УДК 517.55

Критерий асимптотической устойчивости многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

Евгений К. Лейнартас*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.08.2010, окончательный вариант 25.09.2010, принята к печати 30.10.2010

В работе получено необходимое условие устойчивости однородной задачи Коши для многомерного разностного оператора и критерий ее асимптотической устойчивости в терминах, связанных с понятием амебы алгебраической гиперповерхности.

Ключевые слова: задача Коши, многомерный разностный оператор, амеба алгебраической гиперповерхности.

Обозначим через δ_j оператор сдвига по j-й переменной: $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_j+1, \ldots, x_n)$, и будем рассматривать полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами вида $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha \delta^\alpha$, где A — конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$ — n-мерной целочисленной решетки $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_n^{\alpha_n}$. В многомерном случае вопрос о правильной постановке задачи Коши для разностного уравнения ($f(x)$ — неизвестная функция целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, $g(x)$ — заданная)

$$P(\delta) f(x) = g(x) \tag{1}$$

является нетривиальным. Он исследовался в работе [1], а в [2] описание множества $X_0 \subset \mathbb{Z}^n$, на котором можно корректно задавать «начальные» данные

$$f(x) = \phi(x), x \in X_0, \tag{2}$$

дано в терминах, связанных с понятием многогранника Ньютона характеристического многочлена $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$. Кроме того, в [3] приведены формулы для решения через начальные данные $\phi(x)$ и фундаментальное решение $\mathcal{P}(x)$ уравнения (1). В этой работе рассматривается простейший, в некотором смысле, случай, а именно: требуется, чтобы выполнялось следующее ограничение на разностный оператор $P(\delta)$: *существует $m \in A$ такое, что для всех $\alpha \in A$ выполняются неравенства*

$$\alpha_j \leqslant m_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Кратко систему неравенств (3) будем обозначать $\alpha \leqslant m$.

Определение 1. *Целочисленный вектор m, удовлетворяющий условию* (3), *назовем порядком разностного оператора $P(\delta)$.*

Условие (3) означает, что в характеристическом многочлене $P(z)$ моном $c_m z^m$ является "старшим" по каждой переменной z_j. В качестве множества X, на котором будем искать решения уравнения (1), возьмем $\mathbb{Z}^n_+ = \{x \in \mathbb{Z}^n : x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, а множество

*lein@mail.ru

X_0, на котором будем задавать начальные данные (2), в этом случае выглядит следующим образом:

$$X_0 = \{x \in \mathbb{Z}^n : x \geqslant 0, \text{ но } x \ngeqslant m\},$$

где соотношение $x \ngeqslant m$ означает, что хотя бы одно из неравенств системы $x \geqslant m$ не выполняется.

Такой выбор множеств X и X_0 гарантирует существование и единственность решения задачи (1)–(2). Нас интересует зависимость этого решения от начальных данных $\phi(x)$. В [3] показано, что всякое решение задачи (1)–(2) можно представить в виде суммы $f(x) = u(x) + v(x)$, где $u(x)$ — решение однородной задачи

$$P(v)u(x) = 0, x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{4}$$

$$u(x) = \phi(x), x \in X_0, \tag{5}$$

а $v(x)$ — частное решение (не зависящее от $\phi(x)$) уравнения (1). Поэтому при исследовании зависимости от начальных данных (неоднородной) задачи (1)–(2) естественным представляется исследовать зависимость от начальных данных решений однородной задачи (4)–(5).

Обозначим $\|u\|_0 = \sup\limits_{x \in X_0} |u(x)|$ и $\|u\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{Z}^n_+} |u(x)|$.

Определение 2. *Будем называть задачу* (4) – (5) *для разностного оператора* $P(\delta)$ *устойчивой, если существует константа* $k > 0$ *такая, что для любых начальных данных таких, что* $\|\varphi\|_0 < +\infty$, *выполняется условие* $\|u\| \leqslant k\|\varphi\|_0$.

В одномерном случае имеем $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m} c_\alpha z^\alpha$, $c_m \neq 0$, а критерии устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах корней характеристического уравнения $P(z) = 0$ формулируются следующим образом:

1. *Разностный оператор* $P(\delta)$ *устойчив тогда и только тогда, когда все корни* λ_j *характеристического многочлена не превосходят по модулю единицу:* $|\lambda_j| \leqslant 1$, *а если для некоторого* j *имеем* $|\lambda_j| = 1$, *то* λ_j *— простой корень.*

2. *Разностный оператор асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда все корни* λ_j *характеристического многочлена по модулю меньше единицы:* $|\lambda_j| < 1$.

В данной работе многомерный аналог условия "все корни характеристического многочлена по модулю меньше единицы" удается сформулировать в терминах теории амеб алгебраических множеств. А вот каким может быть аналог условия "$|\lambda_j| \leqslant 1$ и, если для некоторого j имеем $|\lambda_j| = 1$, то λ_j — простой корень" — вопрос открытый.

