf{R}(x,0) = \nabla c_0(x) + LF(c_0)\nabla\theta_0(x), \\ \mathbf{w}(x,t) = \mathbf{w}_0(x) = v_0(x) - c_0(x)\nabla\theta_0(x),\end{aligned} \tag{3.7}$$

вытекающими из условий (1.7).

Построим оператор шаудеровского типа, неподвижная точка которого и даст решение задачи (3.1)–(3.7).

Рассмотрим некоторое замкнутое выпуклое множество Λ функций $(\tilde\theta, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde c)$, удовлетворяющих условиям (3.6), (3.7) (остальное будет уточнено позднее) в пространстве

$$H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \times \Big(H^{1+\alpha_1, \frac{1+\alpha_1}{2}}(\overline{Q}_T)\Big)^3 \times \Big(H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)\Big)^3 \times H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T),$$

где $\alpha_1 = \alpha + \varepsilon$, и таких, что нормы функций в соответствующих классах вместе с величиной $\langle R_{i,x}\rangle^{(\alpha_1/2)}_{t,\ Q_T}$ ограничены некоторыми константами, которые будут уточнены позднее.

Здесь и далее для пространств и норм используются обозначения [6].

Пусть $(\tilde\theta, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde c) \in \Lambda$. Построим оператор $\Phi(\tilde\theta, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde c) = (\theta, \mathbf{w}, \mathbf{R}, c)$, решая последовательно серию линейных задач.

Первая — начально-краевая задача для уравнения параболического типа для определения θ:

Задача 1.

$$L\theta_t - \frac{k(\tilde c)}{\rho_d\lambda_d\tilde c + \rho_m\lambda_m(1-\tilde c)}\Delta\theta = G_1(\tilde c, \nabla\tilde\theta, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{w}}),$$

$$\nabla\theta\cdot\mathbf{n} = 0 \ \mathtt{на}\ S_T,$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x).$$

Лемма 3.1. *Пусть $S \in H^{3+\alpha}$, $\theta_0(x) \in H^{3+\alpha}(\overline{\Omega}), (\tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{w}}, \tilde{\boldsymbol{R}}, \tilde{c}) \in \Lambda$ и выполнены условия согласования 1-го порядка. Тогда задача 1 имеет единственное решение в классе функций $\theta \in H^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$. Решение подчиняется неравенству*

$$|\theta|^{(3+\alpha)}_{Q_T} \leqslant C\left(|\theta_0|^{(3+\alpha)} + |G_1|^{(1+\alpha)}\right).$$

Справедливость утверждения леммы 3.1 непосредственно следует из теоремы 5.2 гл.4 [6].

Вторая — начально-краевая задача для системы Стокса с переменными коэффициентами для определения функций $\mathbf{w}$ и q с уже найденным в задаче 1 θ:

Задача 2.

$$(\rho_d\tilde{c} + \rho_m(1-\tilde{c}))\mathbf{w}_t + \nabla q - \mu(1+\tilde{c}N)\Delta\mathbf{w} = \mathbf{G}(\tilde{c}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{R}}_x, \theta_x, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_x, \theta_{xx}),$$

$$\mathtt{div}\mathbf{w} = 0,$$

$$\mathbf{w} = 0 \ \mathtt{на}\ \partial\Omega,$$

$$\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}_0(x).$$

Лемма 3.2. *Пусть θ —* решение задачи 1, *$\boldsymbol{w}_0 \in (H^{2+\alpha}_{\overline{\Omega}})^3, (\tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{w}}, \tilde{\boldsymbol{R}}, \tilde{c}) \in \Lambda$, и выполнены условия согласования*

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}_0 = 0, \boldsymbol{w}_0|_{\partial\Omega} = 0, \ \ \nabla q_0 - \mu(1+c_0N)\Delta\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{G}(x,0),$$

где $q_0(x)$ — решение следующей задачи Неймана:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla q_0}{\rho_d c_0 + \rho_m(1-c_0)}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\mu(1+Nc_0)}{\rho_d c_0 + \rho_m(1-c_0)}\Delta\boldsymbol{w}_0 + \frac{\boldsymbol{G}(x,0)}{\rho_d c_0 + \rho_m(1-c_0)}\right),$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial n} = \mu(1+Nc_0)(\Delta\boldsymbol{w}_0 \cdot \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{G}(x,0)\cdot\boldsymbol{n}, x \in \partial\Omega,$$

