



ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ-2015

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ,
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ,
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ-2015»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 70-ЛЕТИЮ ВЕЛИКОЙ ПОБЕДЫ

КРАСНОЯРСК, СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

15-25 АПРЕЛЯ 2015 Г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Сборник материалов
Международной конференции студентов,
аспирантов и молодых ученых
«Перспектив Свободный-2015»,
посвященной 70-летию Великой Победы

Красноярск, Сибирский федеральный университет, 15-25 апреля 2015 г.

Красноярск, 2015.

**«Математика, информатика
Вычислительная математика и математическое
моделирование»**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В СИСТЕМЕ ТРЁХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Базанова Е. П.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук доц. Распопов В. Е.

Сибирский федеральный университет

В работе S. Zhan и D.A. Mugio «Об идентификации параметров в одномерной обратной задаче теплопроводности» представлен алгоритм идентификации старшего коэффициента в одномерной обратной задаче теплопроводности [1].

В данной работе разработано обобщение на случай системы трех дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с данными Коши. Неизвестные коэффициенты находятся как решение обратной задачи. Построена разностная аппроксимация дифференциальной задачи. Предложен и численно реализован алгоритм решения разностной задачи.

В области $G = \{(t, x) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается задача определения функций $(U(t, x), V(t, x), W(t, x), k_1(x), k_2(x), k_3(x))$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = (k_1(x)U_x)_x + a_1(t, x)U_x + a_2(t, x)V_x + a_3(t, x)W_x + f_1(t, x), \\ V_t = (k_2(x)V_x)_x + b_1(t, x)U_x + b_2(t, x)V_x + b_3(t, x)W_x + f_2(t, x), \\ W_t = (k_3(x)W_x)_x + c_1(t, x)U_x + c_2(t, x)V_x + c_3(t, x)W_x + f_3(t, x), \end{cases}$$

начальным условиям

$$U(0, t) = \alpha(t),$$

$$V(0, t) = \alpha_1(t),$$

$$W(0, t) = \alpha_2(t),$$

$$U_x(0, t) = \beta(t),$$

$$V_x(0, t) = \beta_1(t),$$

$$W_x(0, t) = \beta_2(t),$$

и условиям переопределения

$$U(x, 0) = r(x),$$

$$V(x, 0) = r_1(x),$$

$$W(x, 0) = r_2(x),$$

$$k_1(0) = \gamma,$$

$$k_2(0) = \gamma_1,$$

$$k_3(0) = \gamma_2,$$

где $\alpha(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \beta(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \gamma, \gamma_1, \gamma_2, r(x), r_1(x), r_2(x)$ заданы.

Построена равномерная сетка $\{tn = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, N, x_j = j \cdot h, j = 0, 1, \dots, M\}$. Введены следующие обозначения:

$$Q_j^{ln} = k_l(jh)I_x^l(jh, n\tau),$$

$$K_j^l = k_l(jh),$$

$$H_j^{ln} = I_t^l(jh, n\tau),$$

$$R_j^{ln} = I_x^l(jh, n\tau),$$

$$P_j^l = K'_{lx}(jh),$$

$$U_j' = U_x(jh, 0),$$

$$V_j' = V_x(jh, 0),$$



$$\begin{aligned}
W_j' &= W_x(jh, 0), \\
U_j'' &= U_{xx}(jh, 0), \\
V_j'' &= V_{xx}(jh, 0), \\
W_j'' &= W_{xx}(jh, 0),
\end{aligned}$$

где $l = 1, 2, 3$. Тогда алгоритм вычисления неизвестных имеет вид

1. $Q_{j+1}^{1n} = Q_j^{1n} + h(H_j^{1n} - a_{1j}^n R_j^{1n} - a_{2j}^n R_j^{2n} - a_{3j}^n R_j^{3n} - F_j^{1n}),$
2. $Q_{j+1}^{2n} = Q_j^{2n} + h(H_j^{2n} - b_{1j}^n R_j^{1n} - b_{2j}^n R_j^{2n} - b_{3j}^n R_j^{3n} - F_j^{2n}),$
3. $Q_{j+1}^{3n} = Q_j^{3n} + h(H_j^{3n} - c_{1j}^n R_j^{1n} - c_{2j}^n R_j^{2n} - c_{3j}^n R_j^{3n} - F_j^{3n}),$
4. $K_{j+1}^1 = K_j^1 + hP_j^1,$
5. $K_{j+1}^2 = K_j^2 + hP_j^2,$
6. $K_{j+1}^3 = K_j^3 + hP_j^3,$
7. $H_{j+1}^{1n} = H_j^{1n} + h \frac{d}{dt} R_j^{1n},$
8. $H_{j+1}^{2n} = H_j^{2n} + h \frac{d}{dt} R_j^{2n},$
9. $H_{j+1}^{3n} = H_j^{3n} + h \frac{d}{dt} R_j^{3n},$
10. $R_{j+1}^{1n} = Q_{j+1}^{1n} / K_{j+1}^1,$
11. $R_{j+1}^{2n} = Q_{j+1}^{2n} / K_{j+1}^2,$
12. $R_{j+1}^{3n} = Q_{j+1}^{3n} / K_{j+1}^3,$
13. $P_{j+1}^1 =$
 $(H_{j+1}^{10} - K_{j+1}^1 U_{j+1}'' - a_{1j+1}^0 U_{j+1}' - a_{2j+1}^0 V_{j+1}' - a_{3j+1}^0 W_{j+1}' - F_{j+1}^{10}) / U_{j+1}',$
14. $P_{j+1}^2 = (H_{j+1}^{20} - K_{j+1}^2 V_{j+1}'' - b_{1j+1}^0 U_{j+1}' - b_{2j+1}^0 V_{j+1}' - b_{3j+1}^0 W_{j+1}' - F_{j+1}^{20}) / V_{j+1}'$
 $,$
15. $P_{j+1}^3 =$
 $(H_{j+1}^{30} - K_{j+1}^3 W_{j+1}'' - c_{1j+1}^0 U_{j+1}' - c_{2j+1}^0 V_{j+1}' - c_{3j+1}^0 W_{j+1}' - F_{j+1}^{30}) / W_{j+1}',$
16. $j = j + 1.$

Согласно данному алгоритму найдём в узлах сетки только первые производные по t и по x от функций $U(t, x)$, $V(t, x)$ и $W(t, x)$. Сами же неизвестные найдём с помощью линейной интерполяции.

Разработана программа, реализующая предложенный вычислительный алгоритм. Проведены тестовые расчёты.

Список литературы

1. S. Zhan and D.A. Murio. Identification of Parameters in One-Dimensional IHCP // Computers Math. Applic. Vol. 35, No. 3, pp. 1-16, 1998.
2. В.Е. Распопов. Численные идентификация коэффициентов математической модели гиполимниона // материалы Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании», часть 3, 2003.



ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗЛИВА

Валиахметов А.Р.,

научный руководитель канд. физ-мат. наук Галиаскарова Г.Р.,

канд. физ-мат. наук Гильманов С.А.

Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета

Моделирование разного рода разливов жидких сбросов по поверхности грунта является актуальной задачей на стыке прикладной гидромеханики и экологии. Современное состояние изучения таких потоков является достаточно развитым. Исследование, связанное с возможностью применения результатов работы при борьбе с возможными последствиями разливов является актуальной проблемой.

В работе рассматривается математическая модель разлива жидкости по горизонтальной поверхности (рис.1).

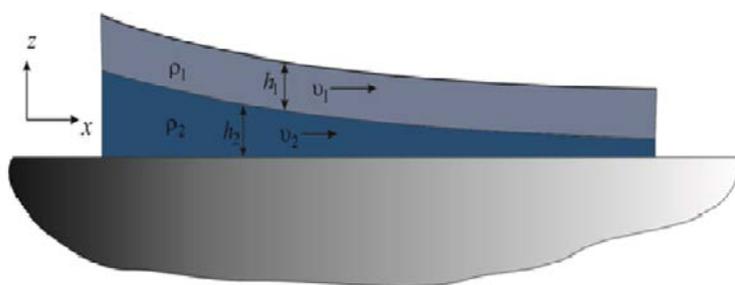


Рис.1. Схема двухслойной жидкости.

Причем имеется возможность учета инфильтрационных эффектов или испарения жидкости в потоке. В случае изучения изотермической жидкости математическая модель принимает достаточно простой вид. Учет взаимодействия с окружающей средой осуществлен в обобщенной форме. Жидкость в потоке считается несжимаемой, поток рассматривается на основе гипотезы «мелкой воды». Тогда математическая модель представляет из себя совокупность уравнений неразрывности и баланса.

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 v_1) = 0;$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 v_2) = -I;$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1 h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 + \rho_2 g h_1 h_2 \right) - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 (v_2 - v_1);$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2 h_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho_2 (h_2 - h_1)^2 \right) + \alpha_2 (v_1 - v_2);$$

Система представленных уравнений решается при помощи замены переменных. Правильно подобранная замена и неособенные преобразования позволяют свести исходные уравнения в частных производных к системе ОДУ и функциональных уравнений. Некоторые из полученных уравнений имеют в некоторых случаях

аналитические и даже явные аналитические решения. Те уравнения, которые не решаются аналитически, могут быть решены численно. Для получения конкретного вида общего решения рекомендуется построить аппроксимирующие функции. В случае неявного аналитического решения также могут быть построены аппроксимирующие функции методом наименьших квадратов, например.

Полученные аналитические решения сравниваются с решениями, полученными, например, приближенно и на основе этого сравнения делаются выводы о диапазонах изменения дополнительных параметров, возникающих в ходе решения.

Список использованной литературы

1. Гильманов С.А., Галиаскарова Г.Р. Автомодельная задача о разливе жидкости над поверхностью // Труды международной научной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т. II. – 306 с. С.98-102.



где $r = h/(2\sqrt{3})$ – радиус инерции поперечного сечения, точка над символом означает частную производную по времени. Потенциальная энергия упругой деформации равна

$$\Pi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l W dx dz = h \int_0^l W(u_x) dx, \quad W = \frac{k}{2} \left(\frac{2\mu u_x + q}{k - \mu} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{2ku_x + q}{k - \mu} \right)^2.$$

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского вариация функционала действия при фиксированных начальном и конечном состояниях механической системы равна нулю:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0.$$

Здесь δA – виртуальная работа внешних сил, равная сумме работ дополнительного давления на берегах разлома и приращений давлений p_0, p_1 в концах участка:

$$\delta A = -2 \int_0^l q \delta w|_{z=h/2} dx + \int_{-h/2}^{h/2} (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}) dz = h \frac{k + \mu}{k - \mu} \int_0^l q \delta u_x dx + hp_0 \delta u|_{x=0} - hp_1 \delta u|_{x=l}$$

Непосредственное вычисление вариаций приводит к промежуточному уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\rho i \delta \ddot{u} + \rho r^2 \frac{k + \mu}{k - \mu} \left(\frac{k + \mu}{k - \mu} \dot{u}_x + \frac{\dot{q}}{k - \mu} \right) \delta \dot{u}_x + \frac{4k\mu}{k - \mu} u_x \delta u_x + \frac{k + \mu}{k - \mu} q \delta u_x \right) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_1 \delta u|_{x=l} - p_0 \delta u|_{x=0}) dt,$$

из которого после применения формулы интегрирования по частям к интегралам, содержащим производную от δu по времени и по пространственной переменной, с учетом произвольности вариации внутри интервала $(0, l)$ и на его границах, вытекает уравнение движения

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} = f(x, t), \quad (2)$$

где

$$a^2 = \frac{4}{\rho(k)}, \quad b = r \frac{k + \mu}{k - \mu}, \quad f = g(x, t) = -\frac{k + \mu}{\rho(k - \mu)} q + r^2 \frac{k + \mu}{(k - \mu)^2} \ddot{q}$$

и динамические граничные условия

$$\rho(a^2 u_x - b^2 \ddot{u}_x - g)|_{x=0, l} = p_{0,1}.$$

Кинематические граничные условия для уравнения (1) ставятся обычным способом – задаются смещения в концах интервала $u|_{x=0, l} = u_{0,1}$, которые могут зависеть от времени. Начальные данные формулируются так же, как и для классического волнового уравнения:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = \psi(x).$$

Основной недостаток моделирования волновых процессов на основе уравнения (2) состоит в том, что оно не описывает диссипативных процессов. Такие процессы в грунтах и горных породах учитываются определяющими уравнениями вязкоупругой среды Кельвина – Фойхта. В соответствии с этой моделью нормальное напряжение σ в



разломе разлагается в сумму двух слагаемых – упругого и вязкого. Для разупрочняющейся среды упругое напряжение находится по формуле $s = -\rho a^2 u_x$. Вязкое напряжение удовлетворяет закону Стокса: $\sigma - s = \eta \dot{u}_x$, где η – коэффициент вязкости. В терминах скоростей и напряжений полная система уравнений, учитывающая вязкие свойства среды, приводится к следующему виду:

$$\rho \ddot{u} - \rho b^2 \ddot{u}_{xx} = \sigma_x, \quad s = -\rho a^2 u_x, \quad \sigma = s + \eta \dot{u}_x. \quad (3)$$

После очевидных преобразований система (3) приводится к уравнению:

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} - \eta \dot{u}_{xx} = f(x, t), \quad \text{где } \eta = \nu / \rho.$$

Дисперсионный анализ. Используя общее уравнение монохроматической волны $u = \hat{u} e^{i(\omega t - kx)}$, получим дисперсионное уравнение для системы (3):

$$\omega^2 + b^2 \omega^2 k^2 + a^2 k^2 = i \eta \omega k^2. \quad (4)$$

Здесь $k = k_1 + ik_2$ – комплексное волновое число. Из уравнения (4) можно определить зависимость фазовой скорости c и декремента затухания волны λ от частоты ω :

$$c = \frac{\omega}{\text{Re} k} = \frac{2\omega(a^2 + b^2 \omega^2)}{a^2 + b^2 \omega^2 - \omega^2 \eta}, \quad \lambda = -\frac{1}{\text{Im} k} = -\frac{a^2 + b^2 \omega^2 + \eta^2 \omega^2}{\omega \sqrt{a^2 + b^2 \omega^2}}.$$

На основании полученных формул были построены графики зависимости скорости и декремента затухания от частоты. Было отмечено, что высокочастотные волны наряду с низкочастотными имеют высокую скорость распространения в разломе, которая может превышать скорость ударной волны в блоках, в отличие от волн умеренной частоты, обладающих низкой скоростью. Также высокочастотные волны быстро затухают по мере распространения вдоль слоя, а низкочастотные распространяются практически без затухания.

Список литературы

1. Stavrogin A.N., Tarasov B.G. Experimental Physics and Rock Mechanics (Results of Laboratory Studies). India: Balkema, 2001. 356 p.
2. Добрецов Н.Л., Курдюшкин А.Г., Курдюшкин А.А. Глубинная геодинамика. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. 409 с.
3. Гольдин С.В. Дилатансия, переупаковка и землетрясения // Физика Земли. 2004. № 10. С. 37–54.
4. Tarasov B.G., Randolph M.F. Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2008. V. 45, No. 3. P. 316–328.
5. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Перишкин А.Ю. Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13, спец. вып. С. 29–35.



ПРОГРАММА ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД ГИСТОГРАММНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Данилевский В. В.,

научный руководитель д-р физ.-мат. наук, профессор Добронев Б. С.

Сибирский федеральный университет

Введение

В тех случаях, когда в интервальном анализе известны не только границы, но и функции плотности вероятности случайных величин, возможно применение численного вероятностного анализа, предметом которого является решение задач со стохастическими неопределенностями в данных [1]. Одним из главных элементов численного вероятностного анализа является гистограммная арифметика, применение которой позволяет снизить уровень неопределенности в данных и получить дополнительную информацию о распределении случайных величин.

Гистограммная переменная

Для разработки арифметики и построения законов распределения функций от случайных аргументов вводится последовательно понятие гистограммной переменной (гистограммного числа) и разрабатываются численные процедуры гистограммной арифметики.

Идея гистограммного подхода заключается в следующем: так же как представление случайных величин своими плотностями в виде непрерывных функций, можно рассматривать случайные величины, плотность распределения которых представляет гистограмму. Например, в случае одномерной случайной величины гистограмма P — кусочно-постоянная функция, определенная сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$ и на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ принимает постоянное значение p_i , $h = \max_{i=0}^{n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$.

Рассмотрим вопрос построения гистограммы P по некоторой p_i . Тогда значение p_i на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ определится как среднее:

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{p_x(\xi) d\xi}{(x_i - x_{i-1})}$$

Операции над двумя гистограммными переменными

Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин $\{x_1, x_2\}$ с плотностью распределения $p\{x_1, x_2\}$. Известны аналитические формулы для определения плотности вероятности результатов арифметических действий над случайными величинами. Например, для нахождения плотности вероятности $p_{x_1+x_2}$ суммы двух случайных величин $x_1 + x_2$ используется соотношение:

$$p_{x_1+x_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-v, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} p(v, x-v) dv$$

Однако эти формулы не всегда удобны для численных расчетов.

Основные принципы разработки гистограммных операций продемонстрируем на примере операции сложения. Пусть $z = x_1 + x_2$, и носители x_1 — $[a_1, a_2]$, x_2 — $[b_1, b_2]$,



$p(x_1, x_2)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора (x_1, x_2) . Заметим, что прямоугольник $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ — носитель плотности распределения вероятностей $p(x_1, x_2)$ и плотность вероятности z отлична от нуля на интервале $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$. Обозначим $z_i, i = 0, 1, \dots, n$ — точки деления этого интервала на n отрезков. Тогда вероятность попадания величины z в интервал $[z_1, z_2]$ определяется по формуле:

$$p_{z_{i1}} = \iint_{\Omega_i} \frac{p(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{(z_{i+1} - z_i)}, \text{ где } \Omega_i = \{(x_1, x_2) | z_i \leq x_1 + x_2 \leq z_{i+1}\}.$$

Численная реализация этого метода заключается в следующем. Пусть случайная величина x задана сеткой a_i и вероятностями p_i , y соответственно b_i и q_i . Носители плотности вероятности этих величин — $[a_0, a_n]$ и $[b_0, b_n]$. Носитель совместной вероятности $p(x_1, x_2)$ — прямоугольник $[a_0, a_n] \times [b_0, b_n]$ и разбит на n^2 прямоугольников $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, вероятность попадания в которые является постоянной величиной $p_i q_j$ — для независимых случайных величин и p_{ij} — для зависимых.

Для вычисления искомой гистограммы совершаем обход по всем прямоугольникам $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, для каждого из них вычисляем его вклад в каждый отрезок $[z_k, z_{k+1}]$ итоговой гистограммы. С этой целью мы определяем область Ω'_k , по которой рассматриваемый прямоугольник $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ пересекается с Ω_k :

$$\Omega'_k = \Omega_k \cap ([a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]).$$

Вычислим по Ω'_k интеграл

$$p_{zk} = \int_{\Omega'_k} p(x, y) dx dy.$$

Заметим, что на каждом $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ совместная плотность вероятности $p(x, y)$ является константой, и поэтому этот интеграл равен отношению площади Ω'_k к площади прямоугольника $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$. Совершив обход по всем прямоугольникам вычисляем искомую гистограмму p_z . При этом число арифметических операций для построения гистограммы $O(n^2)$.

Гистограммная арифметика

Пусть имеется две независимые случайные величины $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [c, d]$ с плотностями распределения $p(x_1)$ и $p(x_2)$. В силу определения нахождения плотности распределения композиции двух независимых случайных величин получаем $p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2)$. Известны аналитические формулы для определения плотности вероятности результатов арифметических действий над случайными величинами.

Опишем, например, сложение пары случайных величин, представленных в виде гистограммных переменных.

Пусть $z = x_1 + x_2$, заметим, что $z \in [a, b] \times [c, d]$, в силу арифметических операций над интервальными числами получим, что $z \in [a, b] + [c, d] = [a+c, b+d]$. Обозначим $z_i, i = 0, 1, \dots, n$ — точки деления этого интервала на n отрезков, $h = ((b + d) - (a + c))/n$ — шаг от z_i до z_{i+1} . Тогда вероятность попадания величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле:

$$P(z_i < z < z_{i+1}) = \iint_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2) | z_i < x_1 + x_2 < z_{i+1}\}$.



И окончательная формула:

$$p_{z_i} = \iint_{\Omega_i} \frac{p(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{(z_{i+1} - z_i)}$$

Пример алгоритма

Алгоритм работы гистограммной операции сложения.

Рассмотрим две непрерывные, независимые случайные величины $x_1 \in [0, 1]$ и $x_2 \in [1, 2]$, а $p(x_1) = 1$ и $p(x_2) = 1$, $p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2) = 1 \cdot 1 = 1$. Пусть, $z = x_1 + x_2$, значит $z \in [0, 1] + [1, 2] = [0 + 1, 1 + 2] = [1, 3]$. Так же пусть $n = 100$, следовательно, наш шаг $h = (3 - 1)/100 = 0.02$. Получаем, что значения $z_i = z_{i+1} + 0.02$.

На рисунке 1 мы видим визуализацию гистограммы $z = x_1 + x_2$. Рядом представлена гистограмма, полученная сложением $x_1 + x_2$ методом Монте-Карло, используя 1 000 000 бросаний.

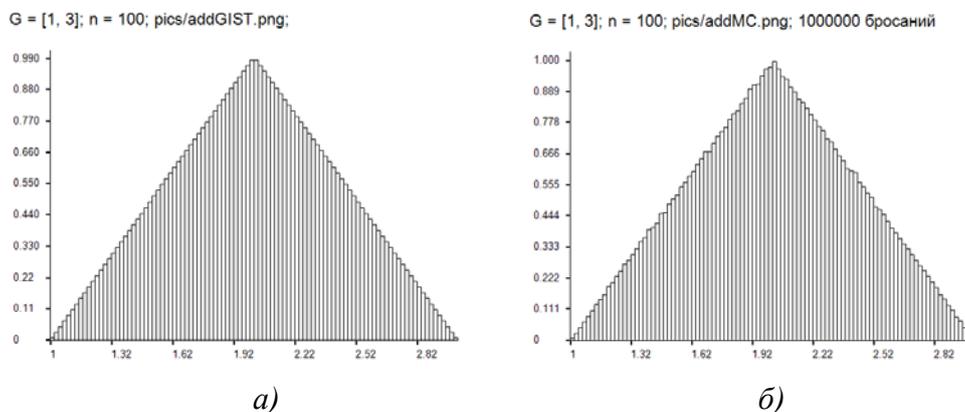


Рисунок 1. $x_1 + x_2$. Выполнение сложения случайных величин а) Гистограммная арифметика б) Метод Монте-Карло

Использованные источники

- [1] Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебное пособие / Б.В. Годенко. - Москва: Наука, 1988. - 448 с.
- [2] Добронеец, Б.С. Элементы численного вероятностного анализа / Б.С. Добронеец, О.А. Попова // Вестн. Сибирского гос. аэрокосмического ун-та. - 2012. - № 2 (42). - С. 19-23
- [3] Добронеец, Б.С. Численные операции над случайными величинами и их приложения / Б.С. Добронеец, О.А. Попова // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. - 2011. - № 4 (2). - С. 229- 239. 5.
- [4] Попова, О. А. Применение гистограммной математики в экономических задачах исследования операций / Б.С. Добронеец, О. А. Попова // Тр. VIMоск. междунар. конф. по исслед. операций / отв. ред. П.С. Краснощеков, А. А. Васин. - Москва: МАКС-Пресс, 2010. - С. 90-92.
- [5] Добронеец, Б.С. Интервальная математика: учебное пособие / Б.С. Добронеец. - Красноярск: КГУ, 2004. - 216 с.



ПОЛЗУЩЕЕ ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Дараби Н. Б.

научный руководитель д-р физ.-мат. Наук Андреев В. К.

Сибирский федеральный университет

Точные и приближённые решения уравнений гидродинамики способствуют лучшему пониманию качественных особенностей движений. Они позволяют оценить область применимости более простых моделей (невязкая жидкость, ползущие движения, пограничный слой и др.) и незаменимы для тестирования численных, асимптотических и приближенных методов. Впервые такие решения для стационарной системы Навье-Стокса рассматривал Хименц [1]. Обзор подобного вида точных решений имеется в статье [2].

Рассматривается нестационарное движение бинарной смеси в плоском канале с твёрдыми неподвижными стенками. Уравнения описывающие движение смеси в безразмерном виде выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
 u_x + v_y &= 0, \\
 u_t + Re(uu_x + vu_y) + p_x &= u_{xx} + u_{yy}, \\
 v_t + Re(uv_x + vv_y) + p_y &= v_{xx} + v_{yy} + G(T + C), \\
 T_t + Re(uT_x + vT_y) &= (T_{xx} + T_{yy})/Pr, \\
 C_t + Re(uC_x + vC_y) &= \frac{1}{Sc} [(C_{xx} + C_{yy}) - \psi(T_{xx} + T_{yy})].
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u и v компоненты вектора скорости, p давление, T температура, C концентрация, Re число Рейнольдса, Pr число Прандтля, Sc число Шмидта, G отношение числа Грасгоффа Gr к числу Рейнольдса и наконец ψ отношение разделения, которое характеризует эффект термодиффузии.

Граничные условия состоят из условий прилипания на твёрдых стенках

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t)|_{y=0} &= 0, & v(x, y, t)|_{y=0} &= 0, \\
 u(x, y, t)|_{y=1} &= 0, & v(x, y, t)|_{y=1} &= 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

Задания на них температуры

$$T(x, y, t)|_{y=0} = \frac{T_1(x, t) - T_{cp}}{\Delta T}, \quad T(x, y, t)|_{y=1} = \frac{T_2(x, t) - T_{cp}}{\Delta T}; \tag{3}$$

И отсутствие потоков вещества

$$C_y = \psi T_y \text{ при } y = 0, 1. \tag{4}$$

Задаются и начальные условия

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t)|_{t=0} &= \frac{u_0(x, y)}{U_0}, & v(x, y, t)|_{t=0} &= \frac{v_0(x, y)}{U_0}, \\
 \partial u_0(x, y)/\partial x + \partial v_0(x, y)/\partial y &= 0; \\
 T(x, y, t)|_{t=0} &= (T_0(x, y) - T_{cp})/\Delta T,
 \end{aligned} \tag{5}$$



$$C(x, y, t)|_{t=0} = \beta_T(C_0(x, y) - C_{cp})/\beta_C \Delta T.$$

Здесь β_T – коэффициент теплового расширения и β_C – коэффициент концентрационного расширения.

Решение системы уравнений конвекции тепломассопереноса ищется в специальном виде: одна из компонент скорости является линейной функцией продольной по длине канала координаты, а температура и концентрация – квадратичные функции по этой координате

$$u = U(y, t)x, \quad v = V(y, t). \quad (6)$$

После подстановки представления (5) в безразмерном виде уравнения движения (1) при предположении малости числа Рейнольдса (ползущие движения) и $G = Gr/Re = O(1)$ (необходимо для учёта влияния силы плавучести на движение смеси), возникают следующие системы задач (6)-(9) для неизвестных функций A, B, M и N .

$$\begin{aligned} A_t &= A_{yy}/Pr, \\ A(y, 0) &= A_0(y), \\ A(0, t) &= A_1(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A(1, t) &= A_2(t); \\ B_t &= B_{yy}/Pr + 2A/Pr, \\ B(y, 0) &= B_0(y), \\ B(0, t) &= B_1(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B(1, t) &= B_2(t); \\ M_t &= 1/Sc (M_{yy} - \psi A_{yy}), \\ M(y, 0) &= M_0(y), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_y(0, t) &= \psi A_y(0, t), \\ M_y(1, t) &= \psi A_y(1, t); \\ N_t &= 1/Sc (N_{yy} + 2M - 2\psi A - \psi B_{yy}), \\ N(y, 0) &= N_0(y), \\ N_y(0, t) &= \psi B_y(0, t), \\ N_y(1, t) &= \psi B_y(1, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь следует отметить, что граничные значения $A_0(y), A_1(t), A_2(t)$ и соответствующие значения для функций B, M и N определяются начальными и граничными условиями для температуры и концентрации.

Переход от найденных функций реализуется с помощью уравнения

$$U_{yy} - U_t = 2G \int_0^y (A(z, t) + M(z, t)) dz + w_0(t). \quad (11)$$

Для определения функции $w_0(t)$ используется преобразование Лапласа.

Решение задачи получено с помощью тригонометрических рядов Фурье, быстро сходящихся для любого момента времени. Найдено решение нестационарной задачи установлено, что при определенных условиях т.е. когда время стремится к бесконечности полученный результат является решением стационарной проблемы.

Список литературы

- [1] Hiemenz, K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, Dingers Polytech Journal, 1911, Vol. 326, p. 321-440.
 [2] Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, Теор. основы химической технологии, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.



РАДИАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Дмитрячков И.А.,

научный руководитель, доктор физ.-мат. наук, профессор Садовский В.М.

Сибирский федеральный университет

Задача о расширении-схлопывании полости в безграничной среде имеет большое прикладное значение для приложений в аэрокосмической, нефтедобывающей промышленности, геодинатике и т.д. В классической постановке для изотропной и однородной сплошной среды задача решалась в работах [1–2]. Особое значение она имеет в нефтегазовой геофизике при моделировании напряженно-деформированного состояния геоматериала в призабойной зоне скважины. Повышение давления и соответствующее расширение полости приводит к смене режимов деформирования и уплотнения пористой среды. Эти режимы сменяют друг друга в определенной последовательности, зависящей от физических характеристик пористой среды, и существенным образом влияют на фильтрационные процессы в призабойной зоне.

Применяемая при построении решения математическая модель пористой среды разработана в монографии [3]. На первоначальном этапе нагружения при низких давлениях p_0 в среде развиваются упругие процессы, протекающие без диссипации механической энергии. Напряжения и радиальное перемещение определяются по формулам:

$$\sigma_r = -\sigma_\varphi = -p_0 (r_0/r)^2, \quad \sigma_z = 0, \quad U_r = p_0(r_0)^2/(2\mu r) \quad 1)$$

Здесь μ – модуль сдвига пористого материала. Состояние упругости реализуется вплоть до достижения предельного упругого давления $p_s = \tau_s$, определяемого по условию пластичности Треска – Сен-Венана (τ_s – предел текучести при чистом сдвиге):

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2 \tau_s \quad 2)$$

За упругой стадией следует стадия неполной пластичности, в которой напряжение и перемещение определяются по формулам:

$$\sigma_r = -p_0 + 2 \tau_s \ln(r/r_0), \quad \sigma_\varphi = 2 \tau_s + \sigma_r, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_\varphi + \sigma_r), \quad 3)$$

$$2(k+\mu/3) U_r = -p_f r + 2 \tau_s r \ln(r/r_f) + C_3/r \quad 4)$$

Здесь k – модуль объемного сжатия, $\nu = (3k - 2\mu)/(6k + 2\mu)$ – коэффициент Пуассона пористого материала. Радиальное перемещение и напряжения в упругой зоне на этой стадии задаются формулами (1) с заменой r_0 на r_s и p_0 на p_s , где r_s – радиус пластической зоны.

