УДК 517.55

Формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами

Давлатбай Х. Джумабаев*
Национальный университет Узбекистана,
Ташкент, Вузгородок, 700174,
Узбекистан

Получена 18.05.2010, окончательный вариант 25.08.2010, принята к печати 10.10.2010

Доказаны теорема Привалова, формула Сохоцкого-Племеля, теорема о скачке для интеграла Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях пространства $\mathbb{C}^n$ с сингулярными ребрами на границе.

Ключевые слова: интеграл Бохнера-Мартинелли, формула Сохоцкого-Племеля, коническое ребро.

Хорошо известно граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с гладкой или кусочно-гладкой границей (см., например, [1]). В данной заметке мы изучаем его поведение в областях, граница которых содержит конические ребра. Для границ с коническими точками его поведение рассмотрено в [2].

Введем следующие обозначения.

Будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$ для $j = 1, \dots, n$. То есть $(z_1, ..., z_n) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. А $x = (x_1, ..., x_{2n})$, $x^{'} = (x_1, ..., x_{p+1})$, $x^{''} = (x_{p+3}, ..., x_{2n})$, $x = (x^{'}, x_{p+2}, x^{''})$.

Рассмотрим гладкую поверхность Σ в $\mathbb{R}^{p+2} \setminus \{0\}$ с сингулярной точкой в начале координат, заданную так:

$$\Sigma = \{(rx', r) \in \mathbb{R}^{p+2} : \ x' \in X',\ r \in [0, R)\}. \tag{1}$$

Точки $x' = (x_1, \dots, x_{p+1})$ изменяются на компактной гладкой гиперповерхности $X^{'}$ в $\mathbb{R}^{p+1}$, которая не содержит начала координат. Например, X' может быть p-мерной сферой с центром в нуле.

Будем далее предполагать, что $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \ \rho(x') = 1\}$, где ρ есть вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ класса C^1, удовлетворяющая условиям $\nabla\rho \neq 0$ на X' и $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ для всех $\lambda > 0$ с некоторой константой $h > 0$.

Начало координат является особой конической точкой для Σ.

Используя (1), легко найти определяющую функцию гладкой части Σ. Действительно, для $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ получим, что

$$\rho\left(\frac{x'}{x_{p+2}}\right) = 1,$$

а однородность функции ρ дает

$$\Sigma = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \ \psi(x', x_{p+2}) = 0,\ x_{p+2} \in [0, R)\},$$

где $\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (x_{p+2})^h$. Пусть

$$S = \Sigma \times X^{''}, \tag{2}$$

*davlat2112@rumblet.ru

где $X^{''}$ — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^q$, $p+1+q=2n-1$. Таким образом, S является гиперповерхностью в $\mathbb{C}^n$ с коническим ребром $F = O^{'} \times X^{''}$ ($O^{'} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{p+2}$).

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде

$$\partial D = Y \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

где Y является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S (с разными p и q), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса (см., например, [3]).

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N=1$, т. е. $\partial D = Y \cup S$, где

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : z = (rx', r, x''),\ x' \in X',\ x'' \in X'',\ r \in [0,R)\}. \tag{3}$$

Напомним определение интеграла Бохнера-Мартинелли. Пусть функция f интегрируема на ∂D ($f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$), т.е. f интегрируема на гладкой части $\partial D \setminus F$. Введем ядро Бохнера-Мартинелли

$$U(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k] = d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n$.

Интегралом Бохнера-Мартинелли назовем интеграл вида

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z)$$

для $z \notin \partial D$.

Если функция f голоморфно продолжается в D, то F совпадает с этим голоморфным продолжением. Для областей с кусочно-гладкой границей это утверждение является классическим интегральным представлением Бохнера-Мартинелли. Для областей с коническими ребрами оно легко получается с помощью аппроксимации D областями с гладкими границами.