$\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Тогда задача 2 имеет единственное решение $\boldsymbol{w} \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\nabla q \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. При этом

$$|\boldsymbol{w}|^{(2+\alpha)} + |\nabla q|^{(\alpha)} \leqslant C\Big(|\boldsymbol{w}_0|^{(2+\alpha)} + |\boldsymbol{G}|^{(\alpha)} + \langle\boldsymbol{G}\rangle_t^{a_1/2}\Big).$$

Доказательство. Правые части $\mathbf{G}$ уравнений задачи 2 являются аналитическими функциями своих аргументов, из которых $\tilde{c}$, θ_x, $\tilde{\mathbf{w}}$, θ_{xx}, $\mathbf{R}$ принадлежат классу $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}$, величины $\langle R_{i,x}\rangle^{(\alpha_1/2)}_{t,\ Q_T}$ ограничены, а $\tilde{\mathbf{w}}_x$ принадлежат классу $H^{\alpha_1, \frac{\alpha_1}{2}}$. Следовательно, $\mathbf{G} \in H^{\alpha,\alpha/2}$ и $\langle\mathbf{G}\rangle_t^{a_1/2}$ ограничена. Коэффициенты системы Стокса $\rho(x,t) = \rho_d\tilde{c} + \rho_m(1-\tilde{c})$ и $\mu(x,t) = \mu(1+N\tilde{c})$ принадлежат $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$. Поэтому справедливость этой леммы следует из оценок [7] для системы Стокса с постоянными коэффициентами и разбиения области Q_T на конечное число подобластей, в каждой из которых колебания функции $\tilde{c}$ достаточно малы (аналогично [8], теорема 2.1 параграф 2 гл.III). Подробности можно найти в [9], лемма 2.3. □

Третья — задача Коши для уравнения 1-го порядка для нахождения функций $\mathbf{R}$ по уже найденным θ $\mathbf{w}$, именно:

Задача 3.

$$\mathbf{R}_t - \left(\left(F(\tilde{c})\frac{1}{\rho_d\lambda_d\tilde{c} + \rho_m\lambda_m(1-\tilde{c})}k'(\tilde{c})\nabla\theta + (1-2\tilde{c})\nabla\theta + \mathbf{w}\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{R} = \mathbf{H}(\tilde{c}, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_x, \theta_x, \theta_{xx});$$

$$\mathbf{R}(x,0) = \mathbf{R}_0(x).$$

Отметим, что коэффициенты при производных R_{i,x_j} функций R_i по переменным x_j в левой части последнего уравнения (обозначим их $a_j(x,t)$,

$$\mathbf{a}(x,t) = (a_1(x,t), a_2(x,t), a_3(x,t)))$$

принадлежат $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$. Правые части H_i также являются элементами пространства $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\boldsymbol{R}_0(x) \in (H^{1+\alpha})^3(\overline{\Omega})$. *Тогда задача 3 имеет единственное решение* $R(x,t) \in H^{1+\alpha,1+\alpha/2}_{x,\quad t}(\overline{Q}_T)$. *При этом справедливы оценки*

$$|R_i|^{(1+\alpha)}_{\bar{Q_T}} \leqslant |R_{i,0}|^{(1+\alpha)}_{\bar{\Omega}} 6\exp(2T|a_i|^{(1+\alpha)}_{Q_T}) + T^{(1-\alpha)/2}\cdot C_1 + T\cdot C_2,$$

$$\langle R_{i,x_j}\rangle^{a_1/2}_t \leqslant C_3 T^{\alpha-\alpha_1/2},$$

где константы C_1, C_2, C_3 *зависят от норм известных функций* $\tilde{R}_i, \tilde{c}, \boldsymbol{w}, \theta$ *в соответствующих пространствах,* $\alpha > \alpha_1/2$.