Отметим, что если в задаче (1)–(2) фиксировать начальные данные и менять в правой части $g(x)$, то возникает вопрос о том, как при этом меняется решение $f(x)$. Соответствующие проблемы устойчивости уравнения (1) ставились и рассматривались в [4]. Для двух переменных проблема устойчивости цифрового рекурсивного фильтра решена в [5].

Многогранником Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A.

Амебой многочлена $P(z)$ или, эквивалентно, алгебраической гиперповерхности $V = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$ называется образ V при логарифмическом проектировании

$$\mathrm{Log} : (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|).$$

Обозначается амеба через $\mathcal{A}_P$ или $\mathcal{A}_V$. Отметим необходимые нам факты (см. [6]), касающиеся амеб:

1. Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ состоит из конечного числа связных компонент $\{E_\nu\}$, каждая из которых открыта и выпукла, а ее прообраз $\mathrm{Log}^{-1}(E_\nu)$ есть область сходимости соответствующего ряда Лорана для рациональной функции $1/P(z)$:
$$\frac{1}{P(z)} = \sum_x \frac{\mathcal{P}_\nu(x)}{z^x}.$$
Коэффициенты данного разложения $\mathcal{P}_\nu(x)$ представляются интегралом
$$\mathcal{P}_\nu(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\nu} \frac{z^x}{P(z)} \frac{dz}{z},$$
где интегрирование ведется по n-мерному циклу $\Gamma_\nu = \mathrm{Log}^{-1}\,\xi$, а $\xi \in E_\nu$. Отметим также, что функция $\mathcal{P}_\nu(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ является фундаментальным решением разностного оператора $P(\delta)$, т.е. для всех $z \in \mathbb{Z}^n$ выполняется соотношение
$$P(\delta)\mathcal{P}_\nu(x) = \delta_0(x), \text{где } \delta_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
Действительно, имеем
$$P(\delta)f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\nu} \frac{\left(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha z^{x+\alpha}\right)}{P(z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\nu} z^x \frac{dz}{z} = \delta_0(x).$$

2. Число компонент $\{E_\nu\}$ дополнения амебы не меньше, чем число вершин многогранника N_P, так как всякой его вершине ν соответствует непустая компонента E_ν дополнения, причем *двойственный конус* к вершине ν многогранника N_P
$$C_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \nu\rangle = \max_{\alpha \in N_P} \langle x, \alpha\rangle$$
является асимптотическим для этой компоненты, т.е. для любой точки $\xi \in E_\nu$ справедливо включение $\xi + C_\nu \subset E_\nu$ и никакой другой содержащий C_ν конус этому свойству не удовлетворяет.

3. Если ν — вершина многогранника Ньютона N_P, то коэффициенты $\mathcal{P}_\nu(x)$ разложения рациональной функции $\dfrac{1}{P(z)}$ в ряд Лорана можно найти следующим образом:
$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha} = \frac{1}{c_m z^m (1 - \tilde{P}(z))} = \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}(z))^k = \sum_\beta \frac{\mathcal{P}_\nu(\nu+\beta)}{z^{\nu+\beta}},$$
где $\beta \in \mathbb{Z}^n \cap K_\nu$, а K_ν — конус, построенный на векторах $\nu - \alpha, \alpha \in A$. Таким образом, для x, удовлетворяющих условию $x \notin K_\nu$, имеем $P_\nu(x) = 0$.

Нетрудно видеть, что если m — порядок разностного уравнения, то m — вершина многогранника Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z)$.

Определение 3. *Компоненту E_m дополнения амебы $\mathcal{A}_P$, соответствующую порядку разностного уравнения, назовем главной.*

Теорема 1. *Если задача (4)–(5) для разностного оператора $P(\delta)$ порядка m устойчива, то фундаментальное решение $\mathcal{P}_m(x)$ ограниченно, а замыкание главной компоненты E_m дополнения амебы содержит начало координат: $0 \in \overline{E}_m$.*

Доказательство. Среди коэффициентов c_α характеристического многочлена $P(z)$ возьмем c_{α_0} такой, что $c_\alpha = 0$ для всех $\alpha : |\alpha| < |\alpha_0|$. Отметим, что $\alpha_0 \neq m$. Непосредственно проверяется, что функция $u(x) = c_{\alpha_0}\mathcal{P}(x) - \delta_0(x-\alpha_0)$ является решением уравнения (4). Здесь $\delta_0(x)$ — символ Кронекера. Действительно, для всех $x \in \mathbb{Z}^n_+$ имеем

$$P(\delta)u(x) = c_{\alpha_0}P(\delta)\mathcal{P}(x) - \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\delta_0(x-\alpha_0+\alpha) = c_{\alpha_0} - \sum_{|\alpha|\geq|\alpha_0|} c_\alpha\delta_0(x-\alpha_0+\alpha) = 0.$$