Вслед за неполной пластичностью процесс может развиваться по двум различным сценариям. Если пористость мала, то есть если $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$, то вблизи полости возникает зона схлопывания пор, если же $\theta_0 > \tau_s/\mu$, то возникает зона полной пластичности и



далее внутри этой зоны – зона схлопывания пор. В случае $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$ перемещение вычисляется в соответствии с уравнением:

$$2(k + k_0 + \mu/3) U_r = -(p_0 r + k_0 \theta_0) + 2 \tau_s r \ln(r/r_0) + C_5/r \quad (5)$$

При $p_0 > p_f$ внутри зоны схлопывания образуется зона полной пластичности. В ней напряжения вычисляются по таким же формулам что и при полной пластичности с раскрытыми порами. Перемещение же в данной зоне определяется из уравнения:

$$2(k + k_0) U_r = (-k_0 \theta_0 - p_0 + \tau_s/3) r + 2 \tau_s r \ln(r/r_0) + C_6/r \quad (6)$$

Во втором случае, когда $\theta_0 > \tau_s/\mu$, за зоной неполной пластичности следует зона полной пластичности, напряжения и перемещение в которой вычисляется по формулам:

$$2k U_r = (p_s/3 - p_0) r + 2 \tau_s r \ln(r/r_0) + C_4/r, \quad (7)$$

Затем при повышении давления возникает зона схлопывания, которая описывается теми же уравнениями, что и в случае ее возникновения в зоне неполной пластичности.

Все возможные варианты ветвления решений в зависимости от параметров пористой среды приведены в блок-схеме на рис. 2.

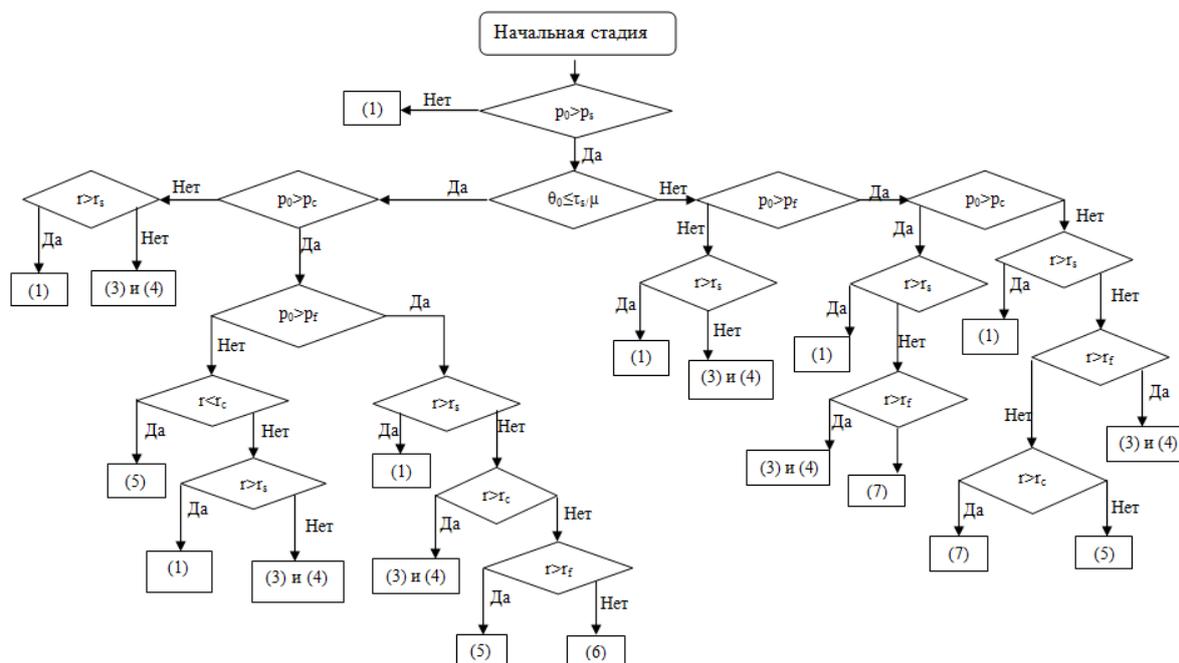


Рис. 2. Блок-схема ветвления решений.

С помощью блок-схемы была разработана программа в системе Matlab, которая вычисляет характерные радиусы зон, предельные давления и строит эпюры распределения напряжений и перемещений в пористой среде.

Список литературы

1. Галин Л.А. Плоская упруго-пластическая задача // ПММ. 1946. Т. 10, вып. 3. С. 367–386.
2. Шемякин Е.И. Расширение газовой полости в несжимаемой упругопластической среде // ПМТФ. 1961. Т. 2, №5. С. 111-116.
3. Садовская О.В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О.В. Садовская, В.М. Садовский. М.: Физмалит, 2008.



ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ФРЕЙМОВ ГЛУБИНЫ НЕ БОЛЕЕ 4 И ШИРИНЫ НЕ БОЛЕЕ 2.

Донцов Д.Н.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Голованов М.И.

Сибирский Федеральный Университет

В исследованиях по неклассическим логикам рассматриваются различные классы логик, заданные формально, с помощью систем аксиом. Используется также семантическая интерпретация на моделях Крипке, кроме того логики задаются с помощью алгебр. Т.е. с одной стороны, когда задается система аксиом, часто одной из задач ставится построение классов фреймов адекватных данной логике. Обратная задача – построение аксиоматики логики, заданной семантически.

Целью данной работы является построение все замкнутые классы фреймов глубины не более 4 и ширины не более 2, для дальнейшего изучения модальных логик.

Введем следующие определения.

Фреймом называется пара $\langle W, R \rangle$, где W — непустое множество,

R – бинарное отношение, определенное на W , т. е. $R \subseteq W^2$.

Семейство фреймов будем называть *замкнутым*, если, вместе с каждым фреймом из этого класса, к данному классу относятся и все его открытые подфреймы и p -морфные образы.

Если F_1 и F_2 являются фреймами, то выражение $F_1 \subseteq F_2$ обозначает, что F_1 является *открытым подфреймом* для F_2 .

Отображение f фрейма $\langle W_1; \leq \rangle$ на фрейм $\langle W_2; \leq \rangle$ называется *p -морфизмом*, если:

$$\forall a, b \in W_1: ((a \leq b) \Rightarrow (f(a) \leq f(b))),$$

$$\forall a, b \in W_1: (f(a) \leq f(b)) \Rightarrow \exists c \in W_1: ((a \leq c) \ \& \ (f(c) = f(b))).$$

Построение фреймов глубины не более 4 и ширины не более 2.

Начнем с простейшего одноточечного фрейма f_0 . Затем добавим к нему одну точку в глубину, и получим фрейм f_1 глубины 2, ширины 1. Такой фрейм один. Далее к фрейму f_1 добавим точку в первый слой, и получим фрейм f_2 глубины не более 2 и ширины не более 2. Он также один.

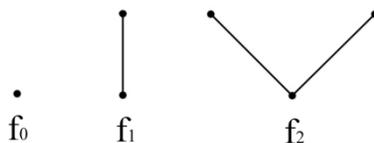


Рисунок – 1. Фреймы глубины не более 2 и ширины не более 2

Перейдем к глубине 3, самый простейший случай – это когда на каждом слое по одной точке. Обозначим этот фрейм f_3 . Увеличим ширину, добавим еще одну точку во второй слой, и получим фрейм f_4 . Фрейм, имеющий одну точку на первом слое и две точки во втором слое, будет единственный – это фрейм f_4 . Перечислим фреймы, у которых две точки в первом слое, ширина и глубина равны 2 и 3 соответственно. Существует всего 5 таких фреймов – обозначим их $f_5 - f_9$. При этом фрейм f_5 имеет одну точку во втором слое, в отличие от остальных.



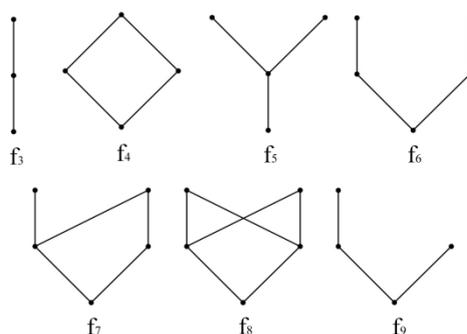


Рисунок – 2. Фреймы глубины не более 3 и ширины не более 2.

Перейдем к глубине 4, к фрейму f_3 добавим одну точку в глубину и получим простейший фрейм f_{10} . Такой фрейм один. Теперь увеличим ширину. Добавим на первый слой еще одну точку, получим три фрейма, у которых на первом слое две точки, а на всех остальных по одной. Эти фреймы будут отличаться друг от друга тем, что одна из точек первого слоя достижима из разных слоев фрейма. Обозначим эти фреймы f_{11}, f_{12}, f_{13} . Теперь рассмотрим фреймы, у которых две точки на втором слое, а на остальных по одной. Таких фреймов два, они отличаются друг от друга тем, что одна из точек второго слоя достижима из разных точек фрейма. Обозначим их f_{14}, f_{15} . Теперь рассмотрим фрейм, у которого на третьем слое две точки, а на остальных по одной, такой фрейм единственный.

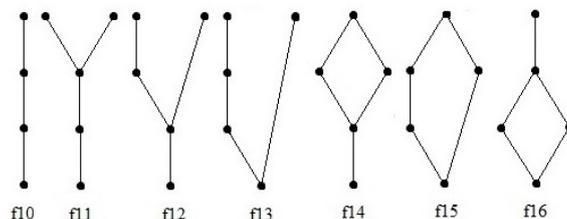


Рисунок – 3. Фреймы глубины не более 4 и ширины не более 2

Теперь рассмотрим такие комбинации, когда одновременно в двух слоях фрейма находится по две точки, а на остальных по одной. На первом и втором слое находится две точки, таких фреймов будет девять: $f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}$. Далее рассмотрим комбинацию, когда на втором и третьем слое по две точки, а на первом слое и в корне по одной, таких фреймов всего три: f_{26}, f_{27}, f_{28} . Теперь рассмотрим комбинацию, когда на первом и третьем слое по две точки, а на втором слое и в корне фрейма по одной. Такой фрейм единственный и обозначим его f_{29} .

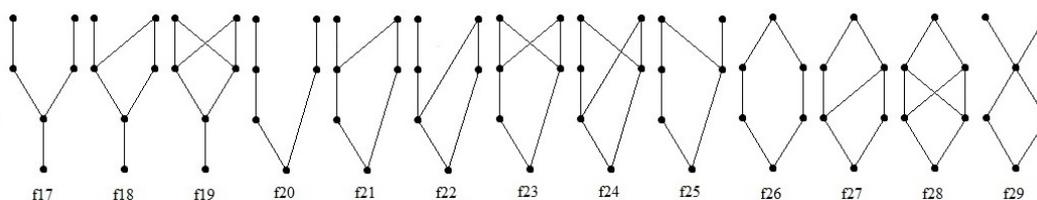


Рисунок – 4. Фреймы глубины не более 4 и ширины не более 2

Теперь рассмотрим последние виды фреймов, у которых в первом, втором и в третьем слое по две точки, таких фреймов 15 штук: $f_{30}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, f_{35}, f_{36}, f_{37}, f_{38}, f_{39}, f_{40}, f_{41}, f_{42}, f_{43}, f_{44}$.

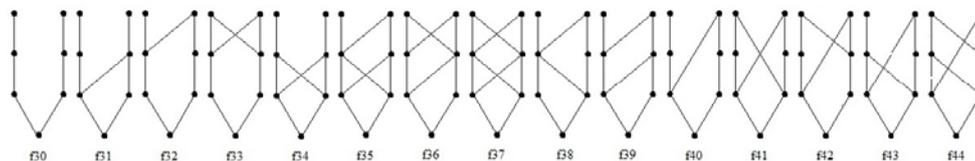


Рисунок – 5. Фреймы глубины не более 4 и ширины не более 2

В итоге мы построили все возможные фреймы глубины не более 4 и ширины не более 2.

Для каждого из этих фреймов построим замкнутый класс. Для этого будем использовать определения открытого подфрейма и р-морфного образа. Класс, порожденный фреймом f_i , будем обозначать F_i . Так как фреймов очень много в этом докладе рассмотрим пару примеров более сложных фреймов.

Итак, начнем с фрейма f_{10} . В нем содержится открытый подфрейм f_3 , подфрейм f_1 , а также подфрейм f_0 . Запишем полученный класс: $F_{10} = (f_{10}, f_3, f_1, f_0)$.

Далее рассмотрим фрейм f_{12} . Первым шагом склеим точки первого слоя и получим фрейм f_{10} , замкнутый класс которого рассмотрен выше. Так же можно склеить точку второго слоя с точкой третьего слоя, мы получим фрейм f_5 , у которого также можно склеить две точки первого слоя и получить фрейм f_3 . Также у фрейма f_5 можно выделить открытый подфрейм f_2 . Вернемся к фрейму f_{12} , у него еще можно выделить открытый подфрейм f_9 . Таким образом, класс F_{12} будет замкнутым классом, порожденным фреймом f_{12} . Запишем полученный класс: $F_{12} = (f_{12}, f_{10}, f_9, f_5, f_3, f_2, f_1, f_0)$.

Следующий фрейм f_{14} . Склеим две точки второго слоя между собой и получим фрейм f_{10} , замкнутый класс которого рассмотрен выше. Также во фрейме f_{14} можно выделить открытый подфрейм f_4 , у которого можно склеить две точки второго слоя и получить фрейм f_3 . Запишем полученный класс f_{14} : $F_{14} = (f_{14}, f_{10}, f_4, f_3, f_2, f_1, f_0)$.

И в заключение рассмотрим фрейм f_{17} . При склеивании точек первого слоя между собой получаем фрейм f_{14} , замкнутый класс которого рассмотрен выше. Далее склеим точку третьего слоя с одной из точек второго слоя, получим фрейм f_{14} , замкнутый класс которого рассмотрен выше. Также у фрейма f_{17} можно выделить открытый подфрейм f_6 . Класс F_{17} будет замкнутым классом, порожденным фреймом f_{17} . Полученный класс будет иметь вид: $F_{17} = (f_{17}, f_{14}, f_{12}, f_{10}, f_9, f_6, f_5, f_4, f_3, f_2, f_1, f_0)$.

Таким образом, мы сформировали 45 различных замкнутых классов, каждый из которых порожден одним фреймом.

Аксиоматизация модальных логик задаваемых малыми фреймами.

Мы построили замкнутые классы фреймов, на которых мы далее будем изучать модальные логики.

Система аксиом модальной логики включает в себя аксиомы классического исчисления высказываний, аксиому нормальной модальной логики К и формулу Гжегорчика, а также правило вывода, правило Геделя и правило подстановки. Для построения систем аксиом, также применяются следующие формулы:

1. Формула глубины:



$$\delta_0 = +, \delta_{n+1} = p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \rightarrow \delta_n).$$

Выполняется на фреймах, глубина которых не превышает $n+1$ элемент.

2. Формула ширины:

$$w_n := \bigvee_{0 \leq i \neq j \leq n} \diamond (p_i \wedge (p_j \vee \diamond p_j)).$$

Выполняется на фреймах, максимальная ширина которых не превышает n .

При помощи данных формул, можно задать систему аксиом для простейших фреймов $f_0, f_1, f_2, f_3, f_{10}$. Для остальных фреймов данного набора аксиом будет недостаточно, поэтому нужно будет строить новые формулы.

Для примера построим систему аксиом для фрейма f_{11} . Рассматривать будем, только замкнутые классы глубины 4, ширины 2. Логика $\Lambda(F_{11})$, определяемая классом F_{11} , задается следующим набором аксиом: аксиомы классического исчисления высказываний, аксиома нормальной модальной логики K, формула Гжегорчика, формула, ограничивающая ширину фрейма двумя точками, формула, ограничивающая глубину фрейма четырьмя точками, а также следующие три формулы:

1. $\diamond \Box(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \diamond \Box(p_2 \wedge \neg p_1) \rightarrow (((q_1 \wedge \diamond \Box(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \diamond \Box(p_2 \wedge \neg p_1)) \rightarrow \diamond q_2) \vee ((q_2 \wedge \diamond \Box(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \diamond \Box(p_2 \wedge \neg p_1)) \rightarrow \diamond q_1)),$
2. $\diamond \Box(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \diamond \Box(p_2 \wedge \neg p_1) \rightarrow (((\neg p_1 \wedge \diamond \Box p_1) \rightarrow \diamond \Box p_2) \wedge ((\neg p_2 \wedge \diamond \Box p_2) \rightarrow \diamond \Box p_1)),$
3. $\diamond (q_1 \wedge \neg p \wedge \diamond \Box p) \wedge (q_2 \wedge \neg p \wedge \diamond \Box p) \rightarrow (\diamond (q_1 \wedge \diamond q_2) \vee \diamond (q_2 \wedge \diamond q_1)).$

Эти три формулы истинны на фрейме f_{11} . Докажем на каких фреймах будут опровергаться эти формулы.

Доказательство. Формула 1 будет опровергаться на фреймах, у которых в первом слое находится две точки, и каждая из которых достижима из обеих точек двухэлементной антицепи. То есть на фреймах: $f_{23}, f_{24}, f_{29}, f_{33}, f_{34}, f_{35}, f_{36}, f_{37}, f_{38}, f_{41}, f_{42}, f_{43}, f_{44}$.

Этой формулы недостаточно, чтобы опровергнуть все фреймы, поэтому нам понадобится формула 2. Она опровергается на фреймах, которые имеют две точки на первом слое и как минимум, две точки на втором слое, при чем каждая из двух точек первого слоя может быть достижима только из одной точки двухэлементной антицепи, либо одна из двух точек первого слоя может быть достижима из двухточек двухэлементной антицепи, при этом вторая точка первого слоя достижима, только одной точкой двухэлементной антицепи. Это фреймы: $f_{17}, f_{18}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{25}, f_{30}, f_{31}, f_{32}, f_{39}, f_{40}$.

Но и этой формулы не достаточно, поэтому рассмотрим формулу 3. Данная формула опровергается на оставшихся фреймах, у которых на первом слое одна точка и есть как минимум две несравнимые точки. На таких фреймах как: $f_{15}, f_{16}, f_{27}, f_{28}$.

Итак, мы построили замкнутые классы фреймов и на примере показали, как строить систему аксиом для модальных логик глубины не более 4 и ширины не более 2.



АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРОДОЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЕРЦИИ

Ерзунова О.А., Кулаев К.А.,

научный руководитель, д-р физ.-мат. наук, профессор Садовский В.М.

Сибирский федеральный университет

На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получено уточненное уравнение для описания продольных волн в стержне, учитывающее инерцию движения частиц в направлении свободной от напряжений боковой поверхности. Показано, что в отличие от классического волнового уравнения, которое поперечную инерцию не учитывает, по уточненному уравнению монохроматические волны обладают дисперсией, причем фазовая скорость волн уменьшается с увеличением частоты. Система резонансных частот, неограниченная в классической модели, также оказывается ограниченной. Построена устойчивая разностная схема для численного исследования краевых задач для этого уравнения. С помощью компьютерной программы, разработанной в системе Matlab, выполнены расчеты распространения волн, вызванных импульсными воздействиями. Показано, что фронты ударных волн размазываются, а за фронтами волн на эпюрах распределения перемещений возникают характерные колебания, вызванные боковым разрежением.

Пусть u и w – смещения в продольном и поперечном направлениях x и z , вызванные действием внешней нагрузки. В соответствии с законом Гука для продольной и поперечной деформаций справедливо уравнение $w_z = -\nu u_x$ (ν – коэффициент Пуассона, нижние индексы служат для обозначения частных производных), интегрирование которого дает $w = -\nu z u_x$. Таким образом, кинетическая энергия стержня длины l с учетом энергии поперечного движения и потенциальная энергия вычисляются по формулам:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dz = \frac{\rho h}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + (\nu \dot{u}_x)^2) dx,$$

$$\Pi = \frac{\rho a^2}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l u_x^2 dx dz = h \frac{\rho a^2}{2} \int_0^l u_x^2 dx,$$

где $r = h/(2\sqrt{3})$ – радиус инерции поперечного сечения, h – толщина стержня, a – скорость упругих волн, точка над символом означает частную производную по времени.

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского вариация функционала действия при фиксированных начальном и конечном состояниях механической системы равна нулю:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0.$$

Здесь δA – виртуальная работа внешних сил, равная сумме работ внешних давлений p_0 и p_1 , приложенных к концам стержня:

$$\delta A = \int_{-h/2}^{h/2} (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}) dz = h(p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}).$$



Непосредственное вычисление вариаций приводит к уравнению

$$\ddot{u} - a^2 u_{xx} - (vr)^2 \ddot{u}_{xx} = 0, \quad (1)$$

и динамическим граничным условиям

$$\rho(a^2 u_x + v^2 r^2 \ddot{u}_x)|_{x=0,l} = -p_{0,1} \quad (2)$$

Кинематические граничные условия для уравнения (1) ставятся обычным способом – задаются смещения в концах интервала $u|_{x=0,l} = u_{0,1}(t)$. Начальные данные формулируются так же, как и для классического волнового уравнения:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = \psi(x).$$

Уравнение (1) было впервые получено Релеем [1] при моделировании волновых движений в упругих стержнях. Из него для монохроматической волны $u = \hat{u} e^{i(\omega t - kx)}$ может быть получено дисперсионное уравнение (ω – частота, k – волновое число):

$$\omega^2 + (vr\omega k)^2 = (ak)^2, \quad (3)$$

Фазовая скорость волны равна: $c = \omega/k = \sqrt{a^2 - (vr\omega)^2}$. Отсюда видно, что, в отличие от классического варианта модели, соответствующего случаю $v=0$, в уточненном варианте волны обладают дисперсией, причем допустимый диапазон частот ограничен: $\omega \leq a/(vr)$.

Рассматривая процесс периодического по времени воздействия на стержень, определим систему резонансных частот. Подстановка $u(x,t) = \hat{u}(x)e^{i\omega t}$ в (1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(a^2 - (vr)^2)\hat{u}'' = -\omega^2 \hat{u},$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям $\hat{u}(0) = 0$, $\hat{u}(l) = \hat{u}_0$, имеет вид

$$\hat{u}(x) = \frac{\hat{u}_0}{\sin kl} \sin kx, \quad \left(k = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 - (vr\omega)^2}} \right).$$

Резонансные частоты, которые являются решениями уравнения $\sin kl = 0$, равны

$$\omega_j = \frac{\pi a j}{\sqrt{l^2 + (\pi v r j)^2}} \rightarrow \frac{a}{vr} \quad (\text{при } j \rightarrow \infty).$$

Для классической модели такие частоты определены, например, в [2]. Отличие состоит в том, что при $v > 0$ диапазон резонансных частот также ограничен, причем тем же самым значением частоты $a/(vr)$.

Для численного решения уравнения использовалась неявная трехслойная разностная схема второго порядка аппроксимации. С помощью спектрального анализа установлено, что эта схема устойчива при выполнении условия Куранта–Фридрихса–Леви. Вычислительный алгоритм и программная реализация разностной схемы основаны на методе трехдиагональной прогонки [3]. В системе Matlab выполнены расчеты задачи о распространении П – образного импульса скорости по стержню. Для сравнения получено решение аналогичной задачи на основе классического волнового уравнения. Результаты расчетов показали принципиальное отличие решений по разным моделям, которое сводится к сглаживанию волновых фронтов при использовании уточненного уравнения и появлению характерных осцилляций за передними фронтами волн.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТИПОВОГО ЭЛЕКТРОПОДВИЖНОГО СОСТАВА МЕТРОПОЛИТЕНА

Ильяненко В.О.,

научный руководитель канд. техн. наук Колбасинский Д.В.

Сибирский федеральный университет

В современном мире метро является важнейшей частью инфраструктуры любого развитого города. Население увеличивается, города расширяются, мощности и физические возможности инфраструктуры населенных пунктов не безграничны, поэтому неразрушающие исследования метрополитена особенно необходимы. Подвижной состав метрополитена достаточно хорошо изучен с точки зрения эффективности энергопотребления [1], однако не сформулировано адекватной математической модели, корректно отражающей процессы его движения. Метропоезда представляют собой сложную нелинейную дискретную систему, что говорит о том, что аналитическая модель его движения - есть система дифференциальных уравнений.

Целью данной работы является создание математической модели процесса движения поезда по линиям метрополитена, которая позволит проводить неразрушающие исследования подвижного состава при различных режимах его эксплуатации. Для этого, помимо создания математической модели, необходимо разработать численный метод решения задачи Коши систем дифференциальных уравнений.

На сегодняшний день проведен анализ существующих математических моделей различных подвижных составов, анализ численных методов решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений, составлена математическая модель движения подвижного состава метрополитена, представляющая собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с неопределенными коэффициентами.

Рассматриваемая в работе задача математического моделирования (с позиции объекта моделирования и требуемых результатов) является достаточно новым и мало исследованным направлением. Однако существуют разработки общего вида [1], [2], представляющие собой некую платформу для дальнейших исследований. В частности, в [1] представлена математическая модель движения одномоторного электротропдвижного состава с двигателями постоянного тока и реостатно-контакторной системой управления (на примере базовой модели троллейбуса):

$$\begin{cases} \frac{d\omega_d}{dt} = \frac{F'_p(\omega, I_a)}{M_{np} \frac{R_k}{\mu_{ред}} + \frac{J}{\mu_{ред} R_k}} \\ \frac{dI_a}{dt} = \frac{U(I_a, N) - R_a I_a - \Phi(I')\omega_d}{L_a} \end{cases}$$

где ω_d - угловая скорость вращения тягового электродвигателя; I_a - ток якоря тягового электродвигателя; $F'_p(\omega, I_a)$ - результирующая сила тяги; M_{np} - приведенная масса подвижного состава электропоезда; R_k - радиус колеса вагона; $\mu_{ред}$ - передаточное число редуктора; J - момент инерции вращающихся масс; $U(I_a, N)$ - напряжение на зажимах тягового двигателя; N - номер позиции группового



реостатного контроллера; R_a - полное сопротивление силовой цепи; c - конструктивный коэффициент, определяемый параметрами тягового двигателя; Φ - магнитный поток тягового двигателя; I' - ток обмотки тягового двигателя; L_a - полная индуктивность силовой цепи; t - время; $\frac{d}{dt}$ - полная производная по времени.

В мире эксплуатируется большое количество моделей вагонов метрополитена. В России чаще всего используются модели серии 81 («номерные») а на отдельных линиях экспериментальные модели типа «Яуза», «Русич» и др. Однако, на сегодняшний день наиболее распространен тип вагонов 81-714/717, на базе их и решается задача.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_d}{dt} = \frac{F'_p(\omega, I_{я})}{M_{пр} \frac{R_k}{\mu_{ред}} + \frac{J}{\mu_{ред} R_k}} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - c\Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ F'_p = 4 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_1})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} - F_{сопр} \end{array} \right. \quad 2. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_d}{dt} = \frac{F'_p(\omega, I_{я})}{M_{пр} \frac{R_k}{\mu_{ред}} + \frac{J}{\mu_{ред} R_k}} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - c\Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ F'_p = 4 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_2})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} - F_{сопр} \end{array} \right.$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_d}{dt} = \frac{F'_p(\omega, I_{я})}{M_{пр} \frac{R_k}{\mu_{ред}} + \frac{J}{\mu_{ред} R_k}} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - c\Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - c\Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ F'_p = 2 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_1})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} + 2 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_2})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} - F_{сопр} \end{array} \right.$$

$$4. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_d}{dt} = \frac{F'_p(\omega, I_{я})}{M_{пр} \frac{R_k}{\mu_{ред}} + \frac{J}{\mu_{ред} R_k}} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - \Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ \frac{dI_{я}}{dt} = \frac{U(I_{я}, N) - R_a I_{я} - \Phi(I')\omega_d}{L_a} \\ F'_p = 2 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_1})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} + 2 \cdot \frac{c\Phi(I_{я_2})\eta(I_{я})\mu_{ред}}{R_k} - F_{сопр} \end{array} \right.$$



Заключение. Подобная методика позволяет моделировать практически все виды подвижного состава с двигателями постоянного тока и реостатно-контакторной системой управления.

Для решения систем дифференциальных уравнений приведенной математической модели процесса движения подвижного состава по линиям метрополитена необходимо:

- разработать численный метод для решения полученных систем;
- разработать и реализовать алгоритм численного решения систем полученных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Колбасинский, Д. В. Энергосбережение на городском электрическом транспорте : монография / Д. В. Колбасинский. – Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 140 с.

2. Устройство и ремонт электропоездов метрополитена : учебник для ПТУ / Э. А. Сементовский, А. А. Богданов, В. С. Гусев, Ю. Я. Могильнер; Под ред. Э. А. Сементовского. – Москва : Транспорт, 1991. – 335 с.

3. Теория электрической тяги / В. Е. Розенфельд, И. П. Исаев, Н. Н. Сидоров, М. И. Озеров; Под ред. И. П. Исаева. – Москва : Транспорт, 1995. – 294 с.

4. Ефремов, И. С. Теория и расчет электрооборудования подвижного состава городского электрического транспорта : учебник для вузов / Ефремов И. С, Косарев Г. В. – Москва : Высшая школа, 1976. – 480 с.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕЖДУ СЛОЯМИ НЕФТИ И ВОДЫ

Ишкачева С.А

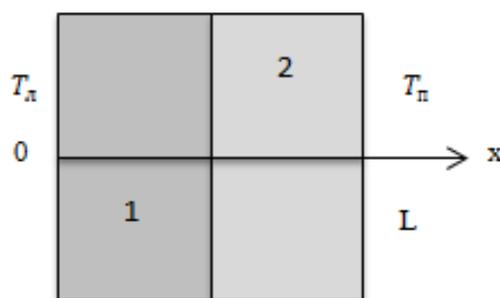
Изучение процессов теплообмена всегда играло видную роль в развитии техники и естествознания. В конце позапрошлого и в начале прошлого веков исследования в этой области стимулировались главным образом потребностями возникшей в то время теплоэнергетики. В годы после второй мировой войны развитие авиации, атомной энергетики ракетно-космической техники выдвинуло новые постановки задач теплообмена и вместе с тем – новые, более жесткие требования к полноте и надежности прогностических возможностей теории.

За последние десятилетия сфера интенсивного исследования и применения явлений теплообмена чрезвычайно расширилась. Она включает как ведущие направления техники, так и основные естественные науки. Теоретическое исследование процессов теплообмена в настоящее время в значительной степени базируется на их численном моделировании с использованием ЭВМ. Это стало возможным благодаря значительному прогрессу в развитии вычислительных методов решения задач для уравнений в частных производных и увеличению мощности современных вычислительных машин.

Численное моделирование процессов теплообмена в настоящее время приобретает все более значительную роль в связи с тем, что для современной науки и техники необходимы достоверные прогнозы таких процессов, экспериментальное изучение которых в лабораторных или натуральных условиях очень сложно и дорого, а в некоторых случаях просто невозможно. Численное моделирование процессов теплопереноса все успешнее входит в практику работы различных научно-исследовательских, проектно-конструкторских и производственных учреждений.