Доказательство. Заметим, что векторное уравнение задачи 3 распадается на отдельные уравнения для R_i и может быть записано в виде $\dfrac{\partial R_i}{\partial t} + \sum\limits_{l=1}^{3} a_l(x,t)\dfrac{\partial R_i}{\partial x_l} = H_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, $\mathbf{a}|_{S_T} = 0$.

Принимая во внимание тот факт, что на границе рассматриваемой области $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к S_T, и решая эту задачу методом характеристик, получим:

$$R_i(x,t) = R_{i,0}(\mathbf{y}(x,t,0)) + \int\limits_0^t H_i(\mathbf{y}(x,t,\tau),\tau)d\tau. \tag{3.8}$$

Здесь под знаком интеграла сохранено прежнее обозначение теперь уже для суперпозиции функций, а вектор-функция $\mathbf{y}(x,t,\tau)$ является решением следующей задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_l}{d\tau} = a_l(y(x,t,\tau),\tau),\ \ y_l(x,t,t) = x_l, l = 1,2,3. \tag{3.9}$$

Вследствие леммы 1.2 [9] эта система однозначно разрешима и ее решение является непрерывно дифференцируемыми функциями параметров x, параметра t и переменной τ. При этом

$$\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \delta_{lj} - \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\partial a_l(y(x,t,\tau),\tau)}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k(x,t\tau)}{\partial x_j}d\tau,$$

$$\frac{\partial y_l}{\partial t} = -a_l(x,t) - \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\partial a_l(y(x,t,\tau),\tau)}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k(x,t\tau)}{\partial t}d\tau$$

и справедливы оценки

$$\sum_{l,j=1}^{3}\left(\frac{\partial y_l(x,t\tau)}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant 3\exp\left(2\left|\int\limits_{\tau}^{t}|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_{\Omega}d\tau\right|\right), \tag{3.10}$$

$$\left|\frac{\partial y(x,t,\tau)}{\partial t}\right| \equiv \left(\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial y_l(x,t\tau)}{\partial t}\right)^{1/2} \leqslant |\mathbf{a}(x,t)|_{Q_T}\exp\left(\left|\int\limits_{\tau}^{t}|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_{\Omega}d\tau\right|\right), \tag{3.11}$$

где $|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega = \sup\limits_{x\in\Omega} |\mathbf{a}(x,\tau)|$.

Кроме того, для

$$z_l(x,t_1,t_2,\tau) \equiv \Big|\frac{\partial y_l(x,t_1,\tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial y_l(x,t_2,\tau)}{\partial x_j}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{3}\Bigg(\int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{\partial a_l}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_1,\tau)d\tau - \int\limits_{\tau}^{t_2} \frac{\partial a_l}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_2,\tau)d\tau\Bigg)\Big|,$$

где для определенности считаем $t_2 < t_1$, справедливо неравенство

$$z_l(x,t_1,t_2,\tau) \leqslant \sum_{k=1}^{3}\Big|\int\limits_{\tau}^{t_1}\Big|\frac{\partial a_l(y(x,t_1,\tau),\tau)}{\partial y_k} - \frac{\partial a_l(y(x,t_2,\tau),\tau)}{\partial y_k}\Big|\Big|\frac{\partial y_k(x,t_1,\tau)}{\partial x_j}\Big|d\tau\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\Big|\int\limits_{t_2}^{t_1}\Big|\frac{\partial a_l}{\partial y_k}(y(x,t_2,\tau),\tau)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(y(x,t_2,\tau),\tau)\Big|d\tau\Big| + \sum_{k=1}^{3}\Big|\int\limits_{\tau}^{t_1}\Big|\frac{\partial a_l}{\partial y_k}(y(x,t_2,\tau),\tau) z_k(y(x,t_1,t_2,\tau)\Big|d\tau\Big|.$$

Принимая во внимание оценку (3.11), из которой следует, что

$$\Big|\frac{\partial a_l}{\partial y_k}(y(x,t_1,\tau),\tau) - \frac{\partial a_l}{\partial y_k}(y(x,t_2,\tau),\tau)\Big| \leqslant |a_l|^{(1+\alpha)}|y(x,t_1,\tau),\tau) - (y(x,t_2,\tau),\tau)|^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant |a_l|^{(1+\alpha)}|t_1-t_2|^{\alpha}|\mathbf{a}(x,t)|^{\alpha}_{Q_T}\exp\Bigg(\Bigg|\alpha\int\limits_{\tau}^{t_1}|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega d\Bigg|\tau\Bigg),$$