Поскольку $\mathcal{P}_m(x) = 0$ для всех $x \in X_0$, то $u(x) = 0$ для всех $x \in X$, кроме точки $x = \alpha_0$, в которой $u(\alpha_0) = -1$. Поэтому $\|u\|_0 = 1$, и из определения устойчивости имеем $\|u\| = \max\{|c_{\alpha_0}|\|\mathcal{P}_m\|, 1\} \leqslant k$. Отсюда очевидным образом получаем ограниченность фундаментального решения $\mathcal{P}_m(x)$. Из ограниченности следует, что область сходимости ряда Лорана $\mathrm{Log}^{-1} E_m$ содержит множество $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| > 1, j = 1,2,\ldots,n\}$. Из условия (3) и свойства 2 амебы тогда и $\mathbb{R}^n_> = \{s \in \mathbb{R}^n : s_j > 0, j = 1,2,\ldots,n\} \subset E_m$. Отсюда получаем $0 \in \overline{E}_m$. □

Для $n = 1$ ограниченность фундаментального решения является и достаточным условием устойчивости. Для $n > 1$ это уже неверно.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$f(x_1+2, x_2+1) - f(x_1+1, x_2+1) - f(x_1+1, x_2) + f(x_1, x_2) = 0.$$

В данном случае «старшим» мономом характеристического многочлена $P(z_1, z_2) = z_1^2z_2 - z_1z_2 - z_1 + 1$ является моном $z_1^2z_2$, а начальные данные задаются на множестве

$$X_0 = \{(x_1,x_2) : x_1 = 0\} \cup \{(x_1,x_2) : x_1 = 1\} \cup \{(x_1,x_2) : x_2 = 0\}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $f(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2+1\}$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, является решением данного уравнения. Эта функция неограниченна, а ее сужение на X_0 ограничено: $\|f\|_0 \leqslant 1$. Таким образом, в данном примере разностный оператор $P(\delta)$ неустойчив. При этом фундаментальное решение $\mathcal{P}_{2,1}(x_1,x_2)$ ограниченно. Действительно, разлагая функцию $\dfrac{1}{P(z_1,z_2)}$ в ряд

$$\frac{1}{(z_1-1)(z_1z_2-1)} = \frac{1}{z_1^2z_2(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_1z_2})} = \frac{1}{z_1^2z_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^{k_1}}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^{k_2}z_2^{k_2}}, \tag{6}$$

получим, что коэффициенты этого разложения

$$\mathcal{P}_{2,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1,x_2) \in K_{2,1}, \\ 0, & \text{если } (x_1,x_2) \notin K_{2,1}, \end{cases}$$

где $K_{2,1} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2_+ : x_1 - x_2 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1\}$.

Определение 4. *Назовем функцию $u(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X$ экспоненциальной относительно множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если для всех $a \in E$ выполняется условие $\|u(x)e^{\langle a,x\rangle}\| < +\infty$.*

Определение 5. *Будем называть задачу (4)–(5) асимптотически устойчивой, если она устойчива, и для любого ее решения $u(x)$ такого, что $\|u(x)e^{-\langle a,x\rangle}\|_0 < +\infty$ для любых экспоненциальных относительно главной компоненты дополнения амебы E_m начальных данных для соответствующего решения задачи, справедливо условие $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$.*

Сформулируем следующие условия:

(a) Задача (4) – (5) для разностного оператора $P(\delta)$ порядка m асимптотически устойчива.

(b) Главная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z)$ содержит начало координат: $0 \in E_m$.

(c) Если $\mathcal{P}_m(x)$ — фундаментальное решение, соответствующее порядку m разностного оператора $P(\delta)$, то ряд $\sum\limits_{x\geqslant 0} |\mathcal{P}_m(x)|$ сходится.

Теорема 2. *Пусть m — порядок разностного оператора $P(\delta)$, а E_m и $\mathcal{P}_m$ — главная компонента амебы и фундаментальное решение, соответствующее этому порядку. Тогда условия $a), b), c)$ эквивалентны.*

Доказательство проведем по схеме $a) \to b) \to c) \to a)$.

Доказательство. $a) \to b)$. Согласно теореме 1 имеем $0 \in \overline{E_m} = E_m \cup \partial E_m$ и, если $0 \in \partial E_m$, то найдется точка $\lambda \in V$ такая, что $u(x) = \lambda^x$ — решение уравнения (4) и $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) \neq 0$ (так как $|\lambda_j| = 1, j = 1, \ldots, n$). Таким образом, $0 \in E_m$.