1. Аналог теоремы Привалова для интеграла Бохнера-Мартинелли

В этом пункте рассматривается аналог теоремы Привалова, связанный с поведением интеграла Бохнера-Мартинелли при переходе через границу области вблизи конического ребра S. Для гладких гиперповерхностей ∂D это утверждение см. в [1, § 2]. Для областей с коническими особыми точками на границе оно рассмотрено в [2].

Точку $z^0 \in \partial D$ назовем точкой Лебега для функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} \int\limits_{\partial D \cap B(z^0,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z^0)|\, dS = 0,$$

где $B(z^0,\varepsilon)$ — шар с центром в точке z^0 и радиусом ε, а dS — поверхностная мера Лебега на гладкой части ∂D.

Если z^0 — точка гладкости для ∂D, то данное определение есть обычное определение точки Лебега. Для точек, лежащих на коническом ребре, данное определение новое. Во всяком случае, если функция f непрерывна в точке z^0, то эта точка является точкой Лебега для f.

Теорема 1. *Если z^0 — точка Лебега функции $f \in L^1(\partial D)$, тогда для точек $z \in D$, лежащих на оси конуса, справедливо равенство*

$$\lim_{z\to z^0}\left(\int\limits_{\partial D}(f(\zeta)-f(z^0))U(\zeta,z)-\int\limits_{\partial D\setminus B(z^0,|z-z^0|)}(f(\zeta)-f(z^0))U(\zeta,z^0)\right)=0.$$

Доказательство. Если точка z^0 лежит на гладкой части ∂D, то поведение интеграла Бохнера-Мартинелли вблизи z^0 хорошо изучено (см. [1]). Мы рассмотрим случай, когда z^0 лежит на коническом ребре $F = O^{'} \times X^{''}$.

Можно считать, что $z^0 = 0$, а $\partial D = S$. Рассмотрим гиперплоскость $H = \{z \in \mathbb{C}^n : x_{p+2} = 0\}$, проходящую через начало координат и ортогональную оси конуса. В окрестности 0 коническая поверхность S задается уравнениями

$$\begin{cases} y' = u' \\ y_{p+2} = \sqrt[h]{\rho(u')} \\ y'' = u'', \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} z = (0', x_{p+2}, 0'') \\ \zeta = (y', y_{p+2}, y'') \\ w = (u', 0, u''), \\ \zeta = \zeta(w). \end{cases}$$

Фиксируем $(2n-1)$-мерный шар B' с центром в нуле и радиусом $\varepsilon_0 > 0$ в H такой, что выполняется неравенство

$$|w-z| \leqslant c\,|\zeta(w)-z| \tag{4}$$

для всех $w \in B'$.

Для того чтобы увидеть, что константа $c > 0$ с данным свойством существует, заметим, что и коническая поверхность, и данная оценка инвариантны относительно растяжения (гомотетии), поэтому можно зафиксировать z. Для фиксированного z получим очевидное неравенство $|w-z| \leqslant c\,|z_\Pi - z| \leqslant c\,|\zeta(w)-z|$, где z_Π — проекция z на коническую поверхность в сечении конуса плоскостью, проходящей через три точки 0, z и w.

Положим $|z| = \varepsilon$. Запишем

$$\int_S (f(\zeta)-f(0))U(\zeta,z) - \int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)}(f(\zeta)-f(0))U(\zeta,0) =$$
$$= \int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)}(f(\zeta)-f(0))(U(\zeta,z)-U(\zeta,0)) + \int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)}(f(\zeta)-f(0))U(\zeta,z)$$

и оценим второй интеграл с правой стороны. Как и выше, имеем

$$c\,|\zeta(w)-z| \geqslant |w-z| \geqslant |z| = \varepsilon,$$

поэтому

$$\frac{1}{|\zeta(w)-z|^{2n-1}} \leqslant \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{2n-1}.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)}(f(\zeta)-f(0))U(\zeta,z)\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{2n-1}}\int\limits_{S\cap B(0,\varepsilon)}|f(\zeta)-f(0)|\,dS \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, поскольку 0 — точка Лебега для функции f.