Во многих важных практических приложениях проводится оценка температурных полей в многослойных деталях конструкций.

Проанализируем процесс теплопереноса в теле, представляющем собой совокупность двух пластин с различными теплофизическими характеристиками.



Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < x^*; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, x^* < x < L; \end{cases}$$



где 1 соответствует левой пластине (1 на рисунке), 2 соответствует правой пластине (2 на рисунке).

Начальные и граничные условия можно записать следующим образом:

$$t = 0: T = T_0, 0 \leq x \leq L;$$

$$x = 0: T = T_n, t > 0;$$

$$x = L: T = T_n, t > 0;$$

$$\begin{cases} T_1(t, x^*) = T_2(t, x^*), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=x^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=x^*}. \end{cases}$$

Решение данной задачи проводится численно на основе неявной разностной схемы. Алгоритм решения сформулированной краевой задачи можно представить следующим образом.

Сначала проводим аппроксимацию дифференциального уравнения конечными разностями, получаем систему линейных алгебраических уравнений, которые решаем методом прогонки. При нахождении прогоночных коэффициентов в области $0 \leq x < x^*$ используем характеристики среды 1, а при $x^* < x \leq L$ – среды 2. В точке же $x = x^*$ необходимо использовать граничное условие 4 рода.



ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

Казарников А.В.

научный руководитель кандидат физ.-мат. наук Ревина С.В.

Южный Федеральный Университет

Рассматривается система уравнений Рэлея с диффузией:

$$\begin{cases} v_t = \nu v_{xx} + w \\ w_t = \nu w_{xx} - v + \mu w - w^3 \end{cases} \quad (1)$$

где $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t > 0$, $\mu \in R$ - управляющий параметр, $\nu > 0$ - фиксированный параметр, отвечающий за вязкость. Предполагается, что на концах отрезка заданы однородные краевые условия первого или второго рода, или условия второго рода при дополнительном предположении нулевого среднего.

Данная система является частным случаем системы Фитцхью-Нагумо, которая широко известна в качестве примера модели возбудимой среды и изначально возникла как модель распространения нервного импульса.

В случае, когда $\nu = 0$ и зависимости от пространственной переменной x не предполагается, приходим к классической системе обыкновенных дифференциальных уравнений Рэлея:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \mu y_2 - y_2^3 \end{cases} \quad (2)$$

где $y_1(t) = v(t)$, $y_2(t) = w(t)$. Известно, что в конечномерном случае нулевое равновесие системы (2) при $\mu < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\mu > 0$ неустойчиво; при положительных μ в системе присутствует устойчивый предельный цикл.

Целью работы является построение асимптотики автоколебаний системы (1), отвлекаясь от тривиального решения при изменении управляющего параметра μ и фиксированном коэффициенте диффузии ν . Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова-Шмидта в форме, развитой в работах В.И. Юдовича (см. [1]). Метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье-Стокса ([2–3]). Подробные выкладки приведены в ([4,5]).

Система (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u = (v, w)$, компоненты которых принадлежат $L_2[0, 1]$. Краевые условия учитываются за счет выбора области определения оператора. Найдены критические значения параметра μ , показано что в зависимости от значения коэффициента диффузии ν в системе происходит монотонная либо колебательная потеря устойчивости.

В случае колебательной потери устойчивости явно найдены первые члены асимптотики вторичного периодического по времени решения. Показано, что в системе Рэлея с диффузией (1) происходит мягкая потеря устойчивости нулевого равновесия и при малых $\varepsilon > 0$ в ней присутствует устойчивый предельный цикл.

Получены формулы для общего члена разложения. Методом математической индукции доказано, что четные члены асимптотики равны нулю. Получены формулы для нечетных членов асимптотики, применимые при $n \geq 5$. Установлено, что частные решения уравнений при нечетных n представляют собой нечетные тригонометрические полиномы.

Установлено, что в случае, когда на концах отрезка заданы краевые условия первого рода, либо второго рода с дополнительным условием нулевого среднего, в



выражения для n -го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации базисных функций с нечетными индексами не выше n . Если на концах отрезка заданы смешанные краевые условия, то в выражениях для n -го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации базисных функций с индексами не выше $\frac{n+1}{2}$.

Далее приведены построенные графики полученных асимптотик для различных типов краевых условий. В случае краевых условий второго рода в системе наблюдается пространственно-однородный автоколебательный режим.

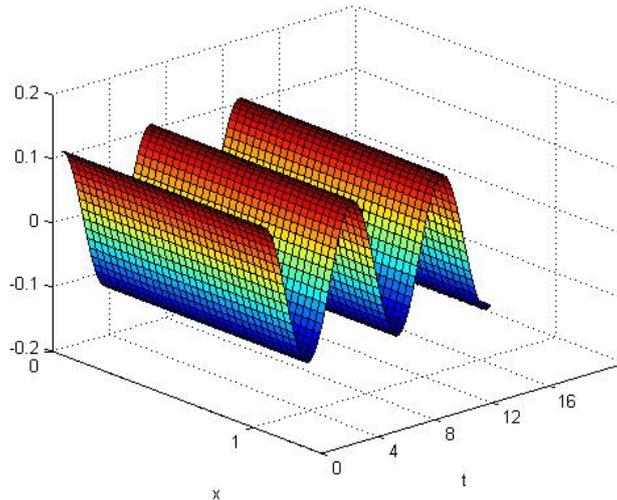


Рисунок 1. Первая компонента асимптотики вторичного решения в случае краевых условий второго рода

В случае краевых условий первого рода в системе присутствует пространственно-неоднородное вторичное решение.

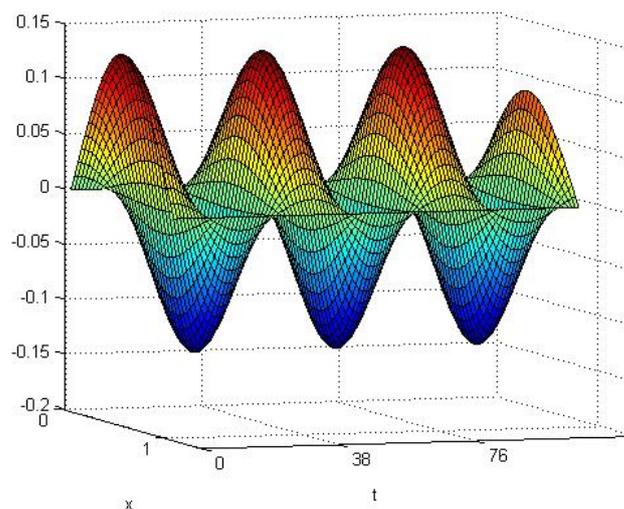


Рисунок 2. Первая компонента асимптотики вторичного решения в случае краевых условий первого рода

Для краевых условий второго рода на подпространстве функций, ортогональных единице наблюдается также неоднородный пространственно-периодический режим:

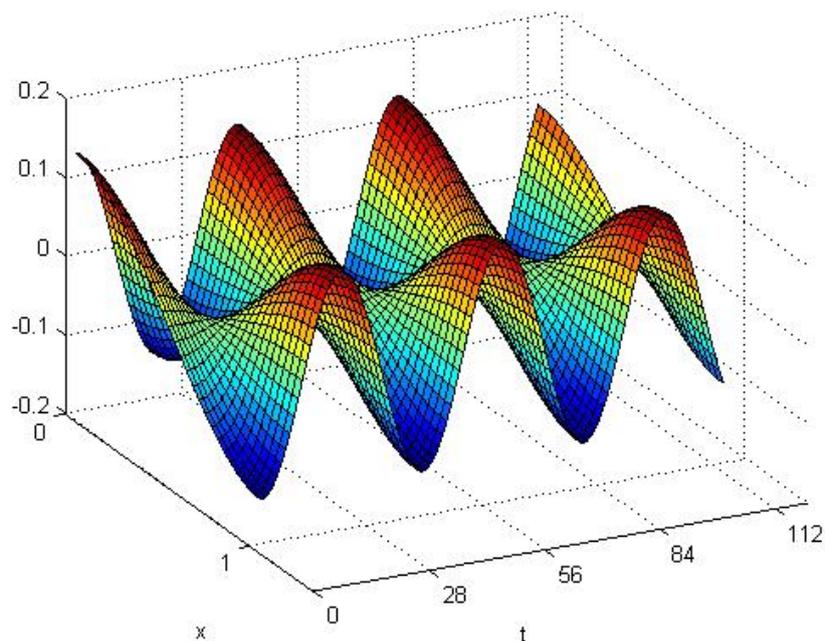


Рисунок 3. Первая компонента асимптотики вторичного решения в случае краевых условий второго рода с дополнительным условием нулевого среднего

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ

Кириченко О.В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Ревина С.В.

Южный федеральный университет

Рассматривается задача устойчивости относительно длинноволновых возмущений основного пространственно периодического течения общего вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1(z), V_2(x))$, в предположении равенства нулю среднего $\langle V_2 \rangle = 0$, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности. Найдены первые члены асимптотики собственных значений и собственных функций. Получены условия, при которых происходит колебательная потеря устойчивости, рассмотрены примеры расчета поведения пассивной примеси для конкретных течений.

1. Введение. Рассматривается двумерное $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами l_1, l_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где ν - безразмерная вязкость. Через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x_1 , а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ - среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} f(\mathbf{x}, t) dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2.$$

Средняя по пространству скорость течения считается заданной $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}$.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости \mathbf{v} по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами l_1, l_2 соответственно. Предполагается, что $l_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$.

Предположим, что задача имеет стационарное пространственно-периодическое решение: $\mathbf{V} = (\alpha V_1(z), V_2(x))$, причем среднее скорости вдоль «длинного» периода равно нулю: $\langle V_2 \rangle = 0$. Рассматриваемый класс основных течений, близких к параллельным, обобщает классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости $\mathbf{V} = (0, \gamma \sin(x_1))$.

Впервые длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных параллельных течений рассматривалась в [1]. В [2] были найдены главные члены асимптотики вторичных автоколебательных режимов для основного течения, близкого к параллельному, но общие закономерности в коэффициентах асимптотических разложений выявлены не были. В [3] для сдвиговых течений удалось получить рекуррентные формулы асимптотических разложений. При этом коэффициенты асимптотических разложений явно выражались через некоторые вронскианы, а также интегральные операторы типа Вольтерра.

Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, вывод таких формул первых членов асимптотики, которые можно будет обобщить для получения общих членов



асимптотики. Во-вторых, применение полученных формул для изучения поведения пассивной примеси во вторичном течении.

2. Обозначения. Через H обозначим подпространство функций из $L_2(0, l_1)$, ортогональных единице. Определим оператор I - обратный к оператору дифференцирования и вполне непрерывный - по правилу:

$$If = \int_0^x f(s)ds - \left\langle \int_0^x f(s)ds \right\rangle.$$

Через $W(f, g)$ обозначим вронскиан функций f и g : $W(f, g) = f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx}$.

Фигурными скобками будем обозначать отклонение периодической функции от ее среднего значения по периоду: $\{F(x)\} = F(x) - \langle F \rangle$. Функция θ характеризует отклонение скорости от ее среднего значения: $\theta'' = V_2 - \langle V_2 \rangle$, $\langle \theta \rangle = 0$.

3. Нахождение первых членов асимптотики. Разыскивая решение линеаризованного на основном течении уравнения возмущений в виде нормальных колебаний (здесь и в дальнейшем $x = x_1$, $z = \alpha x_2$), приходим к линейной спектральной задаче:

$$\sigma \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 \frac{dV_1}{dz} + \alpha V_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha V_2(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\sigma \varphi_2 + \varphi_1 \frac{dV_2}{dx} + \alpha V_1(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \alpha V_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \langle \varphi_2 \rangle = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1 dz = 0.$$

Критическим назовем значение параметра ν , при котором одно или несколько значений σ выходят на мнимую ось. Неизвестные собственные значения σ , вектор-функцию $\Phi(x, z)$, функцию $P(x, z)$, а также критическое значение вязкости ν будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α :

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, \quad \nu = \nu_* + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \alpha^k$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k \alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k.$$

Подставляем ряды в уравнения и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях α .

Тогда в порядке α^0 приходим к выражениям:

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \nu_*^2 = \langle \theta'^2 \rangle,$$

$$\varphi_1^0 = \varphi_1^0(z), \quad \varphi_2^0 = \frac{1}{\nu_*} \varphi_1^0(z) a_0(x), \quad \text{где } a_0 = \frac{d\theta}{dx},$$

$$P^0 = const.$$

В порядке α^1 получаем:

$$\sigma_3 = \frac{3im^3 \langle \theta \theta'^2 \rangle}{\nu_*^2}, \quad \nu_1 = 0,$$

$$\varphi_1^1 = -\frac{1}{\nu_*} I(a_0) \frac{d\varphi_1^0}{dz} + \langle \varphi_1^1 \rangle,$$



$$\varphi_2^1 = \frac{1}{v_*^2} \frac{d\varphi_1^0}{dz} a_1(\theta) + \frac{1}{v_*^2} \varphi_1^0(z) V_1(z) I(a_0) + \frac{1}{v_*} \langle \varphi_1^1 \rangle a_0(x) - \frac{v_1}{v_*} \varphi_2^0, \quad \text{где } a_1 = I\{W(\theta', \theta)\},$$

$$P^1 = q_1(x) \frac{d\varphi_1^0}{dz} + \langle P^1 \rangle, \quad q_1(x) = -2 \frac{d\theta}{dx},$$

$$\langle P^1 \rangle = -2 \langle V_2(x) \varphi_2^1 \rangle.$$

Также на этом шаге находится $\varphi_1^0(z) = e^{-imz}$, где $m \neq 0$ - волновое число.

В порядке α^2 получаем:

$$\sigma_4 = \frac{1}{v_*^3} im^3 \langle \langle V_1 \rangle \rangle \langle \theta I\{W(\theta'', I^2(a_0))\} + a_1 \rangle,$$

$$v_2 = -\frac{1}{2v_*^3} \left(m^2 \langle \theta' a_2 \rangle + \langle \langle V_1^2 \rangle \rangle \langle \theta^2 \rangle \right),$$

$$\varphi_1^2 = -\frac{1}{v_*^2} \frac{d}{dz} \left(\varphi_1^0(z) V_1(z) \right) I^2(a_0) - \frac{1}{v_*} \frac{d \langle \varphi_1^1 \rangle}{dz} I(a_0) - \frac{1}{v_*^2} \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} I(a_1) + \langle \varphi_1^2 \rangle,$$

$$\varphi_2^2 = \frac{1}{v_*^3} \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} a_2 + \frac{1}{v_*} \langle \varphi_1^2 \rangle a_0 + \frac{1}{v_*^3} \frac{d}{dz} \left(\varphi_1^0(z) V_1(z) \right) I^2 \{W(\theta'', I^2(a_0))\} + \frac{1}{v_*^2} \frac{d \langle \varphi_1^1 \rangle}{dz} a_1 +$$

$$+ \frac{1}{v_*^2} \langle \varphi_1^1 \rangle V_1(z) I(a_0) + \frac{1}{v_*^3} V_1^2(z) \varphi_1^0(z) I^2(a_0) + \frac{1}{v_*^3} V_1(z) \frac{d\varphi_1^0}{dz} I(a_1) - \frac{v_2}{v_*} \varphi_2^0,$$

где $a_2 = I^2 \left[\{W(\theta'', I(a_1) + v_*^2 (q_1 - a_0))\} \right]$

$$P^2 = \frac{1}{v_*} \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} q_2 - 2a_0 \frac{d \langle \varphi_1^1 \rangle}{dz} - \frac{2}{v_*} \frac{dV_1}{dz} \varphi_1^0(z) I(a_0) + \langle P^2 \rangle, \quad \text{где } q_2 = -a_1 + I\{\theta'' I(a_0)\},$$

$$\langle P^2 \rangle = -2 \langle V_2(x) \varphi_2^2 \rangle.$$

4. Примеры расчета поведения пассивной примеси для конкретных течений.

Рассмотрим траектории движения частиц пассивной примеси $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. В качестве поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ берется поле скорости вторичного течения, имеющее вид

$$v_1 = \alpha V_1 + \varepsilon \alpha^1 (\varphi_1 e^{i\omega t} + \varphi_1^* e^{-i\omega t}),$$

$$v_2 = V_2 + \varepsilon \alpha^1 (\varphi_2 e^{i\omega t} + \varphi_2^* e^{-i\omega t}),$$

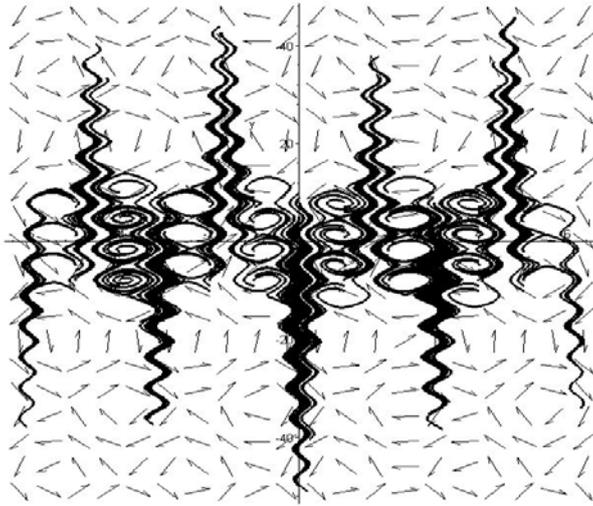
$$\text{где } \omega = \langle V_2 \rangle \alpha^1 + O(\alpha^2).$$

Во всех примерах положим $m = 1$.

Пример 1.

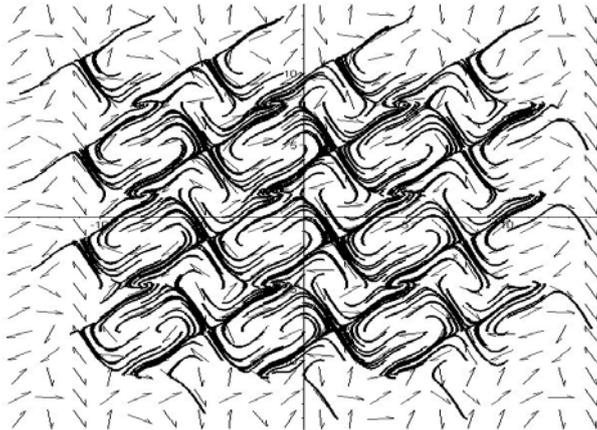
Будем рассматривать $\mathbf{V} = (-0.2 \sin(0.2z), -\sin(x) - 2 \cos(x) - 12 \cos(2x))$ в качестве основного течения и волновое число $\alpha = 0.001$. Найдём траектории движения частиц пассивной примеси.





Пример 2.

Возьмем $\mathbf{V} = (\alpha \sin(0.2z), -\sin(2x) - \cos(x))$ в качестве основного течения и волновое число $\alpha = 0.00001$. Найдём траектории движения частиц пассивной примеси.



Список литературы

1. Юдович В.И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242-249.
2. Мелехов А.П., Ревина С.В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №2. С. 41-56.
3. Ревина С.В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // ЖВМиМФ. 2013. №53(8). С. 1387-1401.
4. Кириченко О.В., Ревина С.В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных течений, близких к параллельным// Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XVII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 14-17 октября 2014 г.)- Ростов-на-Дону, издательство ЮФУ, 2014 г. - С.40-44.



ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Клименко Д.С.,

научный руководитель канд. физ. мат. наук Распопов В. Е.

Сибирский федеральный университет

В работе численно решаются задачи идентификации правых частей специального вида одномерных параболических уравнений.

Рассмотрим следующую обратную задачу: в области $D = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ требуется найти функции $u(t, x)$ и $f(t)g(x)$ удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(k(x)u_x)}{\partial x} + f(t)g(x), (1)$$

начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), (2)$$

краевым условиям:

$$u_x(t, 0) = \psi_1(t), (3)$$

$$u_x(t, 1) = \psi_2(t), (4)$$

а также условиям переопределения:

$$u(T, x) = \alpha(x), (5)$$

$$u(t, \xi) = \beta(t), (6)$$

где ξ - фиксированная точка в интервале $(0, 1)$, а $k(x)$, $u_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\alpha(x)$, $\beta(t)$ - заданные функции.

Предполагаем, что выполнены следующие условия согласования:

$$u_0(\xi) = \beta(0), (7)$$

$$\alpha(\xi) = \beta(T), (8)$$

$$u'_0(0) = \psi_1(0), (9)$$

$$u'_0(1) = \psi_2(0), (10)$$

$$\alpha'(0) = \psi_1(T), (11)$$

$$\alpha'(1) = \psi_2(T). (12)$$

Данную обратную задачу будем решать численно, предварительно сведя ее к прямой. Используя входные данные из уравнения (1), выражаем $f(t)g(x)$:

$$f(t)g(x) = \frac{[u_t(0, x) - k(x)u''_0(x) - k'(x)u'_0(x)][\beta'(t) - k(\xi)u_{xx}(t, \xi) - k'(\xi)u_x(t, \xi)]}{\beta'(0) - k(\xi)u''_0(\xi) - k'(\xi)u'_0(\xi)}. (13)$$

Затем, подставляя полученное выражение для $f(t)g(x)$ в уравнение (1) и вводя новую неизвестную $W(t, x)$ по формуле

$$W(t, x) = u_{xt}(t, x), (14)$$

получаем прямую задачу:

$$W_t(t, x) =$$

$$\frac{\partial^2(k(x)W(t, x))}{\partial x^2} + \frac{[W(0, x) - [k(x)u''_0(x)]'_x + [k'(x)u'_0(x)]'_x][\beta''(t) - k(\xi)W_x(t, \xi) - k'(\xi)W(t, \xi)]}{\beta'(0) - k(\xi)u''_0(\xi) - k'(\xi)u'_0(\xi)} (15)$$

$$W(0, x) =$$

$$W(T, x) \frac{\beta'(0) - k(\xi)u''_0(\xi) - k'(\xi)u'_0(\xi)}{\beta'(T) - k(\xi)\alpha''(\xi) - k'(\xi)\alpha'(\xi)} - [[k(x)\alpha''(x)]'_x +$$

$$[k'(x)\alpha'(x)]'_x] \frac{\beta'(0) - k(\xi)u''_0(\xi) - k'(\xi)u'_0(\xi)}{\beta'(T) - k(\xi)\alpha''(\xi) - k'(\xi)\alpha'(\xi)} + [[k(x)u''_0(x)]'_x + [k'(x)u'_0(x)]'_x] (16)$$

$$W(t, 0) = \psi'_1(t), (17)$$

$$W(t, 1) = \psi'_2(t), (18)$$



где (16) нелокальные начальные данные, (17) и (18) краевые условия.

После того как задача (14)-(18) решена, исходная неизвестная $u(t, x)$ восстанавливается по формуле

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\xi}^x W(t, x) dt dx + \beta(t) - \beta(0) + u_0(x). (19)$$

Доказано, что функции $u(t, x)$ и $f(t)g(x)$, найденные по формулам удовлетворяют задаче (1)-(6).

Задачу (14)-(18) решаем численно, для этого аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{\left[k(x_j) \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 2k'(x_j) \frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2h} + k''(x_j) y_j^n \right] + \left[y_j^0 - \frac{\partial^2(k(x_j)u_0'(x_j))}{\partial x^2} \right] [\beta''(t_n) - k(\xi) \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - k'(\xi) y_m^n]}{\beta'(0) - k(\xi) u_0''(\xi) - k'(\xi) u_0'(\xi)}, n=0, 1, \dots, (N-1), j=1, \dots, (M-1); (20)$$

$$y_j^0 = y_j^n \frac{[\beta'(0) - k(\xi) u_0''(\xi) - k'(\xi) u_0'(\xi)]}{[\beta'(T) - k(\xi) \alpha''(\xi) - k'(\xi) \alpha'(\xi)]} - \left[\frac{\partial^2(k(x_j) \alpha'(x_j))}{\partial x^2} \right] \frac{[\beta'(0) - k(\xi) u_0''(\xi) - k'(\xi) u_0'(\xi)]}{[\beta'(T) - k(\xi) \alpha''(\xi) - k'(\xi) \alpha'(\xi)]} + \frac{\partial^2(k(x_j) u_0'(x_j))}{\partial x^2}, (21)$$

$$y_0^n = \psi_1'(t_n), (22)$$

$$y_M^n = \psi_2'(t_n), n=0, \dots, N; (23)$$

Считая, что $k(x)$ - известная функция, следовательно, известны $k'(x)$ и $k''(x)$, их аппроксимируем точно. А в точке $x = \xi$ соответствует узел с номером m .

Разностную задачу решаем итерационным методом, задав y_j^N на нулевой итерации произвольно. На каждой итерации, на каждом слое по времени имеем систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом прогонки. Критерием окончания итерационного процесса является условие

$$\|y^{s+1} - y^s\| \leq \varepsilon, (24)$$

где s – номер итерации.

Создан программный продукт, проведены тестовые расчеты.

Наряду с рассмотренной задачей, решается задача, в которой уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(k(x)u_x)}{\partial x} + u[f(t)g(x)].$$



О СООТНОШЕНИЯХ КРАМЕРСА-КРОНИГА ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ ПОЛОС ПОГЛОЩЕНИЯ В ЯМР ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРИСУТСТВИИ БЕЛОГО ШУМА

Кондратов Антон Сергеевич

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Фалалеев Олег Владимирович,
Сибирский федеральный университет

При изучении вещества методом ядерного магнитного резонанса (ЯМР) имеется возможность одновременной регистрации сигнала поглощения $A(\omega)$ и сигнала дисперсии $D(\omega)$. Однако теоретическому анализу в настоящее время подлежит лишь сигнал (линия, кривая, спектр, полоса, ...) поглощения. Наряду с другими поправками важной задачей прецизионного эксперимента является выделение «чистого» сигнала поглощения из линейной комбинации (смеси, суперпозиции, ...): $a \cdot A(\omega) + b \cdot D(\omega)$ [1]. Эта задача решается экспериментатором «на интуитивной основе», не позволяющей количественно оценить степень «примеси дисперсии» в сигнале поглощения ЯМР. В данной работе, которая является продолжением работы [2], на основе математического моделирования рассматривается возможность ее решения для общего случая полосы поглощения в ЯМР твердого тела в присутствии белого шума.

Как и в каждом разделе физики (прежде всего, в оптике), в ЯМР имеются конкретные теории для расчета $A(\omega)$, $D(\omega)$ – действительной и мнимой частей комплексной физической величины. Так, например, в ЯМР жидкостей с большими временами релаксации уравнения Блоха [1] определяют частотные зависимости мнимой и действительной частей магнитной восприимчивости, при этом мнимая часть, отождествляемая с сигналом поглощения $A(\omega)$, является лоренцевой функцией. Известны, однако, общие соотношения Крамерса-Кронига, связывающие $A(\omega)$ с $D(\omega)$, независимо от конкретных особенностей физической теории (разумеется, уравнения Блоха согласуются с ними). Поэтому, следуя [3], мы решили использовать хорошо известную пару уравнений Крамерса-Кронига, написав программу вычисления общего для них «оператора K »:

$$F(\omega) = Z(i_\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(i+j) - f(i-j)}{j}, \quad (1)$$

где i, j – натуральные числа от 0 до $n-1$ ($n-1$ – количество точек, в которых задана функция $f(i)$; если $i \pm j$ выходит за пределы отрезка $[0, n-1]$, то значение $f(i \pm j)$ считаем равным нулю). Как видно, действуя на функцию $f(i)$, оператор K обращает её в $F(\omega)$. Применительно к решаемой задаче –

$$K A(\omega) = -D(\omega); \quad K D(\omega) = +A(\omega). \quad (2)$$

Под профилем полосы поглощения в ЯМР твердого тела будем иметь в виду свертку $F(\omega)$ линии поглощения $f(\omega)$ (обычно гауссовой или лоренцевой) с частотным распределением $g(\omega)$:

$$(f * g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot g(\omega - y) dy. \quad (3)$$

Классическим примером является функция Абрагама [4] – так называемая, «свертка гаусса с прямоугольником». Многочисленные примеры используемых в ЯМР твердого тела распределений $g(\omega)$ можно найти в [5]. Их характерной особенностью является наличие разрывов, в частности – ступенек на краях.



Моделирование с целью анализа профиля полосы поглощения проводилось следующим образом. К выбранной модели с профилем $A(\omega)$ добавлялся белый шум, затем вычислялась дисперсия $D(\omega)$, и в качестве «экспериментального» профиля полосы поглощения рассматривалась линейная комбинация:

$$A_{exp}(\omega) = \cos\alpha \cdot A(\omega) + \sin\alpha \cdot D(\omega), \quad (4)$$

где α – угол отклонения фазовой настройки датчика ЯМР с квадратурным детектированием от идеального значения, обеспечивающего «чистый» сигнал поглощения (при $\alpha = 0$). Согласно теории ЯМР-датчика [1], соответствующая «экспериментальная» дисперсия имеет вид:

$$D_{exp}(\omega) = -\sin\alpha \cdot A(\omega) + \cos\alpha \cdot D(\omega). \quad (5)$$

Фактическое значение α неизвестно, предлагается рассмотреть семейство линейных комбинаций: $\cos\beta \cdot A_{exp}(\omega) + \sin\beta \cdot D_{exp}(\omega)$, которое должно включать в себя $A(\omega)$ при некотором значении β . Очевидно, что для априорно симметричного профиля полосы поглощения, легко определяется искомое значение β . До последнего времени, симметрия служила хорошим критерием отсутствия примеси дисперсии. Однако получаемые в настоящее время результаты показывают, что априорные основания для симметрии профиля полосы поглощения ЯМР отсутствуют. И единственным объективным критерием для $A(\omega)$ является отсутствие отрицательных значений (они появляются при ненулевых значениях α , тем больших, чем больше уровень шумов в эксперименте), – то, варьируя β , получаем подсемейство профилей, претендующих на $A(\omega)$. Это позволяет количественно оценить степень точности получения «чистого» профиля полосы поглощения ЯМР (без «примеси дисперсии»).

На рисунке показаны некоторые результаты моделирования для симметричного профиля полосы поглощения. Использовалась свёртка гауссовой линии с прямоугольником.