а также лемму 1.1[9], получим следующую оценку:

$$z_l(x,t_1,t_2,\tau) \leqslant |t_1-t_2|^{\alpha}\sqrt{3}|a_l|^{(1+\alpha)}\exp\Bigg(\Bigg|\int\limits_{\tau}^{t_1}|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega d\Bigg|\tau\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(t_1|\mathbf{a}(x,t)|^{\alpha}_{Q_T}\exp\Bigg(\Bigg|\alpha\int\limits_{\tau}^{t_1}|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega d\Bigg|\tau\Bigg) + |t_1-t_2|^{1-\alpha}\Bigg)\cdot\exp\Big(\int\limits_{\tau}^{t_1}||A(x,t_2,\tau)||d\tau\Big). \quad (3.12)$$

Аналогично для

$$r_l(x_1,x_2,t,\tau) \equiv \Big|\frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x_1,t,\tau) - \frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x_2,t,\tau)\Big|$$

имеем оценку

$$r_l(x_1,x_2,t,\tau) \leqslant \sum_{k=1}^{3}\Big|\int\limits_{\tau}^{t}\Bigg(\frac{\partial a_l(y(x_1,t,\tau),\tau)}{\partial y_k} - \frac{\partial a_l(y(x_2,t,\tau),\tau)}{\partial y_k}\Bigg)\frac{\partial y_k(x_1,t,\tau)}{\partial x_j}d\tau\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\Big|\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\partial a_l}{\partial y_k}(y(x_2,t,\tau),\tau) r_k(y(x_1,x_2,t,\tau)d\tau\Big|,$$

откуда с учетом (3.10)

$$r_l(x_1,x_2,t,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant t|a_l|^{(1+\alpha)}_{Q_t}|x_1-x_2|^\alpha\sqrt{3}\exp\left(\left|\alpha\int\limits_\tau^t|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega d\right|\tau\right)|y|\cdot\exp\Big(\int\limits_\tau^t||A(x_2,t,\tau)||d\tau\Big). \tag{3.13}$$

В этих оценках

$$A_{lp}=\Big|\frac{\partial a_l}{\partial y_p}(y(x_1,t,\tau),\tau)\Big|,\ \ ||A||=\sup_{|s|=|\sigma|=1}\Big|\sum_{l,p=1}^3 A_{lp}s_p\sigma_p\Big|,$$

$$|y|_{Q_T}=\Big(\sum_{k=1}^3\sup_{Q_T}|y_k|\Big)\leqslant\sup_\Omega|x_l|+T|a_l|_{Q_T}.$$

Следовательно, $y_l(x,t,\tau)$ являются функциями класса $H^{1+\alpha}$ по x и t и функцией класса $H^{1+\alpha/2}$ по τ. Таким образом, решение $R(x,t)$ задачи 3 принадлежит пространству $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(Q_T)$.

Получим требуемые оценки для $\mathbf{R}$. В силу представления (3.8)

$$\max_{\bar{Q}_T}|R_i|\leqslant\max_{\bar{Q}_T}|R_{i,0}|+T\max_{\bar{Q}_T}|H_i|. \tag{3.14}$$

Принимая во внимание оценки (3.10) и (3.11), получим

$$\max_{\bar{Q}_T}\Big|\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\Big|\leqslant\sqrt{3}\exp\left(\left|\int\limits_0^T|\mathbf{a}_x(x,\tau|_\Omega d\tau\right|\right)\left(\sum_{k=1}^3\max_{\bar{Q}_T}\Big|\frac{\partial R_{i,0}}{\partial x_k}\Big|+T\sum_{k=1}^3\max_{\bar{Q}_T}\Big|\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\Big|\right). \tag{3.15}$$