Вернемся к первому интегралу и рассмотрим коэффициенты дифференциальной формы $U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)$, для которых

$$\frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{\bar{\zeta}_j}{|\zeta|^{2n}} = \bar{\zeta}_j\Big(\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta|^{2n}}\Big) - \frac{\bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Последнее слагаемое в правой стороне легко оценивается, а именно:

$$\frac{|\bar{z}_j|}{|\zeta - z|^{2n}} \leqslant c^{2n}\,\frac{|z|}{|w - z|^{2n}} = c^{2n}\,\frac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}.$$

Первая разность оценивается так

$$|\bar{\zeta}_j|\Big|\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta|^{2n}}\Big| = |\bar{\zeta}_j|\,\frac{||\zeta| - |\zeta - z||}{|\zeta||\zeta - z|}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{|\zeta|^k|\zeta - z|^{2n-1-k}} =$$
$$= |z|\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{|\zeta|^k|\zeta - z|^{2n-k}}.$$

Так как $\zeta \notin B(0,\varepsilon)$ в первом интеграле, то получаем $|\zeta| \geqslant |w|$. Более того, дробь $\dfrac{|w|}{|w - z|}$ ограничена снизу положительной константой, поскольку это частное равно косинусу угла между векторами w и $w - z$, а этот угол не может быть близок к $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$|U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)| \leqslant C\,\frac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}\,dS$$

для всех $\zeta \in S \setminus B(0,\varepsilon)$. По лемме 2 из [2] заключаем, что $dS \leqslant c\,(x_{p+2})^p d\sigma(x') dx_{p+3} dx''$ т.е. $dS \leqslant C\,ds(w)$, где $ds(w)$ — форма объема для гиперплоскости H, а $d\sigma(x')$ — мера Лебега на X' (в [2] лемма 2 приведена для случая конических особых точек, но она очевидным образом переносится на наш случай — конических ребер).

Поэтому

$$\Big|\int\limits_{S\setminus B(0,\varepsilon)}(f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z) - U(\zeta, 0))\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{H\setminus B(0,\varepsilon)}|f(\zeta(w)) - f(0)|\,\frac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}\,ds(w) \leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{H}|f(\zeta(w)) - f(0)|\,\frac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}\,ds(w)$$

для некоторой константы C, не зависящей от ε.

Выражение $\dfrac{|z|}{(|w|^2 + |z|^2)^n}$ есть ядро Пуассона для полупространства в $\mathbb{C}^n$ с точностью до постоянного множителя.

Так как 0 — точка Лебега для функции f, то лемма 2 из [2] показывает, что точка 0 является точкой Лебега для функции $f(\zeta(w))$ на H. Поэтому, применяя теорему 1.25 из [4], получаем, что последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. $\square$

2. Формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли

Для данной точки $z \in \partial D$ обозначим $\mathcal{C}_z$ — касательный конус к области D в точке z. Из вида сингулярности границы находим, что его величина равна телесному углу $\tau(z) \in [0,1]$ для $\mathcal{C}_z$. Если ∂D является гладкой в точке z, то $\tau(z) = \dfrac{1}{2}$. Для точек z, лежащих на коническом ребре, $0 < \tau(z) < 1$.

Для точек $z \in \partial D$ особый интеграл Бохнера-Мартинелли от f равен

$$F_s(z) = \text{v.p.} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta)U(\zeta, z).$$

Лемма 1. *Для каждой точки $z \in \partial D$ справедливо равенство*

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial D} U(\zeta, z) = \tau(z).$$

Данное утверждение для областей с кусочно-гладкой границей доказано в [1, лемма 2.1].