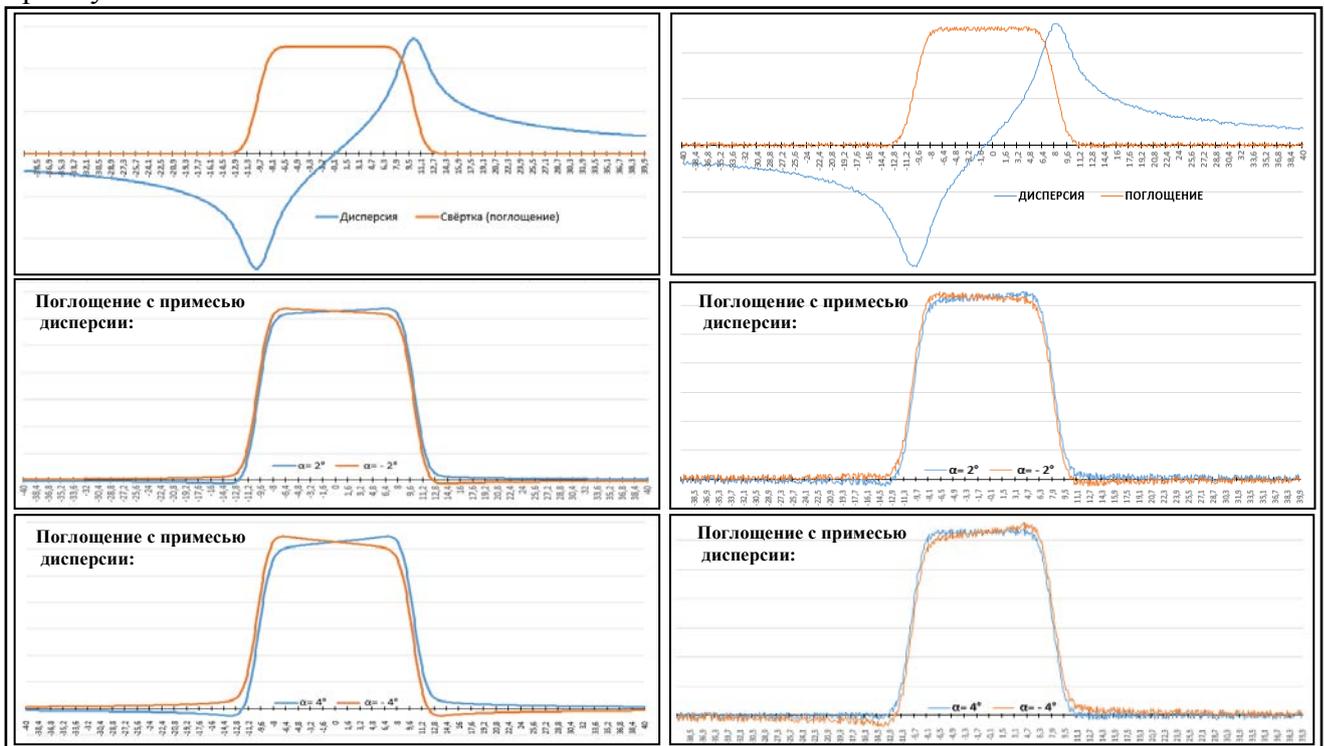


Рис.1. Примеры моделей, без белого шума(слева) и с белым шумом(справа) профилей полос

В заключение отметим, что рассмотренный подход используется в практических испытаниях прецизионного «Анализатора профиля полосы поглощения ЯМР»,

разработанного и изготовленного в КНЦ СО РАН (ИФ, СКТБ) совместно с ООО НПФ «Сибпеленг».

Список публикаций

[1] *Ядерный магнитный резонанс. Учебное пособие под ред. П.М. Бородина. Л.: Изд-во ЛГУ. 1982.*

[2] *Кондратов А.С., Базлаев А.Н., Макиевский И.Я. // Материалы XXI Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных. Омск. 2015. С.68.*

[3] *Бухман Н.С., Куликова А.В. // Молодой ученый. 2013. № 5. С. 1.*

[4] *Абрагам А. // Ядерный магнетизм (пер.с англ). М.: Изд-во иностр. литературы. 1963.*

[5] *Зеер Э.П., Зобов В.Е., Фалалеев О.В. // Новые («кросс-сингулярные») эффекты в ЯМР поликристаллов. Новосибирск: Наука СО. 1991.*





УДК 51.72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУР ИЗ ЧАСТИЦ С МАГНИТНЫМ ДИПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

Корниенко В.С.,

Институт математики и фундаментальной информатики

Сибирского федерального университета

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск

1. Введение

Большой интерес представляет собой поиск и обоснование устойчивых во времени структур из частиц, обладающих магнитным дипольным моментом (диполей). Например, на сегодняшний день с большой достоверностью установлено наличие магнитных материалов в выпадающих микрочастицах импактных космических тел [1]. Во время полета в атмосфере с поверхности тела срываются перегретые частицы, содержащие железо, его соединения и окислы, которые являются ферромагнетиками. При остывании в геомагнитном поле, начиная с некоторой температуры выше точки Кюри, перегретые частицы приобретают дипольный момент. Такая термонамагниченность может в десятки и сотни раз превышать намагниченность, возникающую в том же поле при комнатной температуре [2].

С целью изучения эффектов, возникающих при формировании устойчивых во времени структур, состоящих из диполей, рассмотрена задача численного моделирования взаимодействия дипольных частиц, обладающих большим по сравнению с внешним магнитным полем дипольным моментом.

2. Математическая модель

В качестве магнитной частицы рассмотрим сферу с равномерным распределением плотности. Будем считать, что вектор дипольного момента $\vec{\mu}$ частицы проходит через центр сферы. Для описания движения частиц введем инерциальную [3] декартову систему координат $OXYZ$. Движение каждой частицы представим в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений. Поступательное движение определим перемещением центром масс, а вращательное – вокруг центра масс. Для описания вращательного движения каждой j -той частицы сопоставим ей локальную подвижную систему координат $O_j x_j y_j z_j$, жестко закрепленную с частицей. Описание вращения подвижной системы координат $O_j x_j y_j z_j$ осуществим с помощью углов Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ [4].

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим N частиц. Для каждой из них на момент времени $t = t_0$ в инерциальной декартовой системе координат $OXYZ$ определим следующие величины:

m_j – масса; $\vec{r}_j = (r_j^x, r_j^y, r_j^z)$ – радиус-вектор центра масс частицы;

$\vec{V}_j = (V_j^x, V_j^y, V_j^z)$ – вектор поступательной скорости; $\vec{\omega}_j = (\omega_j^x, \omega_j^y, \omega_j^z)$ – вектор угловой скорости относительно центра масс;

$|\vec{\mu}_j|$ – модуль вектора дипольного момента; $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ – углы Эйлера.

Кроме того, для каждой j -той частицы, $j = 1, \dots, N$, в соответствующей локальной, жестко закрепленной с частицей, системе координат $O_j x_j y_j z_j$, привязанной к главным центральным осям тензора инерции, зададим



$$\tilde{J}_j^T = \begin{pmatrix} \tilde{J}_j & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_j & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}_j \end{pmatrix} - \text{тензор инерции}; \quad \bar{\mu}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\bar{\mu}_j| \end{pmatrix} - \text{вектор дипольного момента.}$$

Здесь и далее символ « \sim » означает, что величина задана в подвижной системе координат.

Требуется для каждой j -той частицы, $j = 1, \dots, N$, определить на момент времени $T > t_0$ значения следующих величин: $\bar{r}_j, \bar{V}_j, \bar{\omega}_j, \varphi_j, \theta_j, \psi_j$.

2.2 Уравнения движения

Взаимодействие дипольных частиц осуществляется посредством поля, порожденного всеми диполями и внешним полем. Напряженность [5] полного поля, действующего на j -тую частицу, описывается формулой

$$\bar{H}^{\text{full}}(\bar{r}_j) = \mu_0 \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\bar{r}_{jk}|^3} \left[3 \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_k \right) \frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} - \bar{\mu}_k \right] + \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{r}_j), \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная проницаемость вакуума; $\bar{r}_{jk} = \bar{r}_k - \bar{r}_j$; $\bar{H}^{\text{ext}}(\bar{r}_j)$ – внешнее магнитное поле, действующее на j -тую частицу.

Известно [5], что сила $\bar{F}_j = (F_j^x, F_j^y, F_j^z)$, действующая на центр масс j -той частицы, представима в виде

$$\bar{F}_j = \nabla \left(\bar{H}^{\text{full}}(\bar{r}_j) \cdot \bar{\mu}_j \right), \quad (2)$$

где символ « ∇ » означает оператор градиента: $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$. В качестве дифференциального уравнения, описывающего поступательное движение j -той частицы, используем второй закон Ньютона. После несложных преобразований с учетом (1), (2) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{r}_j}{dt} = \bar{V}_j, \\ \frac{d\bar{r}_j}{dt} = \frac{\mu_0}{m_j} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\bar{r}_{jk}|^4} \left[15 \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_k \right) \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_j \right) \frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} - \right. \\ \left. - 3 \left(\left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_k \right) \bar{\mu}_j + \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_j \right) \bar{\mu}_k + (\bar{\mu}_k \cdot \bar{\mu}_j) \frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \right) \right] + \frac{1}{m_j} \left(\bar{H}^{\text{ext}}(\bar{r}_j) \cdot \bar{\mu}_j \right). \end{array} \right.$$

Вращательное движение j -той частицы опишем вращением частицы вокруг её центра масс под действием момента сил $\bar{N}_j = (N_j^x, N_j^y, N_j^z)$, который определяется равенством

$$\bar{N}_j = \left[\bar{\mu}_j \times \bar{H}^{\text{full}}(\bar{r}_j) \right], \quad j = 1, \dots, N.$$

Вращательное движение j -той частицы опишем дифференциальным уравнением моментов [5], которое в подвижной системе координат $O_j x_j y_j z_j$ сводится к следующей системе:



$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\omega}_j^x}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^x}{\tilde{J}_j}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^y}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^y}{\tilde{J}_j}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^z}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^z}{\tilde{J}_j}, \end{cases} j=1, \dots, N.$$

Представленная система уравнений характеризуют изменение во времени угловой скорости $\tilde{\omega}_j$, заданной в системе координат $O_j x_j y_j z_j$. Определим, как изменяется во времени сама система координат. Для этого выпишем уравнения, характеризующие связь между производной по времени от углов Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ и угловой скоростью $\tilde{\omega}_j$ [4]

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{1}{\sin \theta_j} (\tilde{\omega}_j^x \sin \psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos \psi_j), \\ \frac{d\psi_j}{dt} = \tilde{\omega}_j^z - \cot \theta_j (\tilde{\omega}_j^x \sin \psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos \psi_j), \\ \frac{d\theta_j}{dt} = \tilde{\omega}_j^x \cos \psi_j - \tilde{\omega}_j^y \sin \psi_j, \end{cases} j=1, \dots, N.$$

Для перевода векторов \tilde{N}_j и $\tilde{\mu}_j$ из локальной системы координат $O_j x_j y_j z_j$ в инерциальную $OXYZ$ и обратно использовались матрицы перехода, описанные в [5].

Для численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений используем методы Рунге-Кутты первого, второго и четвертого порядков точности [6].

2.3 Начальные данные

В качестве диполей рассмотрим однодоменные [7] частицы железа шарообразной формы. Для таких частиц известны их физические параметры [5]:

$$m_j = 0.9 \cdot 10^{-19} \text{ кг}; \tilde{J}_j = 0.7 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; |\tilde{\mu}_j| = 2.1596 \cdot 10^{-17} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

На начальный момент времени $t = t_0$ скорости каждой частицы определим равными нулю

$$V_j^x = V_j^y = V_j^z = 0, \omega_j^x = \omega_j^y = \omega_j^z = 0.$$

Углы Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ и координаты радиус-вектора \vec{r}_j будем задавать различными способами с учетом следующих ограничений:

$$\varphi_j \in [0, 2\pi]; \theta_j \in [0, \pi], \psi_j \in [0, 2\pi], |\vec{r}_j| \leq 10^{-5}/2.$$

3. Вычислительный эксперимент

Сначала были проведены тестовые расчеты, которые показали корректность моделирования с помощью разработанной программы А.В. Вяткина [5]. После этого путем настройки параметров и модификации этой программы была проведена серия вычислительных экспериментов. Приведем результаты одного из них. Пусть в начальный момент времени множество диполей расположено вблизи линии под углом $\alpha = 45.57^\circ$ к плоскости XOY , а направления их дипольных моментов заданы случайным образом. Под действием слабого внешнего магнитного поля

$$|\vec{H}^{\text{ext}}| = 4.68 \cdot 10^{-8} \cdot |\tilde{\mu}_j|,$$



направленного противоположно оси OZ, магнитные частицы упорядочиваются вдоль линий напряженности внешнего поля, как это показано на рисунке 1 слева.

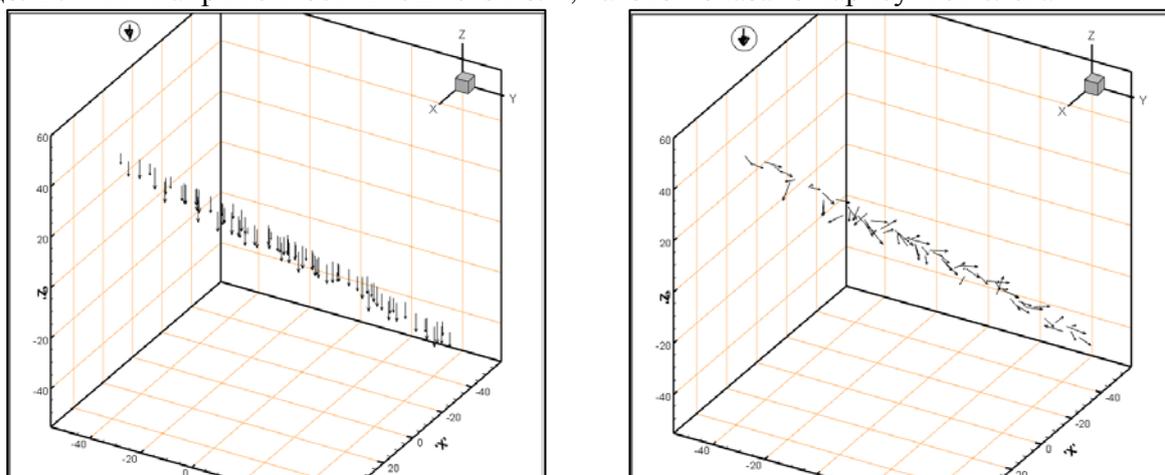


Рисунок 1. Положение частиц: слева – начальное положение частиц, справа – установившееся положение.

Однако с течением времени в результате взаимодействия между собой и с внешним полем дипольные моменты частиц ориентируются вдоль направления расположения частиц в пространстве и принимают устойчивое во времени состояние, которое показано на рисунке 1 справа.

Работа выполнена в рамках Проекта РНФ № 14-01-00147.

Список литературы

1. Краткий справочник по химии / ред. О.Д. Куриленко. – 4-е изд., исправл. и доп. – Киев: Наукова думка, 1974. – 992 с.
2. Яновский Б.М. Земной магнетизм / Б.М. Яновский. – М.: МГУ, 1978.
3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика в 10 т. Т.1: Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
4. Поляхов Н.Н. Теоретическая механика / Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков; под ред. проф. Н.Н. Поляхова – Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 536 с.
5. Вяткин, А.В. Численная аппроксимация поля в задаче взаимодействия дипольных частиц: дис. канд. физ.-мат. наук / Вяткин А.В. – Красноярск, 2010. – 132 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975.
7. Вонсовский С.В. Магнетизм / С.В. Вонсовский. – М.: Из-во физ.-мат. лит., 1971. – 1032 с.



АНАЛИЗ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Косиков Вадим Олегович; Кузнецов Владислав Александрович

филиал Северного (Арктического) Федерального Университета в г. Коряжма

С задачами вычисления площадей криволинейных фигур люди сталкиваются с древности. И постепенно, с развитием математики стали совершенствоваться и появляться новые методы решения данных задач.

Пример: Вычислите площадь фигуры заключенную между кривой $y = 1 - (1 - x)^2$ и $y = 0$, как это изображено на рисунке 1.

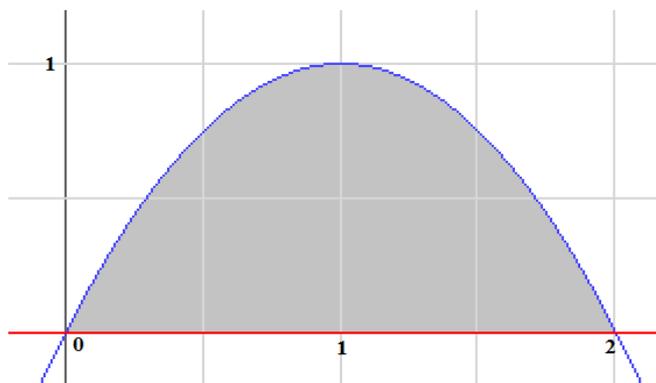


Рисунок 1. Криволинейная фигура

Решение: Решим с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_0^2 1 - (1 - x)^2 dx = \int_0^2 1 dx - \int_0^2 (1 - x)^2 dx = \left(x + \frac{(1 - x)^2}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(0 + \frac{1}{3} \right) = 1 \frac{1}{3}$$

Задача решена.

В данной статье мы рассмотрим другие, не менее известные методы нахождения площадей криволинейных фигур. Первоначально следует отметить, что все они имеют общую схему решения. Для начала, фигура разбивается конечное число элементов, площади которых легко вычислить. Затем, число этих элементов увеличивают до бесконечности, для уточнения площади общей фигуры. К таким методам относятся следующие:

1. Методы левых и правых прямоугольников
2. Метод трапеции
3. Метод парабол (Симпсона).

Каждый из этих методов увеличивает свою точность с увеличением числа элементов разбиения, но так же, и имеет недостатки, зависящие от типа криволинейной фигуры, например.

Разберем каждый из методов подробно.

Метод прямоугольников

Пусть криволинейная фигура заданная функцией $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$. Разделим данный отрезок на n равных частей с шагом $h = (b - a) / n$. Определим значение функции $f(x)$ в каждой части деления, в зависимости от

метода(левых или правых прямоугольников) выбирается значение функции в начале или конце частей. В каждой части деления функции $f(x)$ заменяем прямой, параллельной оси OX . В результате вся функция на отрезке $[a, b]$ заменяется ломаной линией. Во всех отрезках деления находим площадь прямоугольника, как произведение длины отрезка на значение функции $f(x)$. Затем, суммируем эти площади и получаем приближённое значение площади криволинейной фигуры.

Точность каждого метода прямоугольников имеет порядок h .

Изначальное число частей отрезка $[a, b]$ может быть равно 2, и впоследствии, для увеличения точности, число частей на каждом шаге может быть увеличено в 2 раза.

Метод трапеций

Пусть криволинейная фигура заданная функцией $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$. Разделим данный отрезок на n равных частей с шагом $h = \frac{(b-a)}{n}$. Определим значение функции $f(x)$ в каждой узловой точке разбиения x_i , причём $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждой части отрезка заменяем функцию $f(x)$ прямой, соединяющей две соседние узловые точки. В результате, вместо функции $f(x)$ получаем ломаную линию, проходящую через все узловые точки. Если провести перпендикуляры на ось OX , получим множество прямоугольных трапеций. Вычислив их площади и просуммировав их, получим приближённое значение площади криволинейной фигуры. Чем больше частей разбиения отрезка $[a, b]$, тем точнее будет результат. Точность метода трапеций имеет порядок h^2 .

Метод парабол (метод Симпсона)

При одном разбиении (т.е. $n=1$) $f(x)$ заменится прямой линией, т.е. будем иметь метод трапеций.

Суть метода заключается в том, что некоторая парабола намного ближе прилегает к криволинейной фигуре $f(x)$ на заданной части отрезка, чем прямая. Из чего следует, что значение площадей соответствующих частей фигуры ограниченных дугами параболы, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частных криволинейных фигур, ограниченных сверху дугой кривой $f(x)$, чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций, как продемонстрировано на рисунке 2.

На каждой части разбиения функция $f(x)$ заменяется квадратичной параболой $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$. В результате, кривая $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется функцией, состоящей из парабол. Приближённое значение площади криволинейной фигуры равно сумме площадей частей, образованных осью OX , границами частей отрезков и самой параболой.



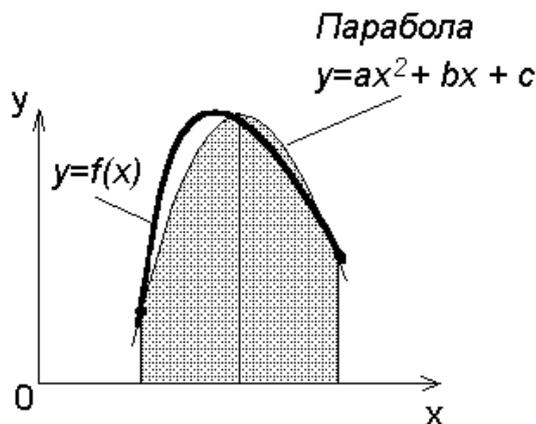


Рисунок 2. Замена кривой $y = f(x)$ параболой $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Каждый шаг деления в методе Симпсона включает чётное число частей, что обусловлено построением параболы (парабола строится через три точки), значит, всего будет чётное число частей ($2n$). Таким образом, часть отрезка имеет общую формулу $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

В данном методе большую роль играет интегральная формула нахождения площади:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Так как в ходе метода Симпсона идёт замена функции $f(x)$ на некоторую параболу $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$, то фактически $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$.

Тогда площадь $f(x)$ может быть приближённо вычислена как:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0) dx$$

Метод Симпсона сводится к формуле:

$$\int_a^b (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0) dx = \frac{b-a}{6} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_i + y_{2n}) \quad (10)$$

Где y_0 – значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = a$;

y_{2n} – значение функции $f(x)$ в точке $x_n = b$;

y_i – значение функции $f(x)$ в середине отрезка $[a, b]$, точке $x_i = \frac{(a+b)}{2}$.

На данной части разбиения находятся коэффициенты квадратичной параболы из следующей системы:

$$\begin{cases} a_2 \cdot x_{i-1}^2 + a_1 \cdot x_{i-1} + a_0 = f(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ a_2 \cdot x_i^2 + a_1 \cdot x_i + a_0 = f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right) \vee a_2 \cdot \left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right) + a_0 = f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right) = y_i \\ a_2 \cdot x_{i+1}^2 + a_1 \cdot x_{i+1} + a_0 = f(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}$$

Подставив значения функции в уравнение (10) для полного отрезка, получим:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{6} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_i + y_{2n}) &= \frac{b-a}{6} \cdot [a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0 + a_2 \cdot (a+b)^2 + 2 \cdot a_1 \cdot (a+b) + 4 \cdot a_0 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0] = \\ &= \frac{b-a}{6} \cdot [2 \cdot a_2 \cdot (a^2 + b^2 + ab) + 3 \cdot a_1 \cdot (a+b) + 6 \cdot a_0] \end{aligned}$$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Разобьём интеграл $\int_a^b f(x) dx$ на сумму интегралов:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx$$

Таким образом, получаем:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot [(y_0 + y_{2n}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})];$$

Это формула носит название формула Симпсона.

Геометрический смысл формулы Симпсона можно сформулировать так: площадь криволинейной фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приблизительно равен сумме площадей фигур, которые лежат ниже парабол.

Следовательно, отрезок $[a, b]$ разбивается на n чётных частей $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_n = b$ с шагом $h = \frac{(b-a)}{2}$. В каждом x_i вычисляется значение функции $f(x_i)$ и находится значение площади по формуле Симпсона.

Вывод: Из всех рассмотренных методов наиболее простым является метод прямоугольников, так как идет разбиение сложной фигуры на простые прямоугольники. А площади прямоугольников учат искать ещё в начальной школе. Наиболее точным является метод Симпсона, так как парабола, используемая в этом методе, намного ближе прилегает к криволинейной фигуре, чем прямая.

Список литературы

1. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. - 430 с.
2. Волков Е.А. Численные методы. М., Наука, 1988.
3. Мацокин А.М., Сорокин С.Б. Численные методы: Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006: Ч.1: Численный анализ. 132 с.



ЯЗЫК “R” . ОСОБЕННОСТИ КАК ИНСТРУМЕНТА ОБУЧЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Курбаковских Е.А.

научный руководитель д-р техн. наук Кытманов А.А.

Сибирский Федеральный Университет

1. Краткое описание языка R.

R — язык программирования для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта GNU. R широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ.

R доступен под лицензией GNU GPL. Распространяется в виде исходных кодов, а также откомпилированных приложений под ряд операционных систем: FreeBSD, Solaris и другие дистрибутивы Unix и Linux, MicrosoftWindows, Mac OS X.

В 2010 году R вошёл в список победителей конкурса журнала InfoWorld в номинации на лучшее открытое программное обеспечение для разработки приложений.

R поддерживает широкий спектр статистических и численных методов и обладает хорошей расширяемостью с помощью пакетов. Пакеты представляют собой библиотеки для работы специфических функций или специальных областей применения. В базовую поставку R включен основной набор пакетов.

Ещё одним преимуществом R являются графические возможности, заключающиеся в возможности создания качественной графики, которая может включать математические символы.

2. Ключевые особенности, важные при рассмотрении данной темы :

- R является Свободным программным обеспечением.
- R — это очень общий пакет статистического анализа.
- R широко используется в социальных науках, статистике, экономике, страховом деле, социологии, финансах, физике высоких энергий и так далее.
- R доступен для всех операционных систем, включая Linux, Mac OS, Windows.
- R включает самые последние методики.
- R — объектно ориентированный. Теоретически, всё что угодно может быть сохранено как объект R.
- R — матричный язык.
- R включает длинный список функций и пакетов, написанных пользователями.
- R использует более систематичный синтаксис, нежели Stata или SAS.
- R может быть установлен на USB-флеш диск.

Являясь, по сути, гибким средством разработки программ, направленных на решение математических задач и задач обработки данных, предоставляет функционал и удобство, а главное возможности, которых нет в наиболее часто используемом программном обеспечении, таком как: “MathLab”, “SPSS”, “Statistics”, и др. Соответственно, язык R может быть очень эффективным инструментом в обучении таких дисциплин как вычислительная математика, дополнительные главы математической статистики, и смежных предметов. Ориентируясь на который обучаемым могут быть поставлены более узконаправленные, специфичные условия



задач, ровно, как и градация по сложности решения задачи, как с точки зрения математики, так и программирования. Что немаловажно, становится возможным, и вполне несложным разбиением задачи для выполнения ее несколькими обучающимися в группе, таким образом получать командную работу.

При использовании этого языка есть возможность решать задачи с “большими данными”, на что было много ограничений у среды “Matlab” и др. А это является ключевым моментом в вычислительной математике.

Происходит переход большинства европейских, а на данный момент начинается и российских предприятий, сталкивающихся с статистической обработкой данных, на продукты, основанные на языке R. Что обуславливает необходимость дать основы языка R обучающимся по направлениям связанным с вычислительной математикой, математической статистикой.





УДК 510.649

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИК, ЗАДАВАЕМЫХ МАЛЫМИ ФРЕЙМАМИ

Лукиянов А.В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Голованов М.И.

Сибирский федеральный университет

В статье Чагрова А.В. «Алгоритмическая проблема аксиоматизации табличной нормальной модальной логики» доказан факт того, что задача конечной аксиоматизации табличных логик является алгоритмически неразрешимой. В то же время, им же доказано и утверждение о конечной аксиоматизации каждой табличной логики. Но, при этом, интересен факт возможности изучения логик, без их аксиоматизации, путем не синтаксического, а семантического построения их решеток.

Целью данной работы является изучение интуиционистских логик малой ширины и глубины, а точнее ширины не более 2 и глубины не более 4.

Приведем некоторые определения.

Фреймом Крипке в интуиционистской логике или просто *фреймом* называется частично упорядоченное множество $F := \langle F, \leq \rangle$ (или, кратко, ч.у.м.). То есть отношение \leq является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.

Замкнутый класс фреймов – класс фреймов, включающий в себя вместе с каждым фреймом и все его p -морфные образы и открытые подфреймы.

Важное свойство интуиционистской модели Крипке заключается в следующем: если формула α истинна на элементе a , заданной интуиционистской модели, и $a \leq b$, то α истинна и на b .

Операция импликации в интуиционистской логике: $\varphi \rightarrow \psi$ выполняется в точке x , если во всех $y \geq x$ когда выполняется ψ , выполняется и φ .

Построение фреймов глубины не более 4 и ширины не более 2.

На рисунке 1 показаны все возможные фреймы глубины не превосходящей 4 и ширины не превосходящей 2:

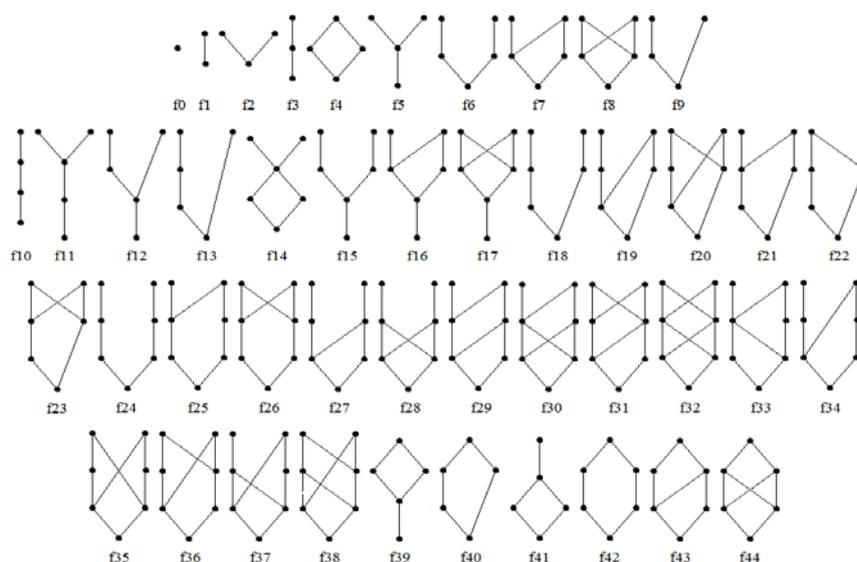


Рисунок – 1. Фреймы глубины не более 4 ширины не более 2



Далее были построены также 45 замкнутых классов, порожденных фреймами, изображенными на рисунке 1. Перейдем к построению решетки замкнутых классов фреймов. Решетка, включающая в себя все замкнутые классы фреймов f_0 - f_{44} получается слишком большого размера, поэтому в качестве примера построим решетку замкнутых классов фреймов для фрейма f_{14} . Следует отметить, что в процессе построения решетки использовались не только замкнутые классы фрейма f_{14} и его p -морфных образов, но и всевозможные их объединения. Самым маленьким классом здесь стал класс F_0 , состоящий из одного элемента, а самым большим стал класс F_{14} , который состоит из 10 элементов. В свою очередь, более сложный класс фреймов адекватен более узкой логике, наиболее же простой класс – фрейм f_0 – представляет собой классическую пропозициональную – наиболее широкую логику. Поэтому не возникло трудностей с построением решетки логик – она антиизоморфна построенной решетке классов фреймов:

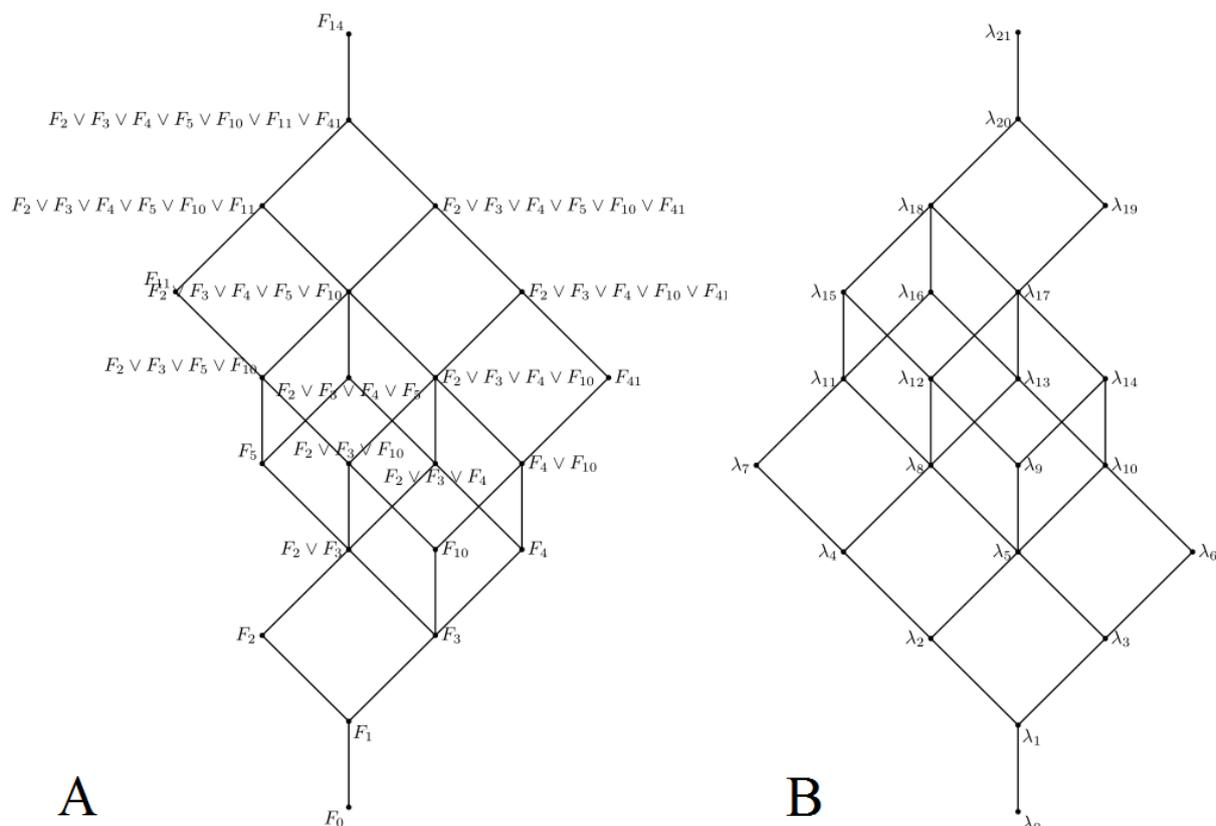


Рисунок – 2. А – Решетка замкнутых классов фреймов;
В – Решетка соответствующих логик.