Далее, используя оценки (3.10), (3.13), получим

$$\Big\langle\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\Big\rangle_x^\alpha\leqslant\Big\langle\frac{\partial R_{0,i}}{\partial x_j}\Big\rangle_x^\alpha\sqrt{3}\exp\left(\left|\int\limits_0^T|\mathbf{a}_x(x,\tau)|_\Omega d\tau\right|\right)+TC. \tag{3.16}$$

Далее,

$$\Big\langle R_i(x,t)\Big\rangle_t^{\frac{1+\alpha}{2}}\leqslant|t_1-t_2|^{(1-\alpha)/2}\left(\max\left|\frac{\partial y(x,t,0)}{\partial t}\right|(\max|R_{0,x}|+T\max|H_x|)+\right.$$
$$\left.+\max|H|\right)\leqslant T^{(1-\alpha)/2}C. \tag{3.17}$$

Складывая неравенства (3.14)–(3.17), приходим к требуемой оценке для $|R_i|^{(1+\alpha)}_{Q_T}$.

Займемся оценкой для $\langle R_{i,x_j}\rangle_t^{a_1/2}$.

$$|R_{i,x_j}(x,t_1)-R_{i,x_j}(x,t_2)|\leqslant\sum_{k=1}^3\left|\frac{\partial R_{0i}}{\partial y_k}(y(x,t_1,0)-\frac{\partial R_{0i}}{\partial y_k}(y(x,t_2,0)\right|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_1,0)\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^3\left|\frac{\partial R_{0i}}{\partial y_k}(y(x,t_2,0)\right|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_1,0)-\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_2,0)\right|+\int\limits_0^{t_1}\sum_{k=1}^3\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_k}(y(x,t_1,\varsigma)-\frac{\partial H_i}{\partial y_k}(y(x,t_2,\varsigma)\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_1,\varsigma)\right|d\varsigma+\int\limits_0^{t^1}\sum_{k=1}^3\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_k}(y(x,t_2,\varsigma)\right|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_1,\varsigma)-\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_2,\varsigma)\right|d\varsigma+$$
$$+\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^3\frac{\partial H_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x,t_2,\varsigma)d\varsigma\right|. \tag{3.18}$$

Принимая во внимание оценки (3.10)–(3.13), а также оценки лемм 3.1 и 3.2, имеем

$$|R_{i,x_j}(x,t_1)-R_{i,x_j}(x,t_2)|\leqslant|t_1-t_2|^\alpha|\mathbf{R}_0|^{(1+\alpha)}\cdot\Big(\sqrt{3}|\mathbf{a}|^\alpha_{Q_t}\exp\Big(\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)\Big(\exp\Big(\alpha\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)+$$

$$+|\mathbf{a}|_{Q_t}\Big(t_1|\mathbf{a}|^\alpha_{Q_{t_1}}\exp\Big(\alpha\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)+|t_1-t_3|^{1-\alpha}\Big)\exp\Big(\int\limits_0^{t_1}\|A\|d\tau\Big)+$$

$$+t_1|H|^{1+\alpha}_{\bar{Q}_{t_1}}|\mathbf{a}|_{Q_{t_1}}\sqrt{3}\exp\Big(\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)\Big(|t_1-t_2|\exp\Big(\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)+$$

$$+\Big(t_1|\mathbf{a}|^\alpha_{Q_{t_1}}\exp\Big(\alpha\int\limits_0^{t_1}|\mathbf{a}|_x d\tau\Big)|t_1-t_2|^\alpha(|\mathbf{a}|^\alpha_{Q_{t_1}})^\alpha\Big),$$

откуда и следует последняя оценка леммы 3.3. □

Наконец, последняя, четвертая, задача состоит в нахождении концентрации c по формуле

$$c(x,t)=c_0(x)-\int\limits_0^t\phi(x,\varsigma)d\varsigma, \tag{3.19}$$

где

$$\phi(x,t)=\tilde{c}(1-\tilde{c})\mathtt{div}\mathbf{U}+(\mathbf{R}-F(\tilde{c})\mathbf{U})((1-2\tilde{c})\mathbf{U}+\mathbf{w}).$$