Доказательство. По определению

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial D} U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} U(\zeta, z).$$

Но

$$\int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} U(\zeta, z) = \int\limits_{\partial (D \setminus B(z,\varepsilon))} U(\zeta, z) + \int\limits_{\partial B^+(z,\varepsilon)} U(\zeta, z),$$

где $\partial B^+(z,\varepsilon)$ — часть сферы $\partial B(z,\varepsilon)$, лежащая в D, т. е. $\partial B^+(z,\varepsilon) = D \cap \partial B(z,\varepsilon)$. Знак во втором слагаемом изменился, поскольку ориентация $\partial B(z,\varepsilon)$ (индуцированная ориентацией шара $B(z,\varepsilon)$) противоположна ориентации ∂D. Так как $z \notin D \setminus B(z,\varepsilon)$, а форма $U(\zeta, z)$ замкнута, то интеграл

$$\int\limits_{\partial (D \setminus B(z,\varepsilon))} U(\zeta, z) = 0,$$

отсюда

$$\int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} U(\zeta, z) = \int\limits_{\partial B^+(z,\varepsilon)} U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n \varepsilon^{2n}} \int\limits_{\partial B^+(z,\varepsilon)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Из леммы 3.5 ([1]) следует, что сужение формы

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta \Big|_{\partial B(z,\varepsilon)} = \varepsilon^{2n} 2^{n-1} i^n d\sigma,$$

где $d\sigma$ есть элемент поверхности единичной сферы.

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} U(\zeta, z) = \frac{\operatorname{vol} \partial B^+(z,\varepsilon)}{\operatorname{vol} \partial B(z,\varepsilon)} \to \tau(z)$$

при $\varepsilon \to +0$. □

Обозначим $m_z(f)(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на ∂D в точке $z \in \partial D$, т. е.

$$m_z(f)(\delta) = \sup_{\zeta \in \partial D \cap B(z,\delta)} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Функция f на поверхности ∂D удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, если

$$\int\limits_0^1 m_z(f)(\delta)\,\frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Теорема 2. *Если $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, то особый интеграл Бохнера-Мартинелли $F_s(z)$ существует и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля*

$$F^+(z) = (1 - \tau(z))f(z) + F_s(z),$$
$$F^-(z) = -\tau(z)f(z) + F_s(z),$$

где $F^+(z)$ — граничное значение интеграла Бохнера-Мартинелли F изнутри области D, а $F^-(z)$ — граничное значение данного интеграла извне области.

Доказательство полностью повторяет доказательство формул Сохоцкого-Племеля из [1, § 2], используя теорему 1 и лемму 1. □

3. Теорема о скачке для интеграла Бохнера-Мартинелли

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ и z^0 — точка Лебега для функции f. Тогда справедлива формула*

$$\lim_{z^\pm \to z^0} \left(F^+(z^+) - F^-(z^-)\right) = f(z^0)$$

для точек z^+ и z^-, лежащих на оси конуса в D и $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, соответственно, таких что $|z^+| = |z^-|$.

Для областей с гладкой границей теорема 3 приведена [1, § 3], для областей с кусочно-гладкой границей она доказана в [5].

Доказательство. Использование неравенства (4) позволяет применить схему доказательства теоремы о скачке из [1, теорема 3.1].

Пусть $\partial D = Y \cup S$.

Если точка $z^0 \in \partial D$ — точка гладкости, то утверждение теоремы следует из [1].

Рассмотрим точки из S, в которых нарушается гладкость. Пусть точка $z^0 \in S$ лежит на коническом ребре F. Можно считать, что $z^0 = 0$. Рассмотрим гиперплоскость $H = \{z \in \mathbb{C}^n : x_{p+2} = 0\}$, проходящую через начало координат и ортогональную оси конуса. В окрестности 0 коническая поверхность S задается уравнениями

$$\begin{cases} y' = u', \\ y_{p+2} = \sqrt[h]{\rho(u')}, \\ y'' = u'', \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} z^{\pm} = (0', \pm x_{p+2}, 0''), \\ \zeta = (y', y_{p+2}, y''), \\ w = (u', 0, u''), \\ \zeta = \zeta(w). \end{cases}$$

Фиксируем $(2n-1)$-мерный шар B' с центром в нуле и радиусом $\varepsilon_0 > 0$ в H такой, что выполняется неравенство

$$|w - z^{\pm}| \leqslant c\,|\zeta(w) - z^{\pm}| \tag{5}$$

для всех $w \in B'$, справедливость которого доказывается так же, как справедливость неравенства (4).