Система аксиом любой интуиционистской логики включает в себя аксиомы Гейтинга, а также правила вывода – *modus ponens* и правило подстановки. Для построения систем аксиом, также применяются следующие формулы:

$$bd_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \rightarrow bd_n); \quad bd_1 = p_1 \vee \neg p_1 \quad (1)$$

$$bw_n = \bigvee_{i=0}^n (p_i \rightarrow \bigvee_{j \neq i} p_j), \quad n \geq 1 \quad (2) \qquad btw_n = \bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} \neg(\neg p_i \wedge \neg p_j) \rightarrow$$

$$\bigvee_{i=0}^n (\neg p_i \rightarrow \bigvee_{j \neq i} \neg p_j) \quad (3)$$

Формула (1) выполняется на фреймах, глубина которых не превышает n элементов. Формула (2) выполняется на фреймах, максимальная ширина которых не превышает n элементов. Наконец, формула (3) выполняется на фреймах, у которых в первом слое не более n элементов.

При помощи данных формул, можно задать системы аксиом для фреймов $f_0, f_1, f_2, f_3, f_{10}$. Для всех остальных фреймов необходимо строить новые формулы. Так для

фреймов глубины не более 3 и ширины не более 2 эти формулы уже известны. К примеру для фрейма f5 построены две новые формулы:

$$\neg\neg(p \wedge q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))(4)$$

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow (r \vee \neg r))(5)$$

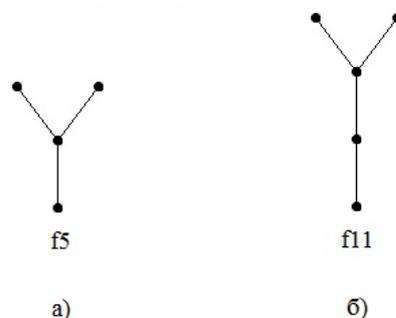


Рисунок 3. а)–Фрейм f5
б) – фрейм f11

Таким образом, система аксиом для замкнутого класса F5 состоит из аксиом Гейтинга, формулы, ограничивающей ширину фрейма двумя точками, формулы, ограничивающей глубину фрейма тремя точками и формул 4 и 5. Заметим, что увеличив ограничение глубины до четырех, мы получаем систему аксиом для замкнутого класса F11.

Также известна система аксиом для фрейма f6. Аналогично в нее вошли аксиомы Гейтинга, формула, ограничивающая ширину фрейма двумя точками, формулы, ограничивающая глубину фрейма тремя точками, а так же следующая формула:

$$(bd_3 \rightarrow bd_2) \vee (bd_2 \rightarrow bw_1), (6)$$

где никакие из формул bd_3 , bd_2 , bw_1 не содержат одинаковых переменных.

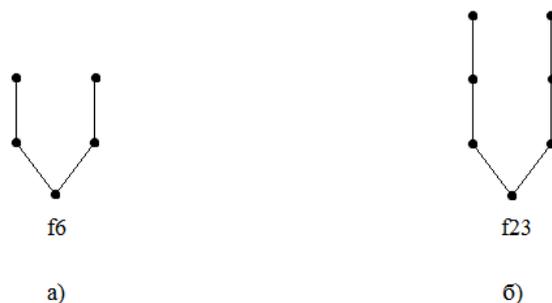


Рисунок 4. а)–Фрейм f6
б) – фрейм f23

Точно также, как и в предыдущем случае, увеличив ограничение глубины до четырех, мы получаем систему аксиом для замкнутого класса F23, т.е. добавляем в систему аксиом фрейма f23 следующую аксиому:

$$(bd_4 \rightarrow bd_3) \vee (bd_3 \rightarrow bw_1), (7)$$

где bd_3 , bd_3 , bw_1 не содержат одинаковых переменных.

Теперь построим систему аксиом для фрейма f12. Можно сразу сказать, что в нее войдут аксиомы Гейтинга, формула, ограничивающая ширину фрейма двумя точками, формулы, ограничивающая глубину фрейма четырьмя точками. Помимо этого, в систему аксиом включим формулу:

$$\neg\neg(p \wedge q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))(8)$$

Данная формула будет опровергаться на фреймах, которые можно p -морфно отобразить на фрейм f_4 , т.е. на фреймах $f_4, f_6-f_8, f_{14}-f_{44}$.

Данной формулы не достаточно, чтобы с точностью до p -морфизма описать фрейм f_{12} , поэтому построим еще одну формулу:

$$(bd_4 \rightarrow bd_3) \vee (bd_3 \rightarrow bd_2) \vee (bd_2 \rightarrow bw_1), (9)$$

Формула (9) опровергается на фреймах, у которых имеется открытый подфрейм изоморфный f_2 , в частности на фреймах f_2, f_5, f_1 .

Этой формулы также не достаточно, поэтому строим следующую формулу:

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow bd_2) \wedge (q \rightarrow bd_1) \vee (p \rightarrow bd_1) \wedge (q \rightarrow bd_2) (10)$$

Формула 10 опровергается на фрейме f_{13} . Таким образом, в систему аксиом фрейма f_{12} , помимо аксиом Гейтинга, формулы, ограничивающей ширину фрейма, формулы, ограничивающей глубину фрейма, входят построенные нами формулы (8), (9), (10).

Итак, нами было реализовано построение решетки рассматриваемых классов фреймов и решетки соответствующих логик, описаны и построены полные системы аксиом для некоторых логик ширины не более 2 и глубины не более 4.

Список литературы

1. Чагров, А.В. Алгоритмическая проблема аксиоматизации табличной нормальной модальной логики/ А.В. Чагров // OnlineJournal "LogicalStudies". - 2002. - № 8. - С.13.
2. Chagrov, A.V. Modal logic/ A.V. Chagrov, M.V. Zakharyashev. - Clarendon press: Oxford, 1997. - 605 с.
3. Rybakov, V.V. Admissibility of logical inference rules /V. V. Rybakov.- Amsterdam; New York: Elsevier ,1997. - 624 с.



ОБЛАСТЬ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЬЮРИНГА ДЛЯ СИСТЕМЫ ШНАКЕНБЕРГА И ЕЁ КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

Лысенко С. А.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Ревина С.В.

Южный федеральный университет

Как было установлено в работе Тьюринга в 1952 году, при определённых условиях химические вещества могут в процессе реакции и диффузии создавать устойчивые гетерогенные пространственные структуры, содержащие различные концентрации самого химического вещества и морфогена. Процесс описывается в терминах морфогенов, участвующих в реакции-диффузии, при этом требуется получить необходимые условия реакционной кинетики и диффузионные коэффициенты, а также ожидаемый тип пространственной структуры.

Существует множество различных систем реакции-диффузии, и одной из простейших систем этого класса является система Шнакенберга, впервые рассмотренная в 1979 году:

$$\begin{aligned}u_t &= \gamma f(u, v) + u_{xx} = \gamma(a - u + u^2v) + u_{xx} \\v_t &= \gamma g(u, v) + dv_{xx} = \gamma(b - u^2v) + dv_{xx}\end{aligned}$$

Это система двух уравнений в частных производных, где неизвестные $u=u(x, t)$ и $v=v(x, t)$ представляют собой концентрации двух биохимических веществ в точке x в момент времени $t>0$, которые являются активатором и субстратом. Параметр d – положительный коэффициент диффузии, Γ – положительная постоянная, характеризующая относительную силу влияния слагаемых реакции, a и b – положительные параметры реакции в данной биохимической системе.

Исследованию этой системы посвящено значительное количество литературы. В первую очередь следует упомянуть книгу [1] во второй главе которой рассказывается о роли пространственных структур (паттернов) в биологии и о Тьюринговых механизмах реакции-диффузии для системы Шнакенберга, подробно рассматриваются общие условия диффузионной неустойчивости паттернов, а также анализ их возникновения и эволюции. Также представляет интерес статья [2], в которой представлены аналитические методы изучения существования и устойчивости стационарных кратных пятен для систем реакции-диффузии и рассматриваются два класса систем реакции-диффузии: системы вида активатор-ингибитор (система Жирера-Мейнхарда) и системы вида активатор-субстрат (система Грэя-Скотта и модель Шнакенберга). Результаты, полученные численным моделированием, интерпретируются в статье в биологическом, химическом и экологическом контекстах.

В представляемом докладе демонстрируются результаты исследования области неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга с использованием собственной компьютерной программы SchnakenbergSystemResearch. В ней используется тот же подход, что и в ранее созданном автором программном комплексе PhaseVisualizer 1.0, описание которого представлено в [3], [4] и [5]. В основе графического интерфейса программы SchnakenbergSystemResearch лежат приёмы визуализации решений дифференциальных уравнений и систем, использовавшиеся в программном комплексе PhaseVisualizer 1.0, а именно, возможность изменять параметры с малым шагом при помощи компонентов ScrollBar и наблюдать при этом автоматическое перестроение графиков и фазовых портретов. Программа PhaseVisualizer 1.0 представляет собой



графическое приложение, состоящее из девяти модулей, каждый из которых наглядно иллюстрирует свойства решений определённого класса задач, в числе которых уравнения различных нелинейных колебаний, солитонные уравнения, модели реакции-диффузии (уравнение Фишера и система Фитцхью-Нагумо).

В основе математической модели, описываемой системой Шнакенберга, лежит концепция неустойчивости Тьюринга: для неустойчивости стационарного состояния необходимы устойчивость по отношению к пространственно-однородным возмущениям и неустойчивость по отношению к некоторым пространственно-неоднородным возмущениям.

Рассматриваемая область неустойчивости Тьюринга задаётся следующими необходимыми условиями: это четыре неравенства, которые должны выполняться одновременно:

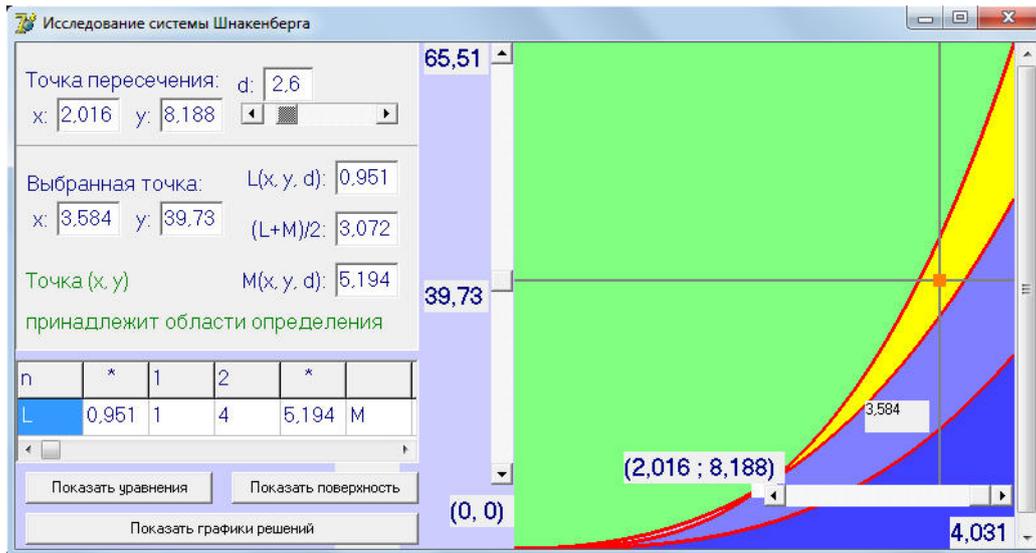
$$\begin{aligned} f_u + g_v < 0 &\Rightarrow 0 < b - a < (a + b)^3 \\ f_u g_v - f_v g_u > 0 &\Rightarrow (a + b)^2 > 0 \\ df_u + g_v > 0 &\Rightarrow d(b - a) > (a + b)^3 \\ (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0 &\Rightarrow (d(b - a) - (a + b)^3)^2 > 4d(a + b)^4 \end{aligned}$$

При введении новых переменных $x=a+b$ и $y=b-a$ и с учётом того, что второе неравенство выполняется всегда, а выполнение третьего неравенства следует из выполнения четвёртого (в рассматриваемой математической модели $a>0$, $b>0$, $d>1$), мы получаем двойное неравенство, задающее исследуемую область неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга:

$$\frac{1}{d}x^3 + \frac{2}{\sqrt{d}}x^2 < y < x^3$$

Программа SchnakenbergSystemResearch обладает удобным интерфейсом для пошагового изменения значений x , y , d , и при этом, благодаря автоматическому масштабированию графического окна при изменении значения d , всегда можно легко выбрать значения x и y , принадлежащие области неустойчивости Тьюринга (в графическом окне программы она обозначена жёлтым цветом). Масштаб автоматически подбирается программой так, что область неустойчивости Тьюринга не оказывается за пределами экрана даже при достаточно больших значениях соответствующих x и y .





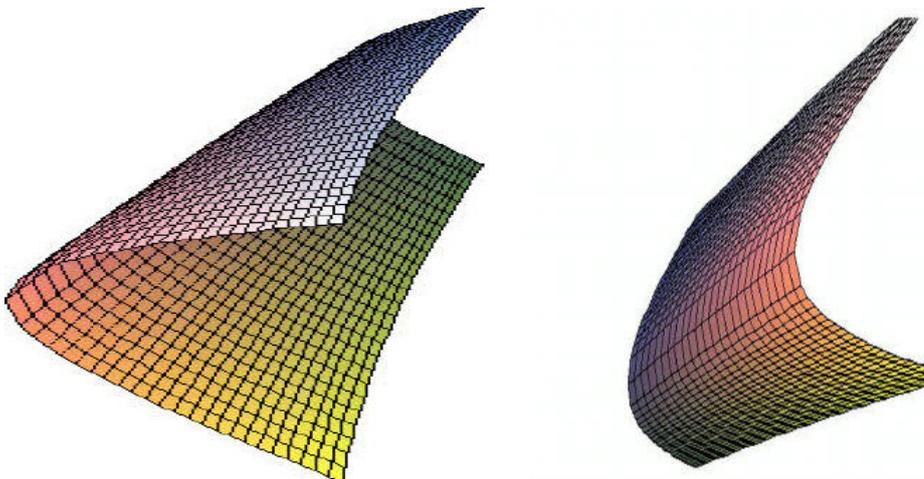
Программа позволяет проводить эксперименты по отысканию неустойчивых мод в диапазоне, задаваемом следующим двойным неравенством:

$$\gamma L(a, b, d) = k_1^2 < k^2 = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 < k_2^2 = \gamma M(a, b, d)$$

Функции $L(a, b, d)$ и $M(a, b, d)$ описывают симметричные части пространственной поверхности, задаваемые следующими формулами:

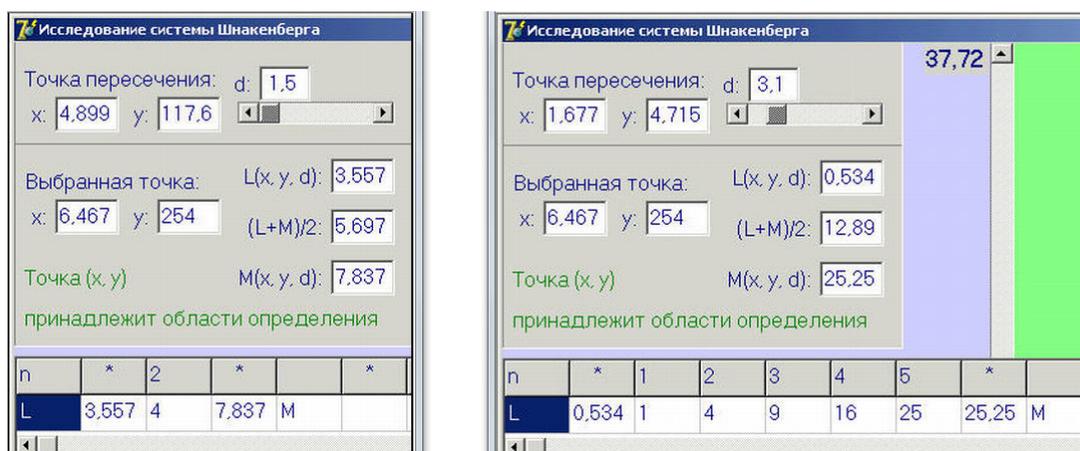
$$L(a, b, d) = \frac{[dy-x^3]-\sqrt{[dy-x^3]^2-4dx^4}}{2dx}; \quad M(a, b, d) = \frac{[dy-x^3]+\sqrt{[dy-x^3]^2-4dx^4}}{2dx}$$

С использованием пакета Maple построены следующие изображения поверхности, задаваемой функциями $L(x, y, d)$ и $M(x, y, d)$:



Интерфейс программы даёт возможность отслеживать возникновение новых неустойчивых мод при пошаговом изменении коэффициента d , тогда как значения x и y фиксируются и сохраняются неизменными. Результаты представляются в программе в виде таблицы. Так, при фиксированных значениях $x=6.5$ и $y=254$, принадлежащих области неустойчивости Тьюринга, и при d от 1.5 до 10 включительно может быть от одной до пяти неустойчивых мод, и программа позволяет экспериментально

определить, при каких значениях d (с точностью до шага по d) возникают новые неустойчивые моды:



На рисунке слева видно, что при $d=1.5$ имеется только одна неустойчивая мода – $k^2=4$, а на рисунке справа, при $d=3.1$ их уже пять – 1, 4, 9, 16, 25.

Компьютерный эксперимент подтверждает, что необходимые условия неустойчивости Тьюринга не всегда являются достаточными и, кроме того, программа позволяет находить критические значения параметра d , при которых у системы возникают новые неустойчивые моды, для различных значений x и y , принадлежащих области неустойчивости Тьюринга.

Список литературы

[1] Murray J. D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993. - С. 71-98.

[2] Stationary multiple spots for reaction-diffusion systems / Wei J., Winter M. // Springer-Verlag, 2007. - С. 53-89.

[3] Лысенко С. А. Приложение для визуализации решений дифференциальных уравнений и систем // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы конференции; Южный федеральный университет. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. С. 270-272.

[4] Лысенко С. А. Приложение для визуализации решений дифференциальных уравнений и систем PhaseVisualizer 1.0 // Хроники объединённого фонда электронных ресурсов <<Наука и образование>>. - 2013. - №7 (50). - С. 22-23 [Электронный ресурс]. - URL: <http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2013/7.doc> (дата обращения: 2.06.2014).

[5] Лысенко С. А. Компьютерная программа для визуализации решений дифференциальных уравнений и систем PhaseVisualizer 1.0 // Учебно-методические разработки ЮФУ [Электронный ресурс]. - URL: <http://open-edu.sfedu.ru/pub/2425> (дата обращения: 2.06.2014).





РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРИКВАДРАТНЫХ ЭРМИТОВЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Магденко Р. П.

*Сибирский федеральный университет,
Институт вычислительного моделирования СО РАН*

Введение

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой было показано, что эрмитовы конечные элементы имеют определенное преимущество над лагранжевыми. В ней также были предложены трехмерные трикватратные элементы, для которых ниже будет представлена и обоснована оценка сходимости и приведены результаты численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном кубе.

Трикватратные эрмитовы элементы на кубе

Определим «эталонный» трикватратный эрмитов элемент как тройку [3]

$$(e, Q_e, \Sigma_e), (1)$$

где $e = [0, 1]^3$ – единичный куб в пространстве \square^3 с вершинами $a^l = (i, j, k)$, $l = 1, \dots, 8$, $i, j, k \in \{0, 1\}$, которые являются узлами элемента; Q_e – пространство полиномов вида

$$Q_e = Q_2^{(3)} \setminus \text{span} \{x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2, x_1^2 x_2^2 x_3, x_1^2 x_2 x_3^2, x_1 x_2^2 x_3^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2\}, (2)$$

(здесь $Q_2^{(3)}$ – пространство полиномов степени не выше 2 по каждой переменной); Σ_e – множество степеней свободы вида

$$\Sigma_e = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{s,i,j,k} (s = 0, 1, 2, 3) : \psi_{0,i,j,k} (p) = p(i, j, k) \forall i, j, k = 0, 1; \\ \psi_{1,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_1 (i, j, k), \psi_{2,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_2 (i, j, k), \\ \psi_{3,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_3 (i, j, k), \\ \forall (i, j, k) = (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1); \forall p \in Q_e \end{array} \right\}. (3)$$

Базисом Лагранжа для элемента (1)-(3) называется набор функций, удовлетворяющих условию [2, 3]

$$\psi_{s_1, i_1, j_1, k_1} (\varphi_{s, i, j, k}) = \delta_{s, s_1} \delta_{i, i_1} \delta_{j, j_1} \delta_{k, k_1}, \forall s, s_1 = 0, 1, 2, 3; \forall i, i_1, j, j_1, k, k_1 = 0, 1,$$

где δ_{i, i_1} – символ Кронекера.

В работе [1] они выписаны в явном виде:



$$\begin{aligned}
\varphi_{0,0,0,0} &= (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1+x_2+x_3), & \varphi_{1,0,0,0} &= x_1(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3), \\
\varphi_{2,0,0,0} &= (1-x_1)x_2(1-x_2)(1-x_3), & \varphi_{3,0,0,0} &= (1-x_1)(1-x_2)x_3(1-x_3), \\
\varphi_{0,0,1,0} &= (1-x_1)x_2(x_2-x_1-x_3)(1-x_3), & \varphi_{0,1,0,0} &= x_1(1-x_2)(1-x_3)(x_1-x_2-x_3), \\
\varphi_{0,1,1,0} &= x_1x_2(1-x_3)(3-x_1-x_2+x_3), & \varphi_{1,1,1,0} &= x_1(x_1-1)x_2(1-x_3), \\
\varphi_{2,1,1,0} &= x_1x_2(x_2-1)(1-x_3), & \varphi_{3,1,1,0} &= x_1x_2x_3(1-x_3), \\
\varphi_{0,0,0,1} &= (1-x_1)(1-x_2)x_3(x_3-x_1-x_2), & \varphi_{0,1,1,1} &= x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3-2), \\
\varphi_{0,0,1,1} &= (1-x_1)x_2x_3(3+x_1-x_2-x_3), & \varphi_{1,0,1,1} &= (1-x_1)x_1x_2x_3, \\
\varphi_{2,0,1,1} &= (1-x_1)x_2(x_2-1)x_3, & \varphi_{3,0,1,1} &= (1-x_1)x_2x_3(x_3-1), \\
\varphi_{0,1,0,1} &= x_1(1-x_2)x_3(3-x_1+x_2-x_3), & \varphi_{1,1,0,1} &= x_1(x_1-1)(1-x_2)x_3, \\
\varphi_{2,1,0,1} &= x_1x_2(1-x_2)x_3, & \varphi_{3,1,0,1} &= x_1(1-x_2)x_3(x_3-1).
\end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначения для норм, которые мы будем использовать при оценке сходимости. Пусть $\Omega \subset \square^n$. Обозначим через $L_2(\Omega)$ пространство функций, определенных и измеримых на Ω со скалярным произведением (5) и конечной нормой (6)

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega, \quad u, v \in \Omega \quad (5)$$

$$\|u\|_{0,\Omega} = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in \Omega. \quad (6)$$

Для частных производных порядка k введем полунорму

$$|u|_{k,\Omega} = \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=k} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $H^k(\Omega)$ обозначим пространство функций, определенных и измеримых на Ω вместе с производными до порядка k включительно, с конечной нормой [4]

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left(\|u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{1,\Omega}^2 + \dots + \|u\|_{k,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $u \in H^3(e)$. По теореме вложения Соболева $H^3(e)$ непрерывно вложено в $C^1(e)$ [4]. Поэтому для функции u мы можем определить её интерполянт $u_I \in Q_e$. Введем обозначение $I = \{(0,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ для множества узлов, в которых степени свободы содержат производные. Тогда

$$u_I(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,k=0}^1 \psi_{0,i,j,k}(u) \varphi_{0,i,j,k}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^3 \sum_{(i,j,k) \in I} \psi_{s,i,j,k}(u) \varphi_{s,i,j,k}(x_1, x_2, x_3).$$

Теорема 1. Пусть $u \in H^3(e)$. Тогда для любого $m \leq 3$

$$|u - u_I|_{m,e} \leq c_1 |u|_{3,e}, \quad (7)$$

где константа c_1 не зависит от функции u .

Доказательство. Поскольку пространство $H^3(e)$ непрерывно вложено в $C^1(e)$, а Q_e содержит пространство полиномов степени не выше 2, определенных на e , то выполнены все условия теоремы 1 [2, глава 3, параграф 10], откуда следует оценка (7). \square

Численное решение уравнения Пуассона

В области $\Omega = (0,1)^3$ с границей Γ рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta u = xyz \sin(x) - 2yz \cos(x) \quad \text{на } \Omega \quad (8)$$



$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0 \\ 0 & \text{при } y=0 \\ 0 & \text{при } z=0 \\ yz \sin(x) & \text{при } x=1 \\ xz \sin(x) & \text{при } y=1 \\ xy \sin(x) & \text{при } z=1 \end{cases} \quad \text{на } \Gamma. \quad (9)$$

Ей соответствует точное решение

$$u_0 = xyz \sin(x).$$

Построим на Ω равномерную триангуляцию, поделив Ω на N^3 одинаковых кубов меньшего размера. Для этого проведем плоскости

$$x_{k,i} = ih, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{где } h = \frac{1}{N}.$$

Каждая элементарная ячейка $[x_{1,i}, x_{1,i+1}] \times [x_{2,j}, x_{2,j+1}] \times [x_{3,k}, x_{3,k+1}]$ является образом «эталонного» элемента, полученного в результате аффинного отображения

$$x'_1 = x_{1,i} + hx_1, \quad x'_2 = x_{2,j} + hx_2, \quad x'_3 = x_{3,i} + hx_3, \quad (10)$$

либо

$$x'_1 = x_{1,i} + h(1 - x_1), \quad x'_2 = x_{2,j} + hx_2, \quad x'_3 = x_{3,i} + hx_3. \quad (11)$$

Для оценки порядка точности приближенного решения, сравним значения погрешности при различных значениях шага h . Построим систему алгебраических уравнений метода конечных элементов, используя трикватерные эрмитовы элементы для $N = 4, 8, 16, 32$. Зная точное решение, можно вычислить значение погрешности $u - u^h$, где $u = u_0$, u^h – приближенное решение. Мы будем использовать дискретные аналоги норм L_2 и H^1 .

Теорема 2. Пусть $u \in H^3(\Omega)$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq c_2 h^2 \|u\|_{3,\Omega} \quad (12)$$

и

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq c_3 h^3 \|u\|_{3,\Omega} \quad (13)$$

с константами c_2 и c_3 , независимыми от u и h .

Доказательство. Оценка (12) получается стандартным способом из оценки (7) с учетом вида отображения (10),(11) [2,3]. Оценка (13) следует из (12) с использованием приема Нитше[2,3]. □

В таблице 1 приведены значения нормы погрешности $\delta_h = \|u - u^h\|_{0,h}$ и $\sigma_h = \|u - u^h\|_{1,h}$ для разных значений шага h . Анализ полученных результатов показывает, что при уменьшении h величина σ_h стремится ко второму порядку точности, как и соответствующая теоретическая оценка (12). Что касается величины δ_h , то здесь её порядок выше, чем в теоретической оценке (13). При малых значениях h он близок к 4. Это следует из того, что конечно-разностная схема имеет симметричный шаблон, которая не позволяет получить нечетный порядок аппроксимации, поскольку при разложении в ряд Тейлора, слагаемые нечетной степени сокращаются. В результате остаются только



слагаемые четвертого порядка. Именно они обеспечивают четвертый порядок сходимости для дискретного набора значений.

Результаты вычислений подтверждают выводы, изложенные выше.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00224.

Таблица 1. Точность приближенного решения для u_0

h	$\delta_h = \ u - u^h\ _{0,h}$	$\sigma_h = \ u - u^h\ _{1,h}$	δ_{2h} / δ_h	σ_{2h} / σ_h	$\log_2(\delta_{2h} / \delta_h)$	$\log_2(\sigma_{2h} / \sigma_h)$
0.25	$7.29 \cdot 10^{-6}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$				
0.125	$7.33 \cdot 10^{-7}$	$5.59 \cdot 10^{-4}$	9.94	2.43	3.31	1.28
0.0625	$5.98 \cdot 10^{-8}$	$1.74 \cdot 10^{-4}$	12.26	3.2	3.62	1.68
0.03125	$4.27 \cdot 10^{-9}$	$4.86 \cdot 10^{-5}$	14.01	3.6	3.81	1.85

Список литературы

1. V. Shaidurov, S. Shut, L. Gileva, Some properties of Hermite finite elements on rectangles, AIP Conference Proceedings 1629, 32(2014), pp. 32-43.
2. Р.З. Даутов, М.М. Карчевский, Введение в теорию метода конечных элементов, Казань, Казанский университет, 2011, 240 стр.
3. Ф. Сьярле, Метод конечных элементов для эллиптических задач, Москва, Мир, 1980, 512 стр.
4. R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 2003



ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСКАЖЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В СРЕДЕ SCILAB

Мосин В. С.