Лемма 3.4. *Пусть $c_0(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда $c(x,t)$, представленное формулой (3.19), принадлежит классу $H^{1+\alpha,1+(1+\alpha)/2}_{x,\quad t}(\overline{Q_T})$. При этом справедлива оценка*

$$|c|^{(1+\alpha)}_{\bar{Q}_t}\leqslant(|c_0|^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}}(1+(\textit{diam}\ \Omega)^{1-\alpha})+C_4T+c_5T^{(1-\alpha)/2}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что подынтегральное выражение $\phi(x,t)$ в (3.19) принадлежит классу $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$ и оценивается через нормы начальных функций и функций $\tilde{c},\mathbf{U},\mathbf{R},\mathbf{w}$ в соответствующих пространствах.

4. Разрешимость задачи (3.1)–(3.7)

Локальное по времени существование решения вспомогательной задачи (3.1)–(3.7) доказывается на основе теоремы применения Тихонова-Шаудера к оператору $\Phi:(\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{R}},\tilde{c})\to(\mathbf{U},\mathbf{w},\mathbf{R},c)$.

Теорема (Тихонов-Шаудер [10])**.** *Пусть $\Lambda-$ компактное замкнутое выпуклое множество банахова пространства **B**. Если оператор Φ отображает Λ в Λ непрерывно в норме **B**, то он имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Λ.*

В качестве банахова пространства **B** будем рассматривать пространство

$$H^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\times\Big(H^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\Big)^3\times\Big(H^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\Big)^3\times H^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}_{t^*})$$

скалярных функций θ, вектор-функций $\mathbf{w},\mathbf{R}$ и скалярных функций c, где $\beta\in(0,\alpha)$. Положительная величина t^* из промежутка $(0,T]$ будет определена позднее.

Норму в **B** определим как сумму норм всех скалярных компонент:

$$\|\theta,\mathbf{w},\mathbf{R},c\|=|\theta|^{(2+\beta)}+\sum_{i=1}^3|w_i|^{(1+\beta)}+\sum_{i=1}^3|R_i|^{(1+\beta)}+|c|^{(1+\beta)}.$$

Множество $\Lambda(t^*)$ построим следующим образом: $\Lambda(t^*)$ состоит из упорядоченных наборов 8 функций $(\theta, \mathbf{w}, \mathbf{R}, c)$ из пространства

$$H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*}) \times \left(H^{1+\alpha_1,\frac{1+\alpha_1}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3 \times \left(H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3 \times H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})$$

таких, что

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) \in H^{3+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ |\theta|^{(2+\alpha)} \leqslant K_1 = |\theta_0|^{(3+\alpha)}(2 + (\mathtt{diam}\ \Omega)^{1-\alpha});$$

$$w_i(x,0) = w_{i,0}(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ |w_i|^{(1+\alpha_1)} \leqslant K_2 = |w_{0,i}|^{(2+\alpha)}(2 + (\mathtt{diam}\ \Omega)^{1-\alpha_1});$$

$$R_i(x,0) = R_{i,0}(x) \in H^{1+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ |R_i|^{(1+\alpha)} \leqslant K_3 = 7|R_{i,0}|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}};$$

$$c(x,0) = c_0(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\quad 2\delta \leqslant c_0(x) \leqslant 1 - 2\delta,$$

$$|c|^{(1+\alpha)} \leqslant K_5 = (|c_0|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}}(2 + (\mathtt{diam}\ \ \Omega)^{1-\alpha}),\quad \delta \leqslant c(x,t) \leqslant 1 - \delta.$$

Кроме того, начальные функции удовлетворяют условиям согласования из лемм 3.1 и 3.2. Построенное множество, как легко убедиться, является компактным замкнутым выпуклым подмножеством банахова пространства $\mathbf{B}$.