Рассмотрим разность

$$F^+(z^+) - F^-(z^-) = \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z^+) -$$
$$- \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z^-) + f(z^0) \int\limits_{\partial D} (U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)).$$

Так как

$$\int\limits_{\partial D} (U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 1,$$

нам достаточно доказать, что

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0.$$

В интеграле

$$\int\limits_{\partial D \setminus B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-))$$

можно сделать предельный переход под знаком интеграла, поскольку $z^0 \notin \partial D \setminus B(0, \varepsilon_0)$

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \int\limits_{\partial D \setminus B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0.$$

Осталось рассмотреть этот интеграл по множеству $S \cap B(0, \varepsilon_0)$.

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \int\limits_{S \cap B(0,\varepsilon_0)} (f(\zeta) - f(z^0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) = 0. \tag{6}$$

Так как $B' = B(0, \varepsilon_0) \cap H$, то в силу неравенства (5), наложенного при выборе шара B', и очевидных неравенств $|\zeta(w)| \leqslant C|w| \leqslant C|w - z^{\pm}|$ получим

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\bar{\zeta}_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar{\zeta}_k}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{|\zeta - z^+|} - \frac{1}{|\zeta - z^-|} \right| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{|\zeta_k|}{|\zeta - z^+|^i |\zeta - z^-|^{2n-i-1}} = \\ &= ||\zeta - z^+| - |\zeta - z^-|||\zeta_k| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{|\zeta - z^+|^{i+1} |\zeta - z^-|^{2n-i}} \leqslant \\ &\leqslant cC^{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{|z^+| + |z^-|}{|w - z^+|^i |w - z^-|^{2n-i}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Поэтому из (7) имеем

$$\left|\frac{\bar{\zeta}_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar{\zeta}_k}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant \frac{d|z^\pm|}{|w - z^\pm|^{2n}},$$

где d зависит лишь от C, c. Точно так же

$$\left|\frac{\bar{z}_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar{z}_k}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\bar{z}_k|}{|\zeta - z^+|^{2n}} + \frac{|\bar{z}_k|}{|\zeta - z^-|^{2n}} \leqslant \frac{d_1|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}.$$

И, наконец, $d\,S \leqslant d_2\,ds$, где ds — элемент плоскости H (см. доказательство теоремы 1).

Рассмотрим интеграл

$$\left|\int\limits_{S\cap B(0,\epsilon_0)} (f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-))\right| \leqslant$$

$$\leqslant d_3 \int\limits_{B'} \frac{|(f(\zeta(w)) - f(0))||z^+|}{(|w|^2 + |z^+|^2)^n}\,d\,S.$$

Выражение $\dfrac{|z^+|}{(|w|^2 + |z^+|^2)^n}$ есть (с точностью до константы) ядро Пуассона для полупространства. Так как 0 — точка Лебега функции f, то лемма 2 из [2] показывает, что точка 0 является точкой Лебега для функции $f(\zeta(w))$ на H. Поэтому, применяя теорему 1.25 из [4], получаем, что последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. □

Список литературы

[1] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его приложения, Новосибирск, Наука, 1992.

[2] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, Сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками, *Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика*, **7**(2007), вып. 2, 17–32.

[3] Л.Шварц, Анализ, М., Мир, 1972.

[4] И.Стейн, Г.Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.

[5] Д.Х.Джумабаев, Теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей, *Узбекский математический журнал*, (2001), №1, 14–17.

Sokhotskii-Plemelj Formula for the Bochner-Martinelli Integral in Domains with Conical Wedges

Davlatboi Kh. Dzhumabaev

They are proved the Privalov theorem, the Sokhotskii-Plemelj formula and the jump theorem for the Bochner-Martinelli integral in bounded domains of $\mathbb{C}^n$ with singular wedges on the boundary.

Keywords: the Bochner-Martinelli integral,Sokhotskii-Plemelj formula, conical wedge.