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Волков В. В.

Воронежский государственный университет

Нередко при регистрации изображений в различных технических системах могут возникать различные искажения. В таких случаях возникает потребность восстановления искаженных изображений математико-компьютерными методами. Данная проблема является весьма актуальной научно-технической проблемой (см., например, [1, 3]).

Ранее автором была рассмотрена задача реконструкции смазанных черно-белых изображений [2]. В данной работе рассматривается решение указанной задачи для построчно размытых изображений (как черно-белых, так и цветных) и решение задачи реконструкции реальных смазанных изображений.

Кратко рассмотрим математическую постановку задачи реконструкции построчно размытого изображения и подходы к её решению. Отметим, что в таком виде задача размытия изображений обычно не встречается в литературе (как правило, речь идёт либо о построчном смазывании, либо о размытии сразу по двум направлениям).

Изображение будем рассматривать в прямоугольной системе координат, где ось x направлена горизонтально (определяет строки пикселей изображения), а ось y – перпендикулярно ей (определяет столбцы пикселей изображения). Для удобства будем считать, что искажение происходит вдоль оси x . Данное допущение не влияет на уровень общности рассматриваемой задачи, т. к. любое направление искажения может быть приведено к горизонтальному путем поворота изображения на некоторый угол.

Сущность построчного размытия заключается в том, что некоторая точка (x, y) изображения (заданная интенсивностью цвета – числом от 0 до 255; если изображение цветное, рассматриваются три цветовых канала по отдельности) «усредняется» с соседними точками из набора $\tau \in [x - 3\sigma; x + 3\sigma]$ в соответствии с весовыми коэффициентами, получаемыми из функции размытия.

В качестве функции размытия воспользуемся формулой Гаусса:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -3\sigma \leq x \leq 3\sigma. \quad (1)$$

Тогда результирующая интенсивность цвета этой точки будет равна:

$$G(x) \int_{x-3\sigma}^{x+3\sigma} z(\tau, y) d\tau = b(x, y). \quad (2)$$

Соотношение (2) является основным в задаче восстановления построчно размытых изображений. В нем $b(x, y)$ – измеренное распределение интенсивности цвета пикселей размытого изображения, причем ось x направлена вдоль искажения, 3σ – радиус размытия, а $z(\tau, y)$ – распределение интенсивности цвета пикселей неискаженного изображения.

Соотношение (2) может быть представлено как совокупность одномерных интегральных уравнений:

$$G(x) \int_{x-3\sigma}^{x+3\sigma} z_y(\tau) d\tau = b_y(x). \quad (3)$$



Преобразуем уравнение (3) к интегральному уравнению Фредгольма I рода общего вида:

$$\int_c^d h(x, \tau) z_y(\tau) d\tau = b_y(x), \quad (4)$$

где

$$h(x, \tau) = \begin{cases} G(x), & x - 3\sigma \leq \tau \leq x + 3\sigma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь ядро интегрального уравнения h играет роль функции рассеяния точки (ФРТ) [3].

Рассмотрим прямую задачу – получение построчно размытого изображения из неискаженного.

В дискретном виде уравнение (4) может быть представлено так:

$$b_y = Az_y, \quad (5)$$

где b_y – вектор-строка интенсивностей цвета пикселей построчно размытого изображения в строке с номером y ; A – матрица, связанная с ФРТ; z_y – вектор-строка интенсивностей пикселей неискаженного изображения в строке с номером y .

Пусть исходное изображение размером $m \times n$ пикселей задано матрицей интенсивностей $z_{m \times n}$.

При моделировании искажения изображения возникает необходимость обработать левый и правый края изображения шириной 3σ пикселей. Данная проблема может быть решена путем применения приема усечения искаженного изображения. В этом случае будет сформировано изображение размером $n - 6\sigma$, а соотношение (5) для данного метода запишется в виде конечной суммы по пикселям:

$$b_i(j) = G(x) \sum_{k=j-3\sigma}^{j+3\sigma} z_i(k), \quad j = 3\sigma + 1, 3\sigma + 2, \dots, n - 3\sigma, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где i – номер строки, j (и k) – номер столбца.

Для решения обратной задачи (восстановления исходного изображения по размытому) в рамках настоящей работы использовался метод конечных сумм (квадратур) с регуляризацией Тихонова. Рассмотрим основные положения метода.

Интегральное уравнение (4) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом квадратур: интеграл заменяется конечной суммой по пикселям, имеющим натуральные значения координат [3]:

$$Az_i = \sum_{k=1}^m h_{jk} z_{i,k}, \quad j = 3\sigma + 1, 3\sigma + 2, \dots, n - 3\sigma, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$h_{jk} = \begin{cases} G(x), & j - 3\sigma \leq k \leq j + 3\sigma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, при каждом фиксированном номере строки i получаем СЛАУ относительно искомого вектора z . Для реконструкции всего изображения необходимо для всех i решить СЛАУ (7), т. е. выполнить построчную реконструкцию изображения.

Запишем рассматриваемую СЛАУ (7) в матричном виде:

$$Az = b. \quad (8)$$

Заметим, что в зависимости от используемой схемы дискретизации и моделирования искажения изображения указанная СЛАУ может быть как определённой, так и



неопределённой или переопределённой. Кроме того, решения уравнения (7) и, соответственно, СЛАУ (8) сильно неустойчивы [3].

Чтобы преодолеть упомянутые проблемы, при решении СЛАУ вида (8) воспользуемся классическим методом регуляризации Тихонова (см., например, [4]).

При решении СЛАУ вида (8) данным методом используется прием сведения данной системы к следующей системе уравнений:

$$(A^T A + \alpha I) z_\alpha = A^T b, \quad (9)$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$, α – параметр регуляризации.

Известно (см., например, [4]), что система (9) при заданном параметре регуляризации $\alpha > 0$ имеет устойчивое решение z_α .

Для проведения вычислительных экспериментов использовался кроссплатформенный математический пакет Scilab с подключаемыми модулями Scilab Image and Video Processing и Image Processing Design, в котором были реализованы собственные скрипт-файлы, позволяющие решать обозначенные ранее задачи.

Оптимальное значение параметра регуляризации α при решении задачи реконструкции построчно размытых изображений определялось путем оценки зависимости относительной погрешности восстановления (ε) от значения параметра регуляризации и выбором такого значения α , при котором относительная погрешность минимальна. Относительная погрешность рассчитывалась по формуле $\varepsilon = \|R\text{Img} - O\text{Img}\| / \|O\text{Img}\|$, где числитель – евклидова норма разности матриц интенсивностей восстановленного и оригинального (без искажений) изображения, а знаменатель – евклидова норма матрицы интенсивностей оригинального изображения. Для цветных изображений данный параметр вычислялся как среднее арифметическое относительных погрешностей восстановления каждого цветового канала в отдельности.

При решении обратной задачи реконструкции реального смазанного изображения параметр регуляризации α подбирался посредством оценки результата восстановления.

В качестве тестовых изображений были выбраны: изображение «Clock» и полноцветный вариант изображения «Lenna» [5]. Для экспериментов с реальными изображениями была использована цветная фотография заголовка газетной статьи.

На рис. 1 представлены результаты первого эксперимента: а) – исходное изображение, б) – построчно размытое изображение, в) – восстановленное изображение при значении параметра регуляризации $\alpha = 3,8 \cdot 10^{-5}$.

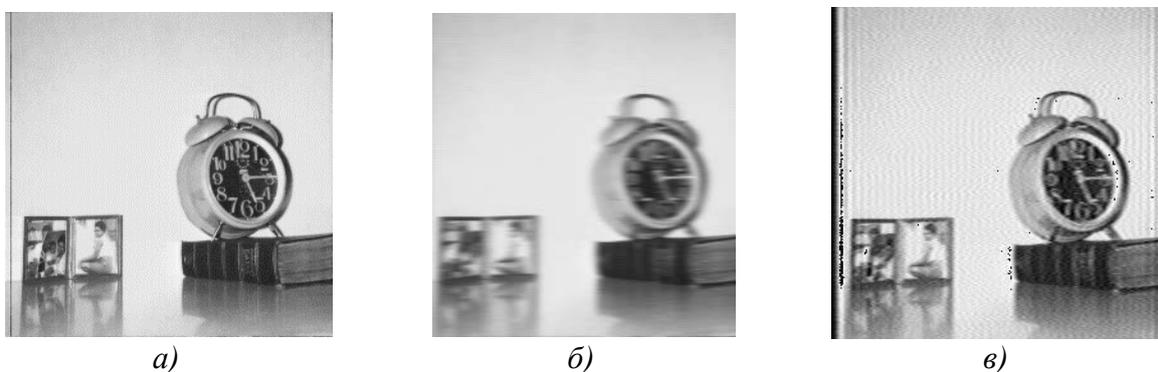


Рис. 1. Результаты эксперимента с модельным изображением «Clock» ($\sigma = 3$).

Можно отметить, что восстановленное изображение позволяет четко различить цифры, которые плохо различимы на искаженном изображении.

На рис. 2 представлены результаты второго эксперимента: а) – исходное изображение, б) – построчно размытое изображение, в) – восстановленное изображение при значении параметра регуляризации $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}$.



Рис. 2. Результаты эксперимента с модельным изображением «Леппа» ($\sigma = 3$).

Несмотря на наличие небольших цветных артефактов, в целом изображение стало заметно «чётче».

В последнем примере (рис. 3) показан результат восстановления одного из часто встречающихся искажений – линейного «смаза», математическое описание которого было дано автором в работе [2].

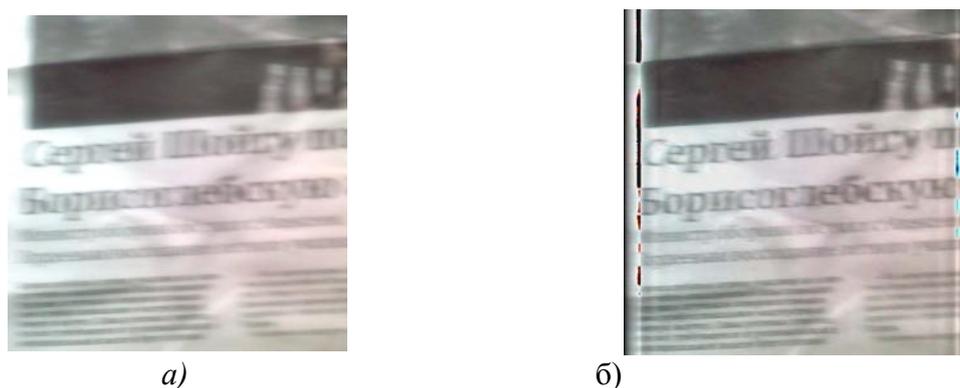


Рис. 3. Результаты эксперимента с реальным изображением: а) – исходное искаженное изображение, б) – восстановленное изображение при значении параметра регуляризации $\alpha = 0,09$ и длине смаза $\Delta = 56$.

Несмотря на наличие значительных краевых артефактов, на восстановленном изображении мы можем наблюдать вполне читаемый текст крупного заголовка статьи – буквы в словах не перекрывают друг друга и не сливаются друг с другом.

Список литературы

1. Дайнеко М. В. Реконструкция смазанных и зашумленных изображений методами регуляризации и усечения в технических системах обработки информации: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. СПб., 2011. — 23 с.

2. Мосин В. С., Волков В. В. Использование математического пакета Scilab для реконструкции смазанных изображений // Современные технологии преподавания естественнонаучных дисциплин в системе общего и профессионального образования: сб. материалов международного научно-практического форума — Борисоглебск, 2013. — С. 294–298.

3. Сизиков В. С. Обратные прикладные задачи и Matlab: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 256 с.

4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

5. University of Southern California: Signal and Image Processing Institute Image Database. — <http://sipi.usc.edu/database/>



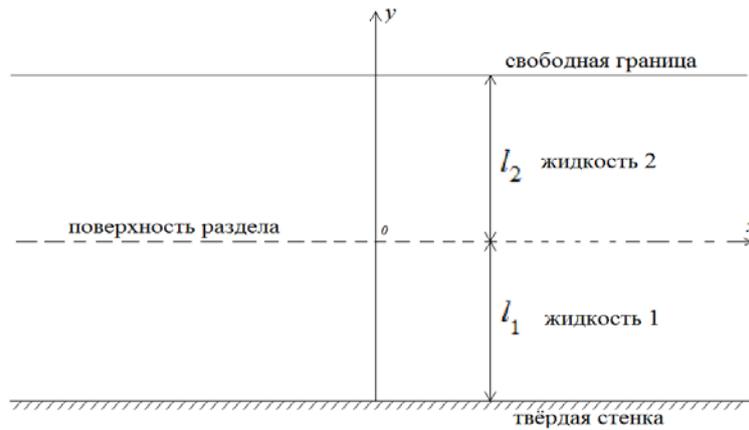
**СТАЦИОНАРНОЕ ДВУМЕРНОЕ ТЕРМОКАПИЛЯРНОЕ
ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ**

Нестеренко С.В.,

научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В.К.,
*Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский
федеральный университет*

1. Постановка задачи

В плоском канале толщиной $l_1 + l_2$ происходит двухслойное течение жидкостей.



Поле скоростей в жидкостях имеет вид

$$\vec{u}_j = (u_j(y, t)x, v_j(y, t)), j = 1, 2, \quad 1)$$

причём $div \vec{u}_j = 0$ т.е. $u_j + v_{j_y} = 0$,

а поле температур

$$\theta_j = a_j(y, t)x^2 + b_j(y, t). \quad 2)$$

Давление в жидкостях равно

$$\frac{1}{\rho_j} p_j = h_j(y, t) - f_j(t) \frac{x^2}{2}, \quad 3)$$

где ρ_j - постоянная плотность, f_j - произвольная функция и функция h_j восстанавливается квадратурой из уравнения

$$h_{j_y} = \eta_j v_{j_{yy}} - v_{j_t} - v_j v_{j_y} \quad 4)$$

по известной функции v_j ; η_j - постоянная кинематическая вязкость жидкости.

Из уравнений движений и граничных условий можно получить задачу [1],[2]

$$\begin{aligned} u_{1_t} &= \eta_1 u_{1_{yy}} + f_1(t), & -l_1 < y < 0, & & t > 0; \\ u_{1_t} &= \eta_1 u_{1_{yy}} + f_1(t), & -l_1 < y < 0, & & t > 0; \end{aligned} \quad 5)$$

$$u_{2_t} = \eta_2 u_{2_{yy}} + f_2(t), \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0; \quad 6)$$

$$u_1(y, 0) = 0, \quad u_2(y, 0) = 0; \quad 7)$$

$$u_1(-l_1, t) = 0, \quad \int_{-l_1}^0 u_1(y, t) dy = 0; \quad (8)$$

$$\int_{l_2}^0 u_2(y, t) = 0, \quad \rho_2 \eta_2 u_{2y}(l_2, t) = -2\alpha_2 a_2(l_2, t); \quad (9)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \rho_2 \eta_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \eta_1 u_{1y}(0, t) = -2\alpha_1 a_1(0, t); \quad (10)$$

$$a_{1t} = \chi_1 a_{1yy}, \quad -l_1 < y < 0, \quad t > 0; \quad (11)$$

$$a_{2t} = \chi_2 a_{2yy}, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$a_1(y, 0) = a_{10}(y), \quad a_2(y, 0) = a_{20}(y); \quad (13)$$

$$a_1(-l_1, t) = a_0(t), \quad k_2 a_{2y}(l_2, t) + \gamma_2 a_2(l_2, t) = q_0(t); \quad (14)$$

$$a_1(0, t) = a_2(0, t), \quad k_1 a_{1y}(0, t) = k_2 a_{2y}(0, t). \quad (15)$$

В задаче (5)-(15) $\alpha_1, \alpha_2, k_1, k_2, \gamma_2$ -заданные положительные постоянные, характеризующие жидкости, $a_{10}(y), (-l_2 < y < 0), a_2(y), (0 < y < l_2), a_0(t), q_0(t)$ -заданные функции.

Неизвестными в задаче являются функции u_j, a_j и f_j , тем самым эта задача является обратной: наряду с функциями, удовлетворяющими уравнениям, необходимо найти и правые части уравнений.

Далее решается стационарная задача, при этом начальные условия (7),(13) не учитываются.

2. Стационарное движение

Будем его обозначать u_j^s, a_j^s, f_j^s .

Выполняя интегрирование и удовлетворяя граничным условиям (8)-(10),(14),(15), найдём

$$\bar{u}_1^s = (2D + H)(3\xi^2 + 4\xi + 1), \quad -1 < \xi < 0$$

$$\bar{u}_2^s = (3Dl + 3H(l + 2\rho\eta))l\xi^2 - (6Dl + 4H(l + \rho\eta))\xi + (2D + H), \quad 0 < \xi < \frac{l_2}{l_1}$$

$$a_1^s = \alpha(\xi + 1) + a_{10}^s, \quad -1 < \xi < 0$$

$$a_2^s = \alpha(k\xi + 1) + a_{10}^s, \quad 0 < \xi < \frac{l_2}{l_1}$$

$$f_1^s = (-12D - 6H) \frac{\eta_1 \eta_2}{l_1^2 l_2^2}$$

$$f_2^s = (-6Dl + 3H(2l + 4\rho\eta)) \frac{\eta_2^2}{l_2}$$

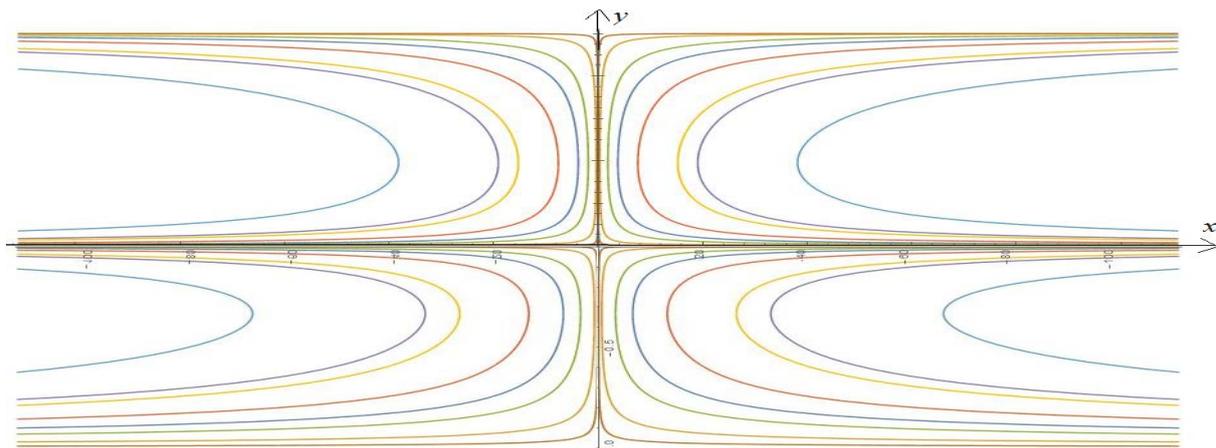
где $D = \alpha_1(\alpha + a_{10}^s)C, H = \alpha_2(\alpha(\frac{k}{l} + 1) + a_{10}^s)C, C = \frac{l_1 l_2^2}{\rho_2 \eta_2^2 (3l + 4\rho\eta)}$,

$$\alpha = \frac{(q_0 - \gamma_2 a_{10}^s) k_2 l_1}{k_1 k_2 + \gamma_2 k_1 l_2 + \gamma_2 k_2 l_1}, \quad \xi = \frac{y}{l_1}, \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

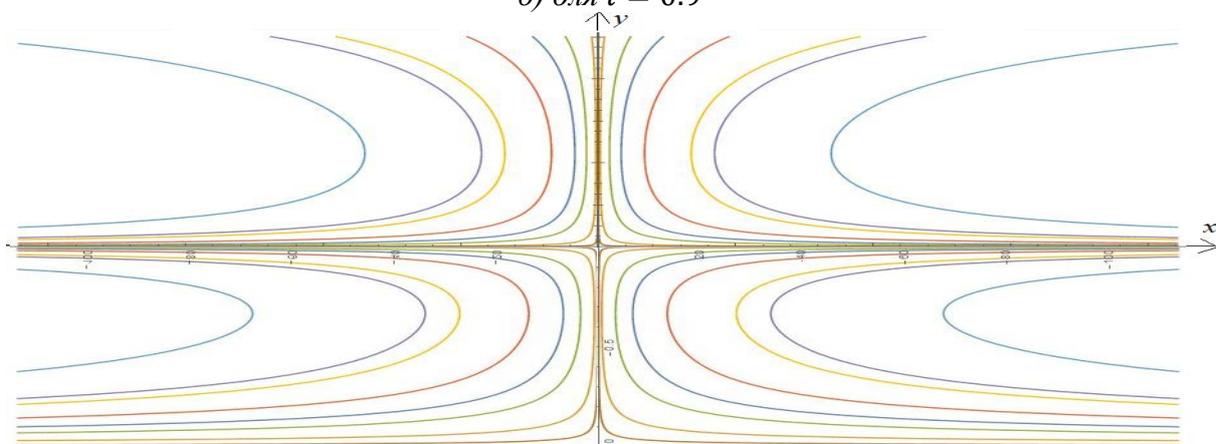
Для системы азот (первая жидкость), FC-72 (вторая жидкость) профили течения таковы:

а) для $l = 1$

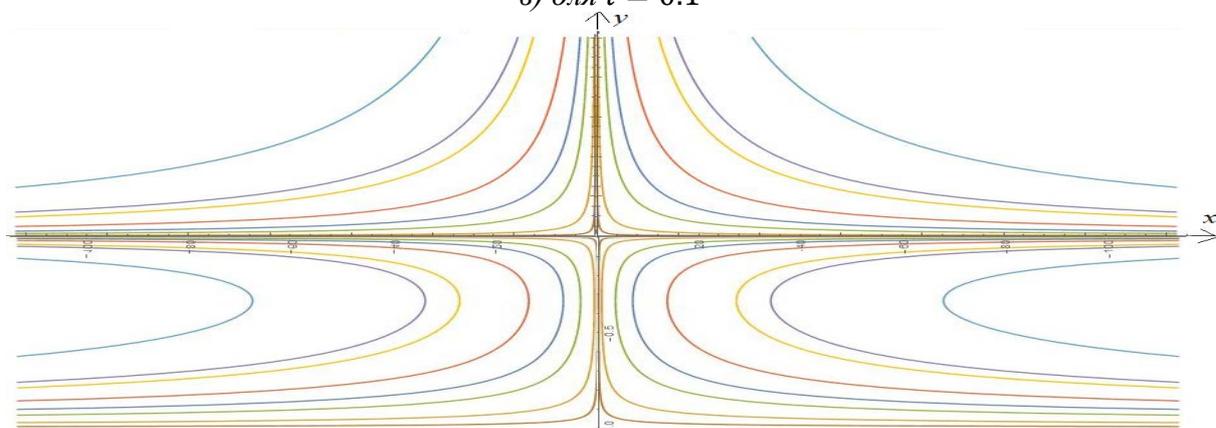




б) для $l = 0.9$



в) для $l = 0.1$



Список литературы

- [1] Андреев В.К., Гапоненко Ю.А. Математическое моделирование конвективных течений. Красноярск: КрасГУ, 2006. – 392с.
 [2] Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. – 356с.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ АЛГОРИТМОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА И ШАГА НА ОСНОВЕ ЯВНЫХ МЕТОДОВ¹

Новиков А.Е.

*Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики*

Введение. При численном моделировании электрических цепей возникает проблема решения жестких задач большой размерности [1]. В алгоритмах на основе неявных методов необходимо обращаться матрицу Якоби, что в данном случае есть отдельная трудновыполнимая задача [2]. В такой ситуации предпочтительнее применять алгоритмы на основе явных формул, если жесткость задачи позволяет за разумное время получить приближенное решение [3–4]. Здесь с применением предложенного в [4] способа оценки максимального собственного числа матрицы Якоби построено неравенство для контроля устойчивости четырехстадийного метода типа Рунге-Кутты второго порядка точности [5]. На основе стадий данной численной формулы разработан метод первого порядка точности с расширенным до 32 интервалом устойчивости. Сформулирован алгоритм интегрирования переменного порядка и шага. Приведены результаты расчета кольцевого модулятора.

Метод второго порядка точности. Рассматривается задача Коши

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f – N -мерные вещественные вектор-функции, t – независимая переменная, которая изменяется на заданном интервале $[t_0, t_k]$. Для решения (1) используются явные формулы типа Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_{m1}k_1 + p_{m2}k_2 + p_{m3}k_3 + p_{m4}k_4, \\ k_1 &= hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + 0.25h, y_n + 0.25k_1), \quad (2) \\ k_3 &= hf(t_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2), \quad k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3), \end{aligned}$$

где h – шаг интегрирования, k_i – стадии метода, p_{mi} – числовые коэффициенты, m – порядок точности метода. При коэффициентах

$$p_{21} = 1, \quad p_{22} = -2, \quad p_{23} = 2, \quad p_{24} = 0, \quad (3)$$

схема (2), (3) имеет второй порядок точности, а с коэффициентами $p_{41}=p_{44}=1/6$, $p_{42}=0$ и $p_{43}=2/3$ – четвертый порядок [5]. Тогда для контроля точности схемы второго порядка можно использовать оценку ошибки $\delta_{n,2}$ вида

$$\delta_{n,2} = (p_{41} - p_{21})k_1 + (p_{42} - p_{22})k_2 + (p_{43} - p_{23})k_3 + (p_{44} - p_{24})k_4.$$

В результате для контроля точности вычислений применяется неравенство $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ есть некоторая норма в R^N , а ε – требуемая точность расчетов. Применение данного алгоритма для решения жестких задач приводит к большому числу повторных вычислений решения (возвратов) вследствие неустойчивости численной формулы. Этого можно избежать дополнительным контролем устойчивости метода (2), (3).

Контроль устойчивости. Построим неравенство для контроля устойчивости схемы (2). Для этого применим (2) для решения линейной задачи $y' = Ay$ с постоянной матрицей A . Обозначая $X = hA$ нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$k_1 - 2k_2 + k_3 = 0.125X^3 \cdot y_n, \quad 0.5(k_2 - k_1) = 0.125X^2 \cdot y_n.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00047)



Тогда оценку максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) можно вычислить степенным методом [4]. Введем обозначение

$$v_n = 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \left| (k_1 - 2k_2 + k_3)_i / (k_2 - k_1)_i \right|. \quad (4)$$

Для контроля устойчивости метода (2), (3) можно применять неравенство $v_n \leq D$, где число D ограничивает интервал устойчивости.

Устойчивость методов типа Рунге-Кутты обычно исследуется на скалярном тестовом уравнении $y' = \lambda y$, где λ есть произвольное комплексное число, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Смысл λ – некоторое собственное число матрицы Якоби системы (1). Применяя (2), (3) для решения $y' = \lambda y$ получим, что функция устойчивости $Q_2(x)$ метода второго порядка имеет вид $Q_2(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/4$, $x = h\lambda$. Интервал устойчивости метода второго порядка равен двум, поэтому в неравенстве $v_n \leq D$ положим $D = 2$.

Оценка (4) является грубой, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max \left\{ h_n, \min \left[h^{ac}, h^{st} \right] \right\}, \quad (5)$$

где h_n есть последний успешный шаг интегрирования, h^{ac} – шаг по точности, h^{st} – шаг по устойчивости. Отметим, что формула (5) применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n , и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n . В результате для выбора шага и предлагается формула (5), которая позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость.

Из результатов расчетов алгоритмом с контролем точности и устойчивости следует значительное снижение вычислительных затрат, а точность вычислений существенно выше задаваемой. Это естественно, потому что старые ошибки убывают за счет контроля устойчивости, а новые ошибки невелика за счет малости производных решения на участке установления. В такой ситуации эффективнее считать по схеме первого порядка с более широкой областью устойчивости.

Метод первого порядка. На основе стадий схемы (2) построим метод первого порядка точности вида

$$y_{n+1} = y_n + p_{11}k_1 + p_{12}k_2 + p_{13}k_3 + p_{14}k_4, \quad (6)$$

с более широкой областью устойчивости. Для этого применим (6) для решения тестового уравнения $y' = \lambda y$. Получим $y_{n+1} = Q_1(x)y_n$, где $x = h\lambda$, а функция устойчивости $Q_1(x)$ записывается следующим образом:

$$Q_1(x) = 1 + (p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14})x + (p_{12}/4 + p_{13}/2 + p_{14})x^2 + (p_{13}/8 + p_{14}/2)x^3 + 0.25p_{14}x^4. \quad (7)$$

Требование первого порядка точности численной формулы (6) означает выполнение соотношения $p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 1$. Остальные коэффициенты p_{1i} , $1 \leq i \leq 4$, применим для расширения области устойчивости. Для построения метода с максимальным интервалом устойчивости рассмотрим многочлен Чебышева вида



$T_4(z)=8z^4-8z^2+1$. Известно, что полином $T_4(z)$ наименее отклоняется от нуля для $z \in [-1, 1]$. Проведем замену переменных $z=1-2x/\gamma$, при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на промежуток $[-1, 1]$. В результате многочлен $T_4(x)$ записывается в виде

$$T_4(x) = 1 - 32x/\gamma + 160x^2/\gamma^2 - 256x^3/\gamma^3 + 128x^4/\gamma^4. \quad (8)$$

Нетрудно показать [4], что для полинома $T_4(x)$ неравенство $|T_4(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -32$. Сравнивая соотношения (7) и (8) при $\gamma = -32$, получим коэффициенты p_{1i} , $1 \leq i \leq 4$, метода (2) первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, то есть

$$p_{11} = 895/2048, p_{12} = 257/512, p_{13} = 31/512, p_{14} = 1/2048. \quad (9)$$

В неравенстве для контроля точности будем применять оценку локальной ошибки $\delta_{n,1}$ вида

$$\delta_{n,1} = (p_{41} - p_{11})k_1 + (p_{42} - p_{12})k_2 + (p_{43} - p_{13})k_3 + (p_{44} - p_{14})k_4.$$

Для контроля точности численной формулы (6), (9) можно применять неравенство $\|\delta_{n,1}\| \leq \varepsilon$. Так как интервал устойчивости численной схемы (6), (9) ограничен числом 32, то для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $v_n \leq 32$, где v_n определяется по формуле (4).