Лемма 4.1. *Оператор Φ отображает множество $\Lambda(t^*)$ в себя при подходящем выборе t^*.*

Доказательство. Используя лемму 3.1, получаем оценку

$$|\theta|^{(2+\alpha)}_{Q_t} \leqslant |\theta_0|^{(3+\alpha)}(1+(\mathtt{diam}\ \Omega)^{1-\alpha})+(t^{\varepsilon_1}+t^{\varepsilon_2}+t^{\varepsilon_3}+t^{\varepsilon_4}+t^{\varepsilon_5}+t^{\varepsilon_6}+t^{\varepsilon_7})\cdot C\Big(|\theta_0|^{(3+\alpha)}+|G_1|^{(\alpha)}_{Q_t}\Big),$$

которая позволяет выбрать t_1 так, чтобы $|\theta|^{(2+\alpha)}_{\overline{Q}_{t_1}} \leqslant K_1$.

Аналогично, используя лемму 3.2, получим оценку

$$|w_i|^{(1+\alpha_1)}_{Q_t} \leqslant |w_{0,i}|^{(2+\alpha)}(1+(\mathtt{diam}\ \Omega)^{1-\alpha_1})+(t^{\varepsilon_8}+t^{\varepsilon_9}+t^{\varepsilon}_{10}+t^{\varepsilon}_{11})\cdot C\Big(|\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}+|\mathbf{G}|^{(\alpha)}+\langle G_i\rangle^{a_1/2}_t\Big),$$

которая позволяет выбрать t_2 так, чтобы $|w_i|^{(1+\alpha_1)}_{\overline{Q}_{t_2}} \leqslant K_2$.

Первая оценка леммы 3.3 позволяет выбрать t_3 так, чтобы $|R_i|^{(1+\alpha)}_{\overline{Q}_{t_3}} \leqslant K_3$. Вторая оценка леммы 3.3 дает $\langle R_{i,x_j}\rangle^{a_1/2}_t \leqslant 1$ при $t < t_4$ для некоторого t_4.

Наконец, из леммы 3.4 следует, что при $t < t_5$ $|c|^{(1+\alpha)} \leqslant K_5$.

Итак, выбор $t^* = \min\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ завершает доказательство леммы 4.1. □

Лемма 4.2. *Оператор Φ непрерывен в норме пространства $\boldsymbol{B}$.*

Для проверки непрерывности оператора в выбранной норме достаточно оценить

$$|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}|^{(2+\beta)},\ \ |w_i^{(1)} - w_i^{(2)}|^{(1+\beta)},\ \ |R_i^{(1)} - R_i^{(2)}|^{(1+\beta)},\ \ |c^{(1)} - c^{(2)}|^{(1+\beta)}$$

через

$$|\tilde{\theta}^{(1)} - \tilde{\theta}^{(2)}|^{(2+\beta)},\ \ |\tilde{w}_i^{(1)} - \tilde{w}_i^{(2)}|^{(1+\beta)},\ \ |\tilde{R}_i^{(1)} - \tilde{R}_i^{(2)}|^{(1+\beta)},\ \ |\tilde{c}^{(1)} - \tilde{c}^{(2)}|^{(1+\beta)}.$$

Оценки для $|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}|^{(2+\beta)}$, $|w_i^{(1)} - w_i^{(2)}|^{(1+\beta)}$ вытекают из оценок лемм 3.1 и 3.2 соответственно, оценка для $|\tilde{c}^{(1)} - \tilde{c}^{(2)}|^{(1+\beta)}$ очевидна, а для получения оценки $|R_i^{(1)} - R_i^{(2)}|^{(1+\beta)}$ воспользуемся представлением (3.8). Тогда

$$(R_i^{(1)} - R_i^{(2)}) = R_{i,0}(\mathbf{y}_1(x,t,0)) - R_{i,0}(\mathbf{y}_2(x,t,0)) + \int\limits_0^t (H_i(\mathbf{y}_1(x,t,\tau),\tau) - H_i(\mathbf{y}_2(x,t,\tau),\tau)d\tau,$$

где $\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2$ определяются по формуле (3.9) с различными функциями в правой части дифференциального уравнения. Из последнего равенства требуемая оценка следует очевидным образом.

Применяя теорему Тихонова-Шаудера к оператору Φ на замкнутом выпуклом компактном подмножестве Λ банахова пространства $\mathbf{B}$ и принимая во внимание тот факт, что гладкость функций, составляющих "неподвижную точку" оператора Φ, в силу уравнений системы фактически выше, чем определяемая пространством $\mathbf{B}$, получим следующий результат.