$b) \to c)$. Условие $0 \in E_m$ означает, что точка $(1, \ldots, 1)$ является внутренней точкой множества $\operatorname{Log}^{-1} E_m$ абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{x\geqslant 0} \dfrac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}$, следовательно, ряд $\sum\limits_{x\geqslant 0} |\mathcal{P}_m(x)|$ сходится.

$c) \to a)$. Докажем устойчивость. Воспользуемся формулой из [3], выражающей решение задачи (4)–(5) через начальные данные $\phi(x)$ и фундаментальное решение:

$$f(x) = \sum_y \left(\sum_\alpha c_\alpha \phi(y+\alpha) \right) \mathcal{P}_m(x-y). \tag{7}$$

Суммирование в данном выражении производится по целочисленным y, удовлетворяющим условиям

$$-m \leqslant y \leqslant x - m \text{ и } y < 0.$$

Каждое из этих соотношений определяет конечное множество точек y, первое из них можно записать также в виде

$$m \leqslant x - y \leqslant x + m.$$

Оценим решение $f(x)$:

$$|f(x)| \leqslant \sum_y \left(\sum_\alpha |c_\alpha| \|u\|_0 \right) |\mathcal{P}_m(x-y)| \leqslant \sum_\alpha |c_\alpha| \|u\|_0 \sum_{0\leqslant\beta\leqslant x} |\mathcal{P}_m(\beta+m)|.$$

По условию, найдется константа $M > 0$ такая, что $\sum\limits_\beta |\mathcal{P}_m(\beta+m)| \leqslant M$, поэтому

$$\|u\| \leqslant \left(M \sum_\alpha |c_\alpha| \right) \|u\|_0.$$

Таким образом, существует константа $K = M \sum\limits_\alpha |c_\alpha|$ такая, что для любого решения $u(x)$ уравнения (4) с ограниченными начальными данными $\|u\|_0 < \infty$ справедливо неравенство

$$\|u\| \leqslant K \|u\|_0.$$

Докажем асимптотическую устойчивость. Пусть функция $\varphi(x)$ экспоненциальна относительно главной компоненты E_m дополнения амебы. Из условия $c)$ следует, что точка

$I = (1,\dots,1)$ является внутренней точкой области сходимости ряда $\sum\limits_{x\geqslant 0}\dfrac{\mathcal{P}(x)}{z^x}$, поэтому найдется $z = (z_1,\dots,z_n)$ такая, что $|z_j| < 1, j = 1,\dots,n$ и этот ряд также сходится в этой точке. Так как $a = \operatorname{Log} z \in E_m$, то в точке z абсолютно сходится также ряд $\sum\limits_{x\in X_0}\dfrac{\varphi(x)}{z^x}$ в силу экспоненциальности $\varphi(x)$ относительно E_m.

Воспользуемся формулой (7) и преобразуем ее:

$$\frac{f(x)}{z^x} = \sum_y\left(\sum_\alpha c_\alpha\varphi(y+\alpha)\right)\frac{\mathcal{P}_m(x-y)}{z^x} = \sum_y\left(\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha\frac{\varphi(y+\alpha)}{z^{y+\alpha}}\right)\frac{\mathcal{P}_m(x-y)}{z^{x-y}}.$$

Выкладки для получения оценки модуля функции $\dfrac{f(x)}{z^x}$ вполне аналогичны тем, что проделаны в первой части доказательства. Таким образом, найдется константа $M > 0$ такая, что $\left|\dfrac{f(x)}{z^x}\right| \leqslant M$, или $|f(x)| \leqslant M|z^x|$. Так как $|z_j| < 1, j = 1,\dots,n$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. $\square$

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00844 и грантом Президента РФ НШ-7347.2010.1 .

Список литературы

[1] M.Bousquet-Mélou, M.Petkovšek, Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case, *Discrete Mathematics*, **225**(2000), №5, 51–75.

[2] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и разностные уравнения, *Сиб. матем. журн.*, **45**(2004), 387–393.

[3] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений, *Сиб. матем. журн.*, **48**(2007), 335—340

[4] А.К.Цих, Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфной функции двух переменных, *Матем. сб.*, **182**(1991), №11, 1588–1612.

[5] Д.Даджион, О.Мерсеро, Цифровая обработка многомерных сигналов, М., Мир, 1988.

[6] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Adv. in Math.*, **151**(2000), 45–70.

The Criterion of Asymptotic Stability of a Multidimensional Differece Equation with the Constant Coefficiens

Evgeny K. Leinartas

It is obtained the nessessary condition of the stability of a homogeneous Cauchy problem for a multidimensional difference operator and the criterion of its asymptotic stability in terms connecting with the ameoba of an algebraic hypersurface.

Keywords: Cauchy problem, multidimensional difference operator, ameoba of algebraic hypersurface.