Алгоритм интегрирования переменного порядка. Метод первого порядка с расширенной областью устойчивости эффективен на участках установления, где шаг ограничен по устойчивости. На переходных участках эффективнее будет метод (2), (3) второго порядка точности. Повышения быстродействия можно достигнуть за счет применения каждого метода на том участке, где он наиболее эффективен. В качестве критерия переключения с метода на метод можно использовать неравенство для контроля устойчивости. При расчетах по методу (2), (3) переход на численную схему (6), (9) осуществляется при нарушении неравенства $v_n \leq 2$. При расчетах методом первого порядка обратный переход происходит в случае выполнения $v_n \leq 2$. Вычисления методом первого порядка сопровождаются дополнительным (наряду с точностью) контролем неравенства $v_n \leq 32$, а шаг выбирается по формуле типа (5).

Кольцевой модулятор. В качестве примера выбрана модель кольцевого модулятора [6–7]. Получая на входе низкочастотный сигнал U_{in1} и высокочастотный сигнал U_{in2} , кольцевой модулятор генерирует на выходе смешанный сигнал U_2 . В начальный момент времени напряжения и силы токов отсутствуют, то есть начальные условия по всем переменным равны нулю. отождествляя напряжения с y_i , $1 \leq i \leq 7$, и силы токов с y_i , $8 \leq i \leq 15$, то есть, полагая $y = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8)^T$, получим систему пятнадцати дифференциальных уравнений [6]

$$\begin{aligned} y_1' &= C^{-1} [y_8 - 0.5y_{10} + 0.5y_{11} + y_{14} - R^{-1}y_1], \\ y_2' &= C^{-1} [y_9 - 0.5y_{12} + 0.5y_{13} + y_{15} - R^{-1}y_2], \\ y_3' &= C_s^{-1} [y_{10} - q(U_{D1}) + q(U_{D4})], \quad y_4' = C_s^{-1} [-y_{11} + q(U_{D2}) - q(U_{D3})], \\ y_5' &= C_s^{-1} [y_{12} + q(U_{D1}) - q(U_{D3})], \quad y_6' = C_s^{-1} [-y_{13} - q(U_{D2}) + q(U_{D4})], \\ y_7' &= C_p^{-1} [-R_p^{-1}y_7 + q(U_{D1}) + q(U_{D2}) - q(U_{D3}) + q(U_{D4})], \\ y_8' &= -L_h^{-1}y_1, \quad y_9' = -L_h^{-1}y_2, \quad y_{10}' = L_{s2}^{-1} [0.5y_1 - y_3 - R_{g2}y_{10}], \\ y_{11}' &= L_{s3}^{-1} [-0.5y_1 + y_4 - R_{g3}y_{11}], \\ y_{12}' &= L_{s2}^{-1} [0.5y_2 - y_5 - R_{g2}y_{12}], \quad y_{13}' = L_{s3}^{-1} [-0.5y_2 + y_6 - R_{g3}y_{13}], \\ y_{14}' &= L_{s1}^{-1} [-y_1 + U_{in1}(t) - (R_i + R_{g1})y_{14}], \quad y_{15}' = L_{s1}^{-1} [-y_2 - (R_c + R_{g1})y_{15}], \end{aligned}$$



$$y \in R^{15}, y(0) = 0, 0 \leq t \leq 10^{-3}.$$

Вспомогательные функции задаются формулами

$$U_{D1} = y_3 - y_5 - y_7 - U_{in2}(t), \quad U_{D2} = -y_4 + y_6 - y_7 - U_{in2}(t),$$

$$U_{D3} = y_4 + y_5 + y_7 + U_{in2}(t),$$

$$U_{D4} = -y_3 - y_6 + y_7 + U_{in2}(t), \quad q(U) = \gamma(e^{\delta U} - 1), \quad U_{in1}(t) = 0.5 \sin(2000\pi t),$$

$$U_{in2}(t) = 2 \sin(20000\pi t).$$

Расчеты осуществлялись с параметрами $C=1.6 \cdot 10^{-8}$, $C_s=2 \cdot 10^{-9}$, $C_p=10^{-8}$, $L_h=4.45$, $L_{s1}=0.002$, $L_{s2}=L_{s3}=5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma=40.67286402 \cdot 10^{-9}$, $R=25000$, $R_p=R_i=50$, $R_{g1}=36.3$, $R_{g2}=R_{g3}=17.3$, $R_c=600$, $\delta=17.7493332$. Коэффициент жесткости с данными параметрами примерно 10^9 . Вычисления проводились с численной матрицей Якоби с требуемой точностью $\varepsilon=10^{-4}$. В конце интервала интегрирования фактическая точность расчетов не хуже задаваемой точности. Выходной сигнал U_2 приведен на рис. 1.

Заключение. Из результатов расчетов можно сделать следующие выводы. Во-первых, построенный алгоритм интегрирования второго порядка с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы, а также алгоритм переменного порядка и шага можно применять для решения достаточно жестких задач. Во-вторых, по вычислительным затратам алгоритм переменного порядка и шага эффективнее метода Мерсона [8] почти в 10 раз. Это является следствием контроля устойчивости численной схемы и расчетов с переменным порядком. Представляется, что при достаточно большой размерности задачи (1) алгоритм переменного порядка и шага может конкурировать с неявными методами на задачах умеренной жесткости, потому что в нем не обращается матрица Якоби. При решении двенадцати тестовых задач [2] преимущество построенного алгоритма выше.

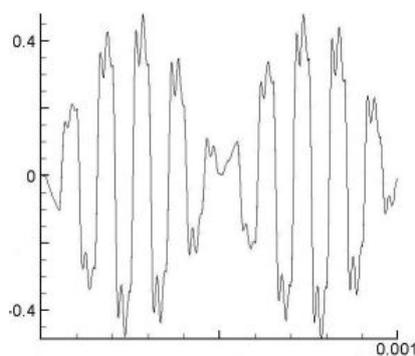


Рис. 1. Зависимость выходного сигнала от времени

Список литературы

1. Новиков Е.А. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем: монография / Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников. – Новосибирск: НГТУ, 2013. – 452 с.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи : монография / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685с.
3. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: монография / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512с.
4. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем: монография / Е.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1997. – 197с.



5. Ceschino F. Numerical solution of initial value problems: monograph / F. Ceschino, G. Kuntzman. – New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Clis, 1966. – 347p.
6. Kampowski W., Rentrop P., Schmidt W. Classification and numerical simulation of electric circuits // Surveys on Mathematics for Industry. – 1992. – №2(1). – P. 23–65.
7. Новиков Е.А. Численное моделирование кольцевого модулятора (3,2)-методом решения жестких задач / Е.А. Новиков // Информатика и системы управления. – 2011. – №1(27). – С. 50 – 61.
8. Merson R.H. An operational methods for integration processes / R.H. Merson // Australia: Proc. of Symp. on Data Processing. – 1957. – P. 329–331.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЭЛЕКТРОЛИТА ЧЕРЕЗ ПОРЫ ФУТЕРОВОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРОВ

Орлов А.С.

научный руководитель Прошкин А.В., д-р техн. наук.
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

В конце 19 века Чарльз Холл и Поль Эрру высказали свои идеи о производстве алюминия электролизом. Хотя принципы процесса Холла-Эрру не изменились с момента их внедрения, современные требования к материалам катодной подины стали гораздо более серьезными [1]. Одной из основных причин преждевременного отключения алюминиевого электролизера является проникновение электролита в теплоизоляционную часть футеровки подины. Попадание электролита в теплоизоляцию катодного устройства ведет к избыточным тепловым потерям и уменьшению срока службы электролизера. Математическое моделирование является ценным инструментом, который может помочь в оптимизации существующей конструкции футеровки катодного устройства и позволит сэкономить время и силы при разработке новых электролизеров. Использование математических моделей особенно ценно для осуществления термоэлектрического анализа ванны, и дает возможность быстро пересчитать профиль гарнисажа и новый тепловой баланс, если изменяются элементы подины или их свойства.

Наиболее слабым местом в конструкции электролизера являются набивные межблочные и периферийные швы, поэтому моделирование проводилось с учетом этих особенностей. Расчетная область представляет собой половинную часть катодного устройства электролизера, геометрия приведена на рисунке 1. В сечении выделены все составные части алюминиевого электролизера данной конструкции. Математическое моделирование фильтрации электролита проводилось с использованием CFD-пакета FLUENT вер. 14 [2]. Для решения задачи использовался VOF метод [3].

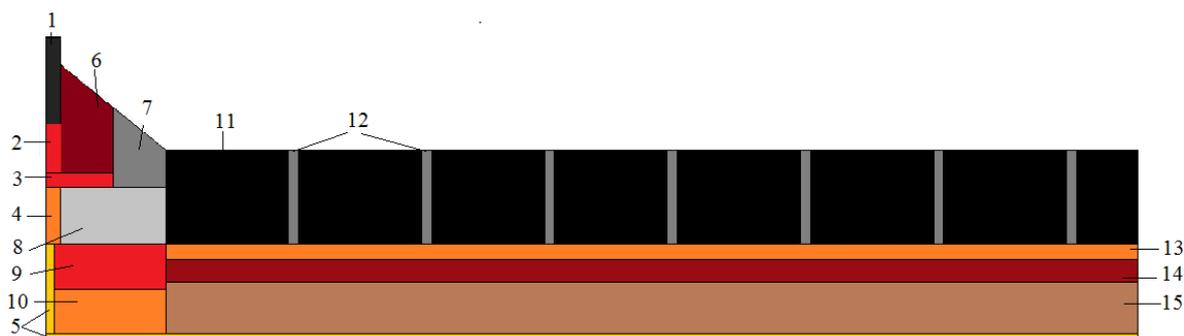


Рисунок 1. Геометрия расчетной области: 1 – SiC блок, 2 и 3 – шамот, 4 – вермикулит, 5 – древесная мука, 6 – блок-вставка, 7 – периферийный шов, 8 – бетон огнеупорный, 9 – шамот, 10 – вермикулит, 11 – подовый блок, 12 – межблочные швы, 13, 14 – огнеупор, 15 – теплоизоляция.

Задача распространения электролита решалась в нестационарной двумерной постановке при условии постоянства температуры и плотности электролита. Ниже представлены результаты расчета.

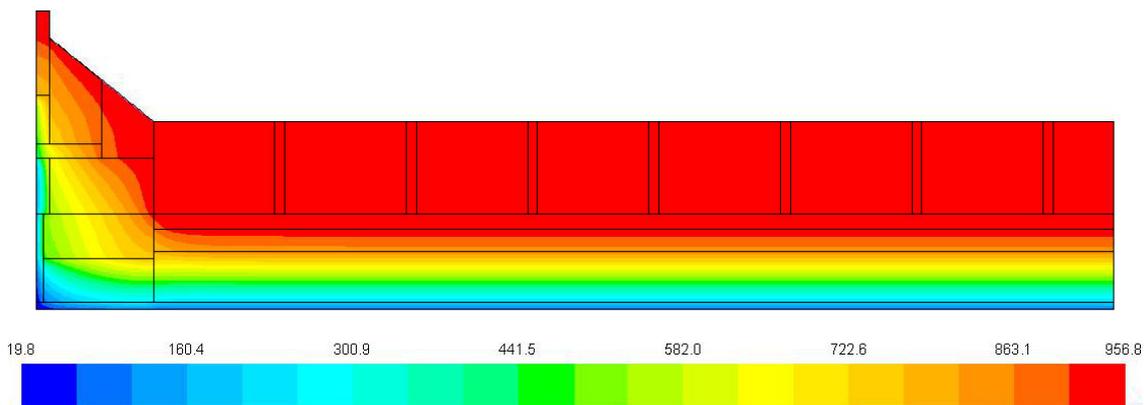


Рисунок 2. Температурное поле (°C)

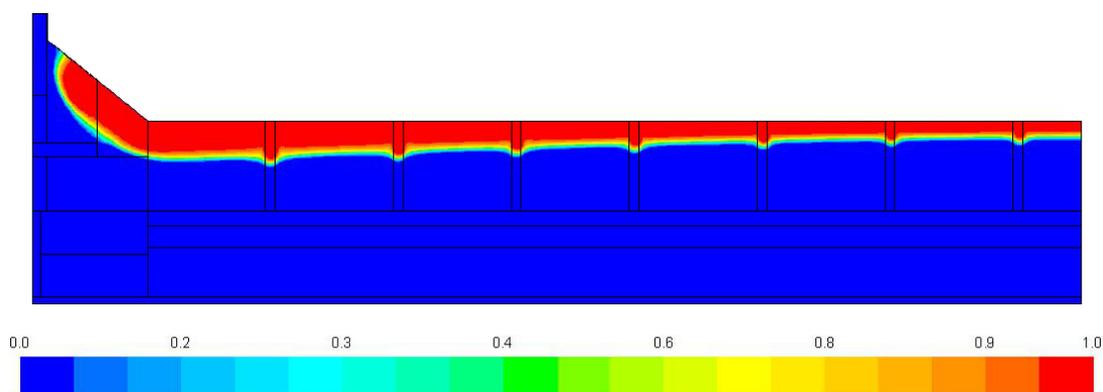


Рисунок 3. Пропитка подины электролитом за 10 часов

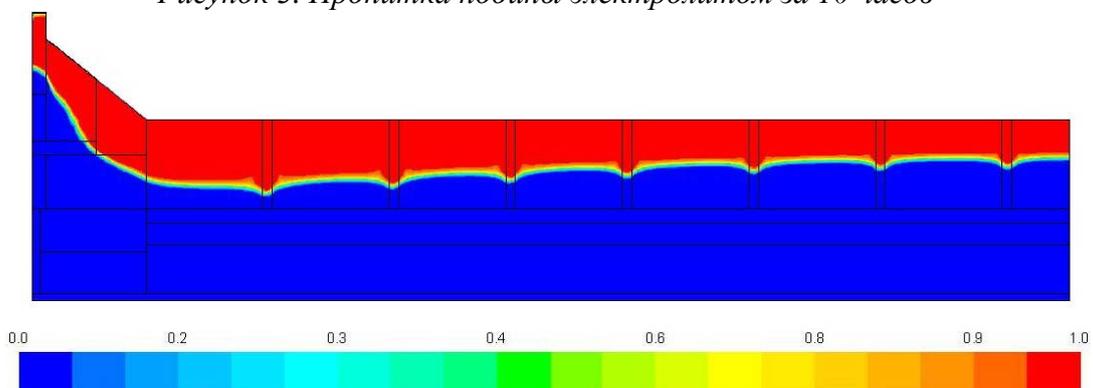


Рисунок 4. Пропитка подины электролитом за 100 часов

Из полученных результатов (рисунок 2) видно, что изотерма ликвидуса электролита (850 °C) полностью проходит слой СБС и практически доходит до ПБУ, поэтому при высокой проницаемости подовых блоков расплав, в конечном счете, пройдет на это же расстояние. По профилю подины наблюдается градиент температур, как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Слабее прогрета область периферийного шва, но температуры там довольно высокие.

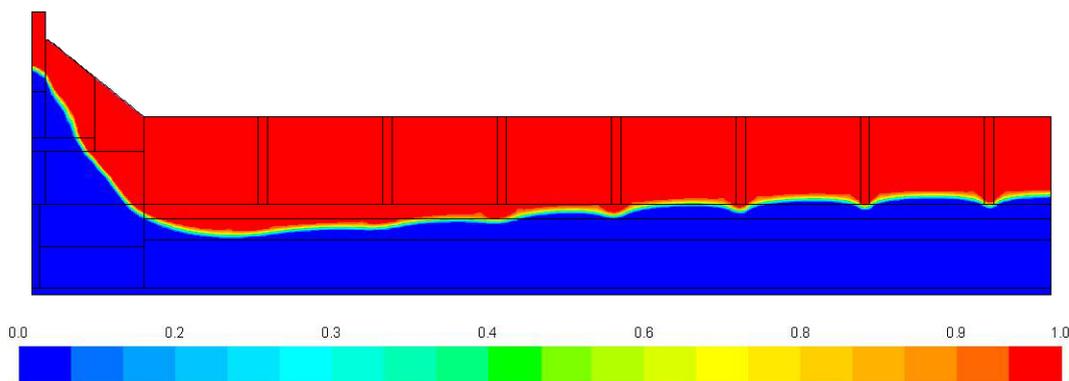


Рисунок 5. Пропитка подины электролитом за 1000 часов

Из рисунков 3,4,5 видно, что наиболее интенсивно пропитка электролитом идет в первые сутки, когда градиент давления наибольший. За это время происходит насыщение верхнего слоя блока. Так же заметно, что со временем пропитка распространяется и в бортовой блок. Это происходит, потому что при решении задачи не учитывался защитный слой гарнисажа, который препятствовал бы росту температуры в этой области, тем самым защищая ее от проникновения электролита.

Разработанная математическая модель, позволяет моделировать теплофизические процессы проникновения электролита в футеровочные материалы катода электролизера что дает возможность оптимизировать конструкцию футеровки с целью уменьшения тепловых затрат и увеличения срока службы катодного устройства.

Список литературы

1. Мартен Сорлье. Харальд А. Ойя. Катоды алюминиевого электролизера // Пер. с английского П.В. Полякова; Красноярск: Версо, 2013, 1-4 с.
2. Митрофанов, И.К. FLUENT и GAMBIT - Программы для решения задач механики жидкости и газа, тепло и массопереноса / И.К. Митрофанов.2009 –Режим доступа http://www.teplota.org.ua/2009-08-25-fluent_gambit_ru.html (Дата обращения 10.01.2015)
3. C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. J. Comput. Phys., 39:201-225, 1981.



МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Петрова А.В.

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Хусаинов И.Г.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Рассмотрено моделирование распространения слабых возмущений в жидкости, находящейся в цилиндрическом канале (в обсаженной скважине), который имеет перфорированный участок и окружен проницаемой пористой средой. Исходный сигнал генерируется на некотором расстоянии H от перфорированного участка. Сигнал, распространяясь по жидкости, доходит до перфорированного участка. Одна часть сигнала проходит через этот участок, а другая часть отражается. Отраженная часть сигнала будет нести определенную информацию о качестве перфорации.

Будем полагать, что волна распространяется вдоль оси цилиндрического канала, а протяженность волновых возмущений значительно больше длины перфорированного участка. В силу этого допущения в перфорированном участке распределение давления будет однородным, и его можно принять за отражающую поверхность с координатой $z = 0$. Условия на отражающей поверхности получим из уравнений сохранения массы жидкости на проницаемом участке при учете изменения массы за счет притока (оттока) жидкости через верхнюю (нижнюю) границу перфорированного участка, а также за счет оттока жидкости в перфорационные каналы. Следовательно, в зоне отражающей поверхности в линеаризованном приближении имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_0 \frac{w_- - w_+}{L} - \frac{2n\pi b^2}{a} \rho_0 u, \quad (1)$$

где ρ – возмущение плотности; w_- и w_+ – осевая скорость среды на верхней и нижней границах перфорированного участка (скорость возмущения жидкости в цилиндрическом канале на отражающей поверхности терпит разрыв из-за фильтрации жидкости через стенки перфорационного канала), u – скорость оттока жидкости из цилиндрического канала в перфорационные каналы, a – радиус цилиндрического канала; L – длина перфорированного участка. Индекс (0) у параметра означает, что его значение отнесено к начальному (невозмущенному) состоянию.

Уравнение состояния имеет вид

$$p = C^2 \rho, \quad (2)$$

где p – возмущение давления жидкости; C – скорость звука в жидкости.

При отражении и прохождении акустической волны через перфорированный участок изменяется однородное давление в зоне отражающей поверхности, что приводит к фильтрации жидкости через боковую поверхность перфорационного канала в окружающую пористую среду. Для определения скорости утечки (или притока) жидкости из цилиндрического канала u запишем уравнение сохранения массы жидкости внутри перфорационного канала:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{l} u - 2 \frac{\rho_0}{b} \tilde{y}. \quad (3)$$

На основе решения внешней фильтрационной задачи определим скорость фильтрации флюида через стенки перфорационного канала \tilde{y} . Для определения поля давления вокруг перфорационного канала используем уравнение пьезопроводности:



$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \chi \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \right), \quad \left(\chi = \frac{kC^2 \rho_0}{\mu m} \right). \quad (4)$$

Здесь μ – вязкость жидкости; m , k – коэффициенты пористости и проницаемости окружающей цилиндрический канал пористой среды соответственно; χ – коэффициент пьезопроводности; p' – распределение давления вокруг канала; r' – радиальная координата.

Фильтрацию жидкости из перфорационных каналов в окружающую пористую среду опишем с помощью закона Дарси

$$\tilde{u}' = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial r'}, \quad (5)$$

где \tilde{u}' – распределение скорости фильтрации жидкости вокруг перфорационного канала.

Используя условие непрерывности скорости и давления на границе $r' = b$, для уравнений (4), (5) запишем следующие граничные условия:

$$\tilde{u}' = \tilde{u}, \quad p' = p, \quad (r' = b). \quad (6)$$

$$p' = 0, \quad (r' = \infty) \quad (7)$$

В рамках модели плоского движения нестационарное течение жидкости в скважине при распространении возмущений будем описывать в квазиодномерном приближении. Тогда в системе координат, относительно которой невозмущенная жидкость покоится, полагаем, что возмущение давления p и скорость w удовлетворяют следующим уравнениям неразрывности и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\tau}{a}. \quad (9)$$

Здесь τ – вязкое напряжение на внутренней поверхности стенки цилиндрического канала, которое определяется из соотношения

$$\tau = \frac{\mu}{(\pi v)^{1/2}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial t'}{\sqrt{t-t'}} dt', \quad v = \frac{\mu}{\rho_0}.$$

Приведенное выше выражение для τ справедливо, когда вязкость проявляется лишь в тонком пограничном слое вблизи стенки скважины при распространении волновых возмущений.

Для плоской гармонической волны, падающей нормально на отражающую поверхность сверху, найдены коэффициенты отражения N и прохождения M через перфорированный участок.

$$N = \left(\frac{2\omega/K}{i\omega L - d} - 1 \right)^{-1}, \quad M = N + 1, \quad (10)$$

Здесь K , ω – комплексное волновое число и круговая частота возмущений соответственно; параметр d определяет процесс фильтрации жидкости через перфорационные каналы.

На основе полученных выражений для коэффициентов отражения и прохождения волн рассмотрена эволюция волн конечной длительности при отражении от границы $z = 0$.



Пусть сверху от отражающей поверхности ($z < 0$) через границу $z = -H$ запускается импульс давления колоколообразной формы с амплитудой ΔP_0 . Результаты численной реализации процесса отражения импульса давления от перфорированного участка, проведенной с использованием метода быстрого преобразования Фурье, представлены на рис. 1. Осциллограммы D_1 , D_2 и D_3 соответствуют показаниям датчиков D_1 , D_2 и D_3 , расположенных на расстоянии H от отражающей поверхности, вблизи отражающей поверхности и на герметичной стенке. Временная протяженность исходного импульса равна $t_* = 0.02$ с. Длина проницаемого участка $L = 2$ м. Первый всплеск в осциллограмме датчика D_1 выражает исходный сигнал, запущенный с расстояния $H = 1000$ м от перфорированного участка. Этот импульс достигает проницаемого участка несколько ослабленным из-за проявления вязкости жидкости в процессе его распространения в канале (первый всплеск в осциллограмме датчика D_2). Осциллограмма датчика D_3 соответствует прошедшему через отражающую поверхность импульсу, т.е. в данном случае это возмущение давления на герметичной стенке. Второй всплеск в осциллограмме датчика D_2 – это отраженный сигнал от поверхности $z = 0$. Далее этот сигнал возвращается к датчику D_1 (второй всплеск в осциллограмме датчика D_1). Штриховая линия на этой осциллограмме на всех рисунках соответствует отраженному сигналу от герметичной стенки, когда в цилиндрическом канале перфорированный участок вообще отсутствует. Линиям 1 и 2 соответствуют значения длины перфорационного канала равные 0.1 и 0.3 м соответственно.

Из рис.1 видно, что длина перфорационного канала значительно влияет на отражение акустического сигнала от границы перфорированного участка. Увеличение этого параметра в три раза приводит к дополнительному затуханию амплитуды импульса в два раза и увеличению амплитуды перевернутой части импульса. Таким образом, с помощью акустических сигналов можно оценить длину перфорационных каналов, т.е. оценить качество перфорации скважин.



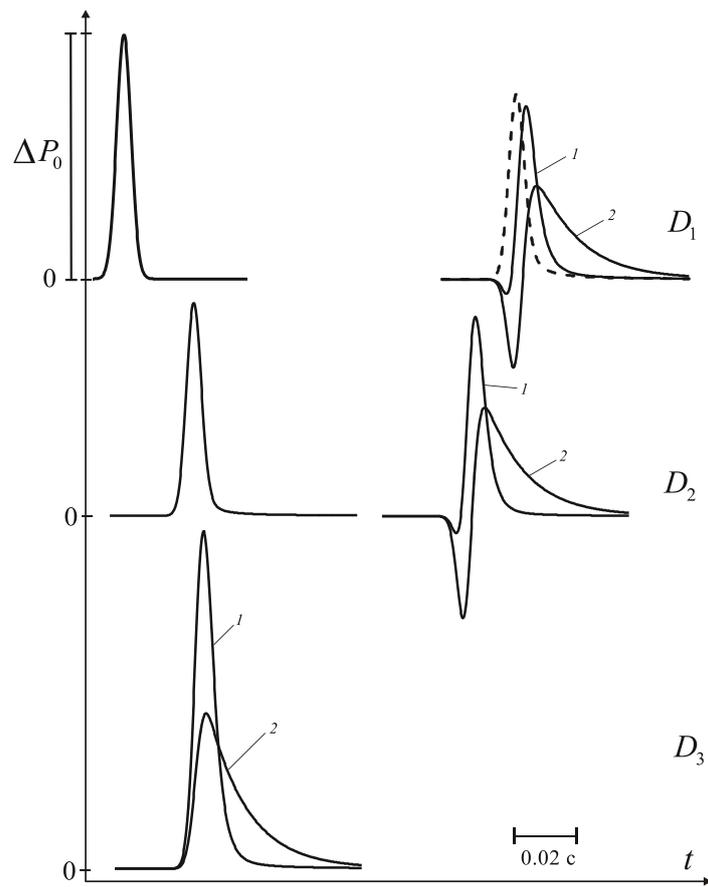


Рис. 1. Распространение импульса давления в заполненном водой цилиндрическом канале и отражение от перфорированного участка.

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ СТАДИЙ¹

Рыбков М.В.

научный руководитель д-р физ.-мат. наук Е.А. Новиков

Сибирский федеральный университет

Введение. Для численного решения жестких задач вида

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f – гладкие вещественные N -мерные вектор функции, t – независимая переменная, предлагается применять явные методы вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf \left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), \quad (2)$$

где k_i , $1 \leq i \leq m$, – стадии метода, p_{mi} , α_{ij} и β_{ij} – коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2). Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (3)$$

для решения которой применим методы вида

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad (4)$$

где $k_i = hf(y_{n,i-1})$, $1 \leq i \leq m$, $y_{n,0} = y_n$. Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных задач, если в (2) положить

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m. \quad (5)$$

Связь коэффициентов. Ниже потребуется матрица B_m с элементами b_{ij} [1–2]

$$b_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq m, \quad b_{ki} = 0, \quad 2 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad b_{ki} = \sum_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}, \quad 2 \leq k \leq m, \quad k \leq i \leq m, \quad (6)$$

где β_{ij} – коэффициенты схемы (2) или (4). Устойчивость одношаговых методов обычно исследуется на линейном скалярном уравнении

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

с комплексным λ , $\text{Re}(\lambda) < 0$. Применяя вторую формулу (4) к (7), получим

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad z = h\lambda, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (8)$$

Обозначая $C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T$ и $P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T$, последнее соотношение (8) можно переписать в виде

$$B_m P_m = C_m, \quad (9)$$

где элементы матрицы B_m определены соотношениями (6). Для промежуточных численных схем (4) имеем

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad z = h\lambda, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (10)$$

Используя обозначения $\beta_k = (\beta_{k+1,1}, \dots, \beta_{k+1,k})^T$ и $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kk})^T$ получим, что коэффициенты β_{ij} промежуточных схем (4) и коэффициенты соответствующих многочленов устойчивости связаны соотношениями

$$B_k \beta_k = c_k, \quad 1 \leq k \leq m-1. \quad (11)$$

Отметим, что из сравнения (6) и (10) следует, что $b_{ki} = c_{i-1,k-1}$, то есть элементы $(k+1)$ -го столбца матрицы B_m совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости $Q_k(z)$. Отсюда следует, что если заданы коэффициенты многочленов устойчивости основной и промежуточной численных формул, то коэффициенты методов (4)

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00047)



однозначно определяются из линейных систем (9) и (11) с верхними треугольными матрицами B_i , $1 \leq i \leq m$.

Условия порядка. Разлагая точное и приближенное решения в ряды Тейлора по степеням h , можно записать

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hf + h^2 ff / 2 + h^3 [f f^2 + f'^2 f] / 6 + O(h^4), \\ y_{n+1} &= y_n + \left(\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} \right) hf_n + \left(\sum_{j=2}^m b_{2j} p_{mj} \right) h^2 f'_n f_n + \left(\sum_{j=3}^m b_{3j} p_{mj} \right) h^3 f_n'^2 f_n + (12) \\ &+ 0.5 \left(\sum_{j=2}^m b_{2j}^2 p_{mj} \right) h^3 f_n'' f_n^2 + O(h^4), \end{aligned}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном $y(t_n)$ и приближенном y_n решениях, соответственно. Из сравнения соотношений (12) при условии $y_n = y(t_n)$ видно, что численная формула (4) будет иметь первый порядок точности, если

$$\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} = 1.$$

Отсюда следует, что для построения m -стадийных методов первого порядка точности в линейной системе (9) следует положить $c_{m1} = 1$.

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (9) и (11) требуются коэффициенты многочленов устойчивости. Функция устойчивости явного m -стадийного метода типа Рунге-Кутты представляет собой полином степени m вида

$$Q_{m,k}(x) = 1 + \sum_{i=1}^k c_i x^i + \sum_{i=k+1}^m c_i x^i, (13)$$

где коэффициенты c_i , $1 \leq i \leq k$, заданы, а c_i , $k+1 \leq i \leq m$, – свободные, два целых числа k и m заданы, $k \leq m$. Вычислив коэффициенты многочлена (13), с помощью соотношения (9) можно найти коэффициенты методов типа (2).

Метод первого порядка. В [3] описан алгоритм построения многочленов с заданными свойствами на промежутке $[-1, 1]$, который позволяет вычислить коэффициенты многочленов устойчивости, соответствующих методам первого порядка, до степени $m=27$. Если параметры схемы (2) и коэффициенты полинома (13) связаны соотношениями (9) при условии $c_{m1} = 1$, то решение (9) дает параметры m -стадийной схемы (2) первого порядка точности. При заданных β_{ij} , $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq i-1$, и c_{ij} , $2 \leq i \leq m$, задача (13) имеет единственное решение в силу невырожденности матрицы B_m . При выборе β_{ij} можно руководствоваться различными соображениями. Если, например, набор формул (2) используется совместно с методом более высокого порядка точности, то и в схемах первого порядка естественно применять те же самые стадии k_i .