Утверждение 4.1. *Задача (3.1)–(3.7), в которой* $2\delta < c_0 < 1 - 2\delta$,

$$\theta_0 \in H^{3+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ \boldsymbol{w}_0 \in (H^{2+\alpha_1}(\overline{\Omega}))^3,\ \ \boldsymbol{R}_0 \in (H^{1+\alpha}(\overline{\Omega}))^3,\ \ c_0 \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

и выполнены необходимые условия согласования, в частности, те, что указаны в лемме 3.2, имеет для достаточно малого $t^* \in (0,T)$ *решение*

$$\theta \in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*}),\ \ \boldsymbol{w} \in \left(H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3,\ \ \boldsymbol{R} \in \left(H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3,\ \ c \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T}),$$

$$\delta < c < 1 - \delta.$$

5. Основной результат

Для того чтобы сформулировать теорему существования и единственности решения основной задачи, восстановим скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ по формулам (2.2), где $\mathbf{U} = L\nabla\theta$. Тогда из утверждений 2.1 и 4.1 следует

Теорема. *Задача (1.1)–(1.7), в которой*

$$\theta_0 \in H^{3+\alpha},\ \ \boldsymbol{u}_0 \in (H^{2+\alpha_1}(\overline{\Omega}))^3,\ \ \boldsymbol{v}_0 \in (H^{2+\alpha_1}(\overline{\Omega}))^3,\ \ c_0 \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ 2\delta < c_0 < 1 - 2\delta,$$

где $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$, δ *— малое положительное число и выполнены необходимые условия согласования, имеет для достаточно малого* $t^* \in (0,T)$ *решение*

$$\theta \in H^{3\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*}),\ \ c \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*}),\ \ \boldsymbol{u} \in \left(H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3, \boldsymbol{v} \in \left(H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t^*})\right)^3,$$

такое, что $\delta < c < 1 - \delta$ *в* Q_{t^*}.

Классическое решение задачи (1.1)–(1.7) единственно на всем интервале времени существования.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы"(2009-2010 гг.), №2.2.2.4/4278 и Федеральной целевой программы "Научно-педагогические кадры инновационной России госконтракт №14.740.11.0355.

Список литературы

[1] V.V.Pukhnachov, O.V.Voinov, Mathematical model of motion of emulsion under effect of thermocapillary forces and microacceleration, Abstracts of Ninth European Symposium on Gravity Dependent Phenomena in Phisical Sciences, Berlin, 1995, 32-33.

[2] V.V.Pukhnachov, O.V.Voinov, A.G.Petrova, E.N.Zhuravleva, O.A.Gudz, Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration, Interfacial Fluid Dynamics and Transport Processes, Lecture Notes on Physics, Springer, 2003, 325-354.

[3] А.Г.Петрова, Задача непротекания для одномерного движения эмульсии, *СибЖим.*, **X**(2007), 3(31), 128-136.

[4] А.Г.Петрова, О начально-краевой задаче для одномерного движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил, *СибЖим*, **XII**(2009), №2(38), 61-70.

[5] А.И.Вольперт, А.И.Худяев, О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений, *Мат. сб.*, **87**(1972), №4, 27-37.

[6] О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967.

[7] В.А.Солонников, О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса, *Тр. МИАН СССР*, **73**(1964), 221–291.

[8] С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов, В.Н.Монахов, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, 1983.

[9] О.А.Ладыженская, В.А. Солонников, Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей, *Записки научного семинара ЛОМИ АН СССР*, **52**(1975), 52–109.

[10] Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц, Линейные операторы. Общая теория, М., 1962.

On the Initial-Boundary Problem for Thermocapillary Motion of an Emulsion in Space

Anna G. Petrova

The paper is devoted to the study of the initial-boundary problem for thermocapillary motion of an emulsion in closed bounded domain with sufficiently smooth boundary in the absence of gravity. With the use of Tikhonov-Shauder fixed point theorem the local in time solvability to the problem with zero mean volume velocity of the mixture and zero heat flux on the boundary is proved.

Keywords: thermocapillary motion, emulsion, initial-boundary problem, existence and uniqueness of solution.