Получим неравенства для контроля точности и устойчивости. Схемы первого порядка предполагается использовать на участке установления, где шаг ограничен устойчивостью метода, а не точностью вычислений. Контроль точности в этом случае носит вспомогательный характер, и для получения соответствующего неравенства будем использовать оценку локальной ошибки. В [2] показано, что из сравнения точного решения $y(t_{n+1})$ задачи (1) и приближенного решения y_{n+1} , полученного по схеме (2), до членов h^2 включительно при условии $y_n = y(t_n)$ локальная ошибка схемы (2) первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = (0.5 - \sum_{i=2}^m b_{2i} p_{mi}) h^2 f f' + O(h^3).$$

Учитывая (8), ее можно переписать так:

$$\delta_{n,1} = 0.5(1 - 2c_{m2}) h^2 f f' + O(h^3),$$

где c_{2m} – заданный коэффициент при x^2 в (13).

Величину $\delta_{n,1}$ с помощью уже вычисленных стадий k_i , $1 \leq i \leq m$, можно оценить многими способами. Будем поступать следующим образом. Введем обозначения:

$$A'_n = g'_m \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_m \|hf(y_{n+1}) - k_1\|, (14)$$

где



$$g''_{m1} = 0.5 \cdot |1 - 2c_{m2}|, \quad g'_{m1} = |\beta_{21}|^{-1} \cdot g''_{m1}. \quad (15)$$

Тогда, учитывая что

$$k_2 - k_1 = \beta_{21} h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

для контроля точности вычислений и при выборе шага интегрирования можно применять соответственно неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Вектор k_1 зависит от размера шага линейно. Поэтому с помощью первого неравенства (16) повторное вычисление решения сопровождается всего лишь одним дополнительным вычислением правой части дифференциальной задачи. В случае успешного шага второе неравенство (16) не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что вектор $f(y_{n+1})$ применяется на следующем шаге интегрирования. Если второе неравенство (16) используется для контроля точности вычислений, то возврат при невыполнении точности будет дорогим, причем с ростом m затраты увеличиваются. Однако предварительный контроль A'_n позволяет в основном избежать повторных вычислений решения.

В случае применения численных формул (2) с переменным числом стадий при $2 \leq m \leq M$, где M – заданное целое число, можно поступать следующим образом. Введем обозначения:

$$g''_{M2} = \max_{2 \leq m \leq M} g''_{m1}, \quad g'_{M1} = |\beta_{21}|^{-1} g''_{M2},$$

где g''_{m1} вычисляются по первой формуле (15). Оценку ошибки определим по формулам

$$A'_n = g'_{M1} \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_{M1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|.$$

Тогда для контроля точности и при выборе шага интегрирования сразу для всего набора формул снова можно пользоваться неравенства (16).

Теперь перейдем к получению неравенства для контроля устойчивости. Ниже будем предполагать выполненными соотношения

$$\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}, \quad m \geq 3,$$

где $\beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ – параметры схемы (2).

Неравенство для контроля устойчивости получи следующим образом. Запишем разность $(k_3 - k_2)$ в форме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого рода:

$$k_3 - k_2 = \beta_{32} h \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y} (k_2 - k_1).$$

Учитывая вид разности $(k_2 - k_1)$, оценку максимального собственного числа матрицы Якоби можно определить степенным методом, т.е. для контроля устойчивости методов (2) первого порядка будем применять неравенство

$$v_n \leq \gamma_{m,1}, \quad (17)$$

где

$$v_n = |\beta_{32}^{-1}| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|, \quad (18)$$

а положительные постоянные $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$, связаны с размером области устойчивости численных схем. Неравенство (17) можно использовать на каждом шаге для выбора эффективной численной схемы.

Таким образом, задача о построении явных методов Рунге-Кутты первого порядка точности с заданной областью устойчивости сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (9) с невырожденной матрицей B_m , где компоненты вектора c_m определяют размер и форму области устойчивости. Ниже с помощью построенных численных схем сформулируем алгоритм интегрирования, в



котором допускаются расчеты, как по фиксированной схеме, так и с переменным числом стадий. Параметры методов можно хранить в виде двухмерного массива E с элементами e_{ij} вида

$$e_{ij} = \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq i-1, \quad e_{im} = p_{mj}, \quad 3 \leq m \leq M, \quad 1 \leq j \leq m,$$

где M – максимальное число стадий в наборе методов. Величины $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$, будем хранить в одномерном массиве.

Алгоритм с переменным числом стадий. Пусть имеется набор m -стадийных методов, длины интервалов устойчивости которых равны $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$, $M \geq 3$. Ниже будем полагать, что при первом входе $m=3$. Алгоритм интегрирования с переменным числом стадий на основе методов первого порядка записывается следующим образом.

Шаг 1. Вычислить стадию k_1 по формуле (2).

Шаг 2. Вычислить стадию k_2 по формуле (2).

Шаг 3. Вычислить оценку локальной ошибки A'_n по первой формуле (14).

Шаг 4. Вычислить значение q по формуле $q^2 \cdot A'_n = \varepsilon$.

Шаг 5. Если $q < 1$, то h положить $q \cdot h$ и перейти на шаг 2 (возврат).

Шаг 6. Вычислить стадии k_i , $3 \leq i \leq m$, по формулам (2).

Шаг 7. Вычислить значение $f(y_{n+1})$.

Шаг 8. Вычислить оценку локальной ошибки A''_n по второй формуле (14).

Шаг 9. Перевычислить значение q по формуле $q^2 \cdot A''_n = \varepsilon$.

Шаг 10. Если $q < 1$, то h присвоить $q \cdot h$ и перейти на шаг 2 (возврат).

Шаг 11. Вычислить приближенное решение y_{n+1} по схеме (2).

Шаг 12. Вычислить значение v_n по формуле (18).

Шаг 13. Вычислить значение r по формуле $r \cdot v_n = \gamma_{m,1}$.

Шаг 14. Вычислить прогнозируемый шаг h_{n+1} по формуле

$$h_{n+1} = \max \{ h_n, \min [q, r] \cdot h_n \}.$$

Шаг 15. Если $q \cdot v_n > \gamma_{m,1}$ и $m < M$, то положить m равным $(m+1)$.

Шаг 16. Если $m > 3$ и $q \cdot v_n < \gamma_{m-1,1}$, то положить m равным $(m-1)$.

Заключение. С помощью описанной схемы получены коэффициенты многочленов устойчивости до степени $m=27$, и построены соответствующие методы первого порядка точности. Известно, что максимальная длина интервала устойчивости m -стадийного метода типа Рунге–Кутты первого порядка точности равна $2m^2$. В результате на каждое вычисление правой части приходится $2m$ единиц длины интервала устойчивости. Это означает, что если шаг ограничен по устойчивости, то с ростом m эффективность метода возрастает. Построенный здесь алгоритм интегрирования жестких задач с переменным числом стадий на основе методов первого порядка позволяет существенно повысить эффективность расчетов на участке установления решения, где шаг ограничен по устойчивости.

Список литературы

1. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: монография / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685с.
2. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем: монография / Е.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1997. – 197 с.
3. Новиков Е.А. Численный алгоритм построения многочленов устойчивости методов первого порядка / Е.А. Новиков, М.В. Рыбков // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – № 9-2. – С. 80–85.



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ CUDA ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Смолехо И. В.,

научный руководитель д-р физ.-мат. наук, профессор Садовский В. М.

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Жидкие кристаллы являются уникальными веществами благодаря необычному сочетанию анизотропных свойств, присущих кристаллам, и текучести, свойственной жидкостям. В [1] построена упрощенная модель нематического жидкого кристалла как акустической микронеоднородной среды с вращающимися частицами. Основная система уравнений этой модели в двумерном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho u_t &= -p_x - q_y, & \rho v_t &= q_x - p_y, & j \omega_t &= 2q, & \varphi_t &= \omega, \\ p_t &= -k(u_x + v_y) + \beta T_t, & q_t &= \alpha(v_x - u_y - 2\omega), & & & & (1) \\ c T_t &= (\kappa_{11} T_x + \kappa_{12} T_y)_x + (\kappa_{12} T_x + \kappa_{22} T_y)_y - \beta T(u_x + v_y), \end{aligned}$$

где u и v – компоненты вектора скорости, ω – угловая скорость, φ – угол поворота молекул кристалла, p – гидростатическое давление, q – касательное напряжение, T – абсолютная температура, ρ – плотность, j – момент инерции, k – модуль объемного сжатия, α – модуль упругого сопротивления вращению, β – коэффициент теплового расширения, c – удельная теплоемкость, κ_{11} , κ_{12} и κ_{22} – компоненты тензора теплопроводности:

$$\kappa_{11} = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi, \quad \kappa_{12} = (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \kappa_{22} = \kappa_1 \sin^2 \varphi + \kappa_2 \cos^2 \varphi,$$

κ_1 и κ_2 – коэффициенты теплопроводности в направлении ориентации молекул жидкого кристалла и в поперечном направлении.

Численное решение краевых задач для системы (1) осуществляется с помощью метода двуциклического расщепления по пространственным переменным [2]. Рассматривается расчетная область в форме квадрата. Искомые величинами являются скорости, напряжения, угловая скорость и температура внутри расчетной области.

На этапах расщепления одномерные задачи решаются с использованием конечно-разностной схемы типа “предиктор–корректор”. Конечно-разностная схема, построенная по принципу схемы С.К. Годунова [3], применяется при решении акустических уравнений, схема Г.В. Иванова [4] с контролируемой диссипацией энергии – при решении уравнения теплопроводности. Температура в каждом направлении вычисляется с помощью трехточечной прогонки. Для пересчета угла поворота молекул жидкого кристалла, угловой скорости и касательного напряжения используется схема Кранка–Николсон.

Разработанная математическая модель реализована в виде параллельной программы для вычислительных систем с графическими ускорителями с применением технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture) [5]. Распараллеливание вычислений производится на этапах метода расщепления. На GPU (Graphical Processing Unit) расчетная область разбивается на квадратные блоки, содержащие одинаковое число нитей. Каждой нити ставится в соответствие ячейка разностной сетки. В параллельном режиме нити графического устройства выполняют однотипные операции в ячейках по расчету решения на шаге “предиктор” и на шаге “корректор” схемы.

В начале программы на CPU (Central Processing Unit) задаются размерности конечно-разностной сетки, необходимые константы, а также описываются одномерные массивы и задаются начальные данные для компонент вектора скорости, угловой



скорости, угла поворота, давления, касательного напряжения и температуры. Одновременно на GPU выделяется память под массивы для этих величин и всех вспомогательных величин. Затем необходимые константы и массивы копируются с CPU на GPU. На каждом шаге по времени последовательно реализуются этапы метода расщепления. На этапах расщепления графическим устройством выполняются все необходимые ядра в параллельном режиме. Для анализа результатов, решение в контрольных точках передается с GPU на CPU, и по полученным файлам данных рисуются линии уровня величин графическими средствами персонального компьютера.

Далее представлены численные результаты для задачи с заданной внутри всей расчетной области температурой T_0 в начальный момент времени и нулевыми граничными условиями для всех величин. Расчеты проведены для разных коэффициентов теплопроводности: $\kappa_1 = 5\kappa_2$, угол поворота молекул жидкого кристалла $\varphi = \pi/4$. На рис. 1 видно, что линии уровня температуры вытягиваются в направлении ориентации молекул. Рис. 2 показывает, как распространяются волны давления и как они отражаются друг от друга.

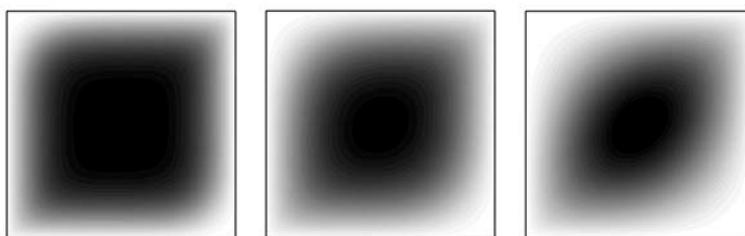


Рис. 1. Линии уровня температуры T (100, 200 и 500-й шаги по времени – слева направо)

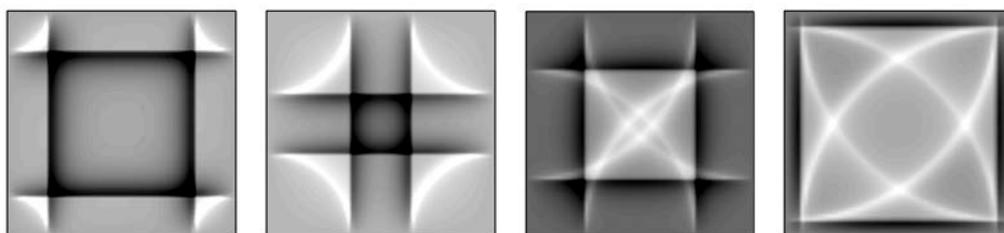


Рис. 2. Линии уровня давления p (100, 200, 400 и 500-й шаги по времени – слева направо)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00130).

Список литературы

1. Садовский В. М., Садовская О. В. Об акустическом приближении термомеханической модели жидкого кристалла // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16, № 3. С. 55–62.
2. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
5. Боресков А. В., Харламов А. А. Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК Пресс, 2010. 232 с.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАВИСЯЩЕГО ТОЛЬКО ОТ ВРЕМЕНИ

Соболев А.Н.

научный руководитель кандидат физ.-мат. наук, доцент Распопов В.Е.

Сибирский федеральный университет

В предложенной работе решается задача, определения неизвестного коэффициента при старшей производной. Рассмотрим следующую задачу.

В области $D = \{(t, x) / 0 < t < 1, 0 < x < 1\}$. Требуется найти $u(t, x)$ и $\mu(t)$, удовлетворяющие следующей задаче:

$$(1) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}) + f(t, x), 0 < t < 1, 0 < x < 1.$$

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1,$$

$$(3) \quad u(t, 0) = \psi_1(t), 0 \leq t \leq 1,$$

$$(4) \quad u(t, 1) = \psi_2(t), 0 \leq t \leq 1,$$

$$(5) \quad \mu(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \beta(t), 0 \leq t \leq 1,$$

где (2) - начальное условие, (3)-(4) - краевые условия, (5) - условие переопределения. Функции $u_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$ - заданы.

Поставленную задачу решаем численно.

Строим равномерную сетку:

$$D_h \{(t_n, x_j) / t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N; x_j = jh, j = 0, 1, \dots, M\}$$

Задачу (1) - (5) аппроксимируем следующей неявной схемой:

$$(6) \quad \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \mu^n \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} + f_j^n, 1 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq M - 1.$$

$$(7) \quad y_j^0 = u_0(x_j), 1 \leq j \leq M - 1,$$

$$(8) \quad y_0^{n+1} = \psi_1(t_n), 1 \leq n \leq N,$$

$$(9) \quad y_M^{n+1} = \psi_2(t_n), 1 \leq n \leq N,$$

$$(10) \quad \mu^n \frac{y_1^n - y_0^n}{\tau} = \beta(t_n), 1 \leq n \leq N.$$

В (5) производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ аппроксимируем по двум точкам на нижнем слое. Поэтому порядок аппроксимации $O(\tau + h)$.

Алгоритм реализации:

1) Из (10) находим μ^n , подставляем в (6)

2) Полученную прямую задачу (6), решаем на верхнем слое, применяя метод трёх диагональной прогонки.



3) Продолжаем шаги 1), 2) по всем слоям по времени.

Для реализации алгоритма подготовлена программа, написанная в среде C++. Проведены тестовые расчёты, показывающие, что с увеличением количества шагов, погрешность аппроксимации убывает.

Наряду с аппроксимацией первой производной по двум точкам, рассмотрена аппроксимация по трём точкам, что позволяет получить порядок аппроксимации

$O(\tau + h^2)$, и увеличить точность результатов тестовых расчётов.



АНАЛИЗ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Хайбуллина Г.Б.

научный руководитель канд. физ.- мат. наук, доц. Галиаскарова Г.Р.
Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

В современной экономике все большую роль в развитии предприятий играют реальные инвестиции. В Российской Федерации на данном этапе развития им также отдается предпочтение, как наиболее эффективному средству развития производства. Поскольку любая инвестиция не что иное, как надежда на получение дохода в будущем и предполагает долгосрочное вложение капитала, то данный вид деятельности неразрывно связан с понятием риска в условиях нестабильности рынка.

Для того чтобы исследовать проектный риск, необходимо надлежащим образом описать возникающую в связи с проектом неопределенность в части будущего финансового состояния проекта, как в части выручки, так и в части перспективных затрат. Для задания этой неопределенности возможно применение подхода с использованием нечетко-множественных описаний.

Нечеткие множества - это инструмент расчета возможностей. Умея грамотно описать нечеткость исходных данных, возможно логическим путем переходить к нечеткости результирующих показателей. Оценка инвестиционного риска - это оценка меры возможности неблагоприятных событий в ходе инвестиционного процесса, когда ожидаемость таких событий, задаваемая функцией принадлежности соответствующих нечетких чисел, известна или определяется специальными методами.

В данной работе с использованием нечетких множеств была проведена оценка риска инвестиционного проекта на примере Общества с ограниченной ответственностью «Кирпичный завод».

Предполагается внедрение инвестиционного проекта со следующими показателями:

- проект будет осуществляться в течение пяти лет, $N = 5$;
- размер стартовых инвестиций известен точно и составляет $I = 10$ млн. рублей;
- ставка дисконтирования r может колебаться в пределах от 10% до 15% годовых;
- чистый денежный поток планируется в диапазоне от $\Delta V_{min} = -15$ до $\Delta V_{max} = 35$ млн. рублей;
- остаточная (ликвидационная) стоимость проекта равна нулю ($C = 0$).

На первоначальном этапе был проведен анализ финансовой устойчивости рассматриваемого предприятия с использованием общепринятых финансовых коэффициентов на основе данных бухгалтерского баланса предприятия. Данный анализ показал сбалансированность финансовых потоков предприятия, наличие средств, позволяющих Обществу поддерживать свою деятельность в течение определенного периода времени, в том числе обслуживая полученные кредиты и производя продукцию. В целом финансовое состояние предприятия признано устойчивым, что позволяет ему осуществлять реализацию инвестиционного проекта.

Основным этапом в оценке эффективности инвестиционного проекта являлся расчет показателя эффективности будущих инвестиций, а именно показателя чистой современной стоимости инвестиций NPV . Под эффективными инвестициями



понимается такое множество состояний инвестиционного процесса, когда реальная чистая современная ценность проекта больше нуля.

При определении данного показателя исходные нечеткие данные проекта были заданы двумя способами – в виде треугольных и трапециевидных чисел. Рассчитанный показатель NPV показал эффективность рассматриваемого инвестиционного проекта, так как полученное значение ожидаемого денежного дохода превысило значение нуля. В ходе реализации инвестиционного проекта предприятием «Кирпичный завод» предполагается получение прибыли в размере 19,05 млн. рублей при представлении исходных нечетких данных в виде треугольных чисел. Возможен пессимистический сценарий развития проекта, при котором предприятие может понести убытки в размере 1,58 млн. рублей.

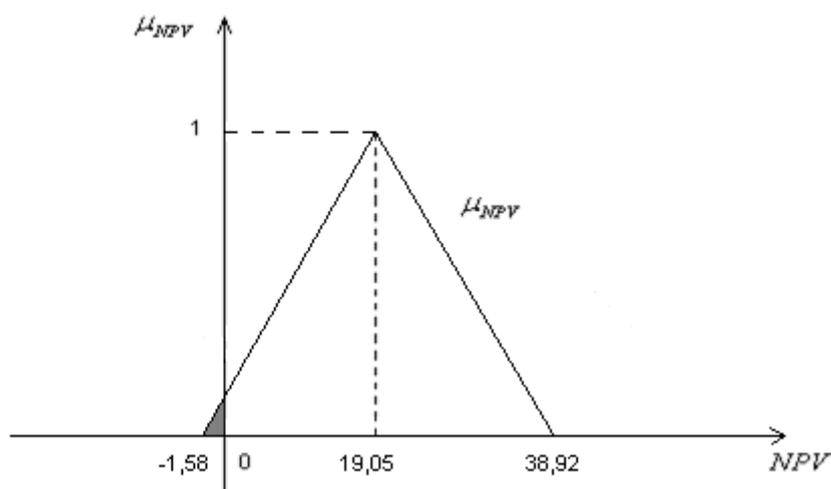


Рис. 1. Представление чистого денежного дохода в виде треугольного числа

Также проводилась оценка эффективности проекта с исходными данными, заданными как нечеткие трапециевидные числа. При этом было установлено, что при реализации рассмотренного инвестиционного проекта кирпичный завод получит денежный доход в интервале от 15,49 до 23,87 млн. рублей. Максимальный доход, который может быть получен предприятием с данного проекта, составляет 38,92 млн. рублей.

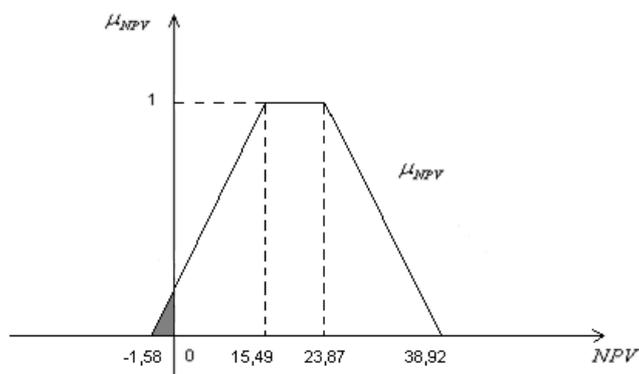


Рис. 2. Представление чистой текущей стоимости проекта в виде трапециевидного числа

Кроме того с целью повышения эффективности инвестиционной стратегии производился расчет показателя риска проекта на базе исследования треугольной формы показателя *NPV*. Риск того, что данный инвестиционный проект не окупится в течение пяти лет, составил 0,0015 при максимально возможном значении 1.

Следовательно, руководству Общества с ограниченной ответственностью «Кирпичный завод» следует принять данный инвестиционный проект без ограничений, так как вложение инвестиций в данный проект обеспечивает гарантированное получение прибыли.

Таким образом, метод нечетко-множественной оценки риска инвестиционного проекта сделал возможным представление ожидаемой эффективности проекта не точечным показателем, а полем интервальных значений со своим распределением ожиданий, характеризующимся функцией принадлежности соответствующего нечеткого числа, а взвешенная полная совокупность ожиданий позволила оценить интегральную меру ожидания негативных результатов инвестиционного процесса, т.е. степень инвестиционного риска.



УЧЕТ ДЖОУЛЕВА НАГРЕВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НАНОКАНАЛАХ

Н. Ю. Хасматулина, Г. С. Ганченко

научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор Демёхин Е. А.

Кубанский государственный университет

Введение

В последние десятилетия проблемы электрокинетики привлекают к себе всё большее внимание в связи с быстрым развитием микро- и нанотехнологий. Важной характеристикой задач электрокинетики является вольт-амперная характеристика (зависимость тока I от напряжения ΔV). Известно, что линейная при малых ΔV (закон Ома) ВАХ при некотором значении ΔV выходит на константу и не меняется на промежутке значений ΔV (предельный режим). Экспериментально обнаружено, что при достаточно больших разностях потенциалов зависимость электрического тока от напряжения вновь становится линейной. Этот режим называется режимом сверхпредельных токов. Физическое объяснение такому явлению в 2000 г. дали Зальцман и Рубинштейн [1], описав новый вид неустойчивости (электрокинетическая). Экспериментальное подтверждение неустойчивости, возникающей при увеличении разности потенциалов между мембранами, было получено в работе [2]. Однако все существующие на данный момент теоретические [1] и численные исследования (например, [3,4]) электрокинетической неустойчивости, согласуясь с экспериментами по качеству, количественно значительно отличаются от них. Так, переход к сверхпредельным токам в экспериментах происходит при существенно меньших разностях потенциалов, чем предсказывает теория и чем показывают численные эксперименты, что говорит о необходимости внесения корректировок в математическую модель, описывающую явление электрокинетической неустойчивости. В настоящей работе предпринята попытка оценить влияние эффекта джоулева нагрева электролита при прохождении сквозь него электрического тока. Исходя из асимптотических предположений, в работе найдено и исследовано на устойчивость одномерное решение этой системы.

Постановка задачи.

Рассматривается поведение симметричного бинарного электролита, ограниченного ионоселективными мембранами ($y = 0, y = 1$) с разностью потенциалов между поверхностями мембран, равной ΔV (рис. 1) Учитывается джоулев нагрев, вызванный прохождением электрического тока через электролит. $\{x, y\}$ – координаты, ось x направлена вдоль мембраны, ось y – по нормали к ней.

Безразмерная постановка задачи имеет вид

$$c^{\pm} + \mathbf{u} \cdot \nabla c^{\pm} = \pm \nabla \cdot (c^{\pm} \nabla \Phi) + \Delta c^{\pm}, (1)$$

$$v^2 \Delta \Phi = -\rho, (2)$$

$$\nabla^4 \Psi = \frac{\kappa}{v^2} \left[(\rho \Phi'_x)'_y - (\rho \Phi'_y)'_x \right] + Ra T'_x. (3)$$

$$Le (\tilde{T} + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla^2 T - Bi I \cdot \nabla \Phi, (4)$$

$$\text{где } I = -K \nabla \Phi - \nabla \rho, \quad K = c^+ + c^-, \quad \rho = c^+ - c^-,$$

краевые условия сводятся к следующим

$$y = 0: c^+ = p, \quad -c^- \Phi'_y + c^{-'}_y = 0, \quad \Phi = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad -T'_y + Bi T = 0; (5)$$

$$y = 1: c^+ = p, \quad c^- \Phi'_y - c^{-'}_y = 0, \quad \Phi = \Delta V, \quad \mathbf{u} = 0, \quad T'_y + Bi T = 0; (6)$$

$$\text{где } T = (\tilde{T} - \tilde{T}_0) / \tilde{T}_{ch}.$$



Здесь \mathbf{u} – вектор скорости жидкости, Φ – термический потенциал, T – температура, c^\pm – концентрация анионов и катионов, Ψ – функция тока, \mathbf{I} – электрический ток. Точка над переменной означает производную по времени. \tilde{T}_{ch} – характерная температура, \tilde{T}_0 – температура окружающей среды. Знак тильды означает, что переменная размерная. Характерный электрический ток в случае мембран, пропускающих только катионы, имеет вид $j = c^+ \Phi'_y + c^{+'}_y$ для $y = 0$.

Задача описывается восемью безразмерными параметрами: ν – безразмерная длина Дебая, κ – коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи (зависит только от физических свойств электролита), ΔV – разность потенциалов между мембранами, Ra – число Рэлея, Bi – число Био, Le – число Льюиса, p – концентрация на поверхностях мембран.

Рис. 1. Схематическое изображение установки. Зона пространственного заряда включает в себя тонкий двойной ионный дебаевский слой, который присутствует и у противоположной границы. Ориентация вектора ускорения свободного падения относительно оси ординат зависит от знака числа Рэлея.

Из анализа значений размерных величин следует, что физически обоснованными являются следующие значения определяющих параметров: $\nu = 10^{-6} - 10^{-2}$, $\kappa = 0.05 - 0.5$, $Ra = 10^{-6} - 100$, остальные параметры могут быть зафиксированы: $p = 5$, $\gamma = 10^{-2}$, $Bi = 10^{-2}$, $Le = 0.013$ (для воды)

Одномерное стационарное решение.

Предположим, что решение зависит только от вертикальной координаты y , тогда стационарное решение задачи может быть найдено из следующей системы

$$\rho E + K' = j, \quad KE + \rho' = j, \quad \nu^2 E' = -\rho, \quad T'' + BiEj = 0, \quad (7)$$

$$y = 0: \quad c^+ = p, \quad \Phi = 0, \quad -T' + BiT = 0; \quad (8)$$

$$y = 1: \quad c^+ = p, \quad \Phi = \Delta V, \quad T' + BiT = 0, \quad (9)$$

где $()' = ()'_y$, $E = \Phi'$, $j = -\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_y$. Заметим, что в одномерном случае электростатическая часть задачи расцеплена с гидродинамической и может быть решена отдельно. Кроме того, $u = v = 0$ и не зависит от параметра Ra . Однако отдельно электростатическая часть задачи в двойном ионном слое уже была решена Рубинштейном [1], исходя из предположения асимптотической малости числа Дебая ($\nu \rightarrow 0$):

$$E = \nu^{-1} \sqrt{2j(y_m - y)} \quad \text{при } 0 < y < y_m, \quad \nu\Phi = \frac{2\sqrt{2}}{3j} (jy_m)^{3/2} - \frac{(2jy_m - 2jy)^{3/2}}{3j} \quad (10)$$

$$\rho = -\nu^2 E' = \frac{\nu\sqrt{j}}{\sqrt{2(y_m - y)}} \quad (11)$$

Вблизи ионоселективной поверхности $y = 0$ формируется двойной ионный слой, однако в неравновесном случае его влияние асимптотически мало. Длина ионного слоя y_m дается выражением $y_m = \frac{\frac{1}{9\sqrt{3}} \nu^{\frac{2}{3}} \Delta V^{\frac{2}{3}}}{2j^{\frac{1}{3}}} = O\left(\nu^{\frac{2}{3}} (\log \nu)^{\frac{2}{3}}\right) \ll 1$

Температура в зоне пространственного заряда находится непосредственно из уравнения теплопроводности в (7) и краевого условия на температуру в (8)



$$T = j\Delta V Bi \left[\frac{1 + \frac{2}{5}y_m}{2 + Bi} \left(1 - y + \frac{1}{Bi} \right) - \frac{2(y_m - y)^{5/2}}{5 y_m^{3/2}} \right] \quad (12)$$

Полагая $Bi \rightarrow 0$, можем выписать разложение температуры по степеням Bi . Первые два члена этого разложения представлены ниже

$$T_1 = \frac{j\Delta V}{2} \left(1 + \frac{2}{5}y_m \right), \quad T_2 = j\Delta V \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{5}y_m \right) (2y - 1) + \frac{2(y_m - y)^{5/2}}{5 y_m^{3/2}} \right] \quad (13)$$

В электронейтральной области решение имеет вид

$$E = 0, \quad \rho = 0, \quad \Phi = \frac{(2jy_m)^2}{3jv} \quad \text{при } y_m < y < 1 \quad (14)$$

Из первых двух уравнений в (7) и краевого условия $K|_{y=y_m} = 0$ выводим $K = j(y - y_m)$. Используя закон сохранения $\int_{y_m}^1 K dy = 2$, получаем $j = 4 + O(y_m)$.

Температура в электронейтральной области $y_m < y < 1$ находится интегрированием уравнения теплопроводности в (7) с использованием краевого условия на температуру в (19) так, чтобы удовлетворить условию непрерывной дифференцируемости температуры в $y = y_m$

$$T = Bi \frac{j\Delta V}{2 + Bi} \left(1 + \frac{2}{5}y_m \right) \left(1 - y + \frac{1}{Bi} \right) \quad (15)$$

Первые два члена разложения температуры в электронейтральной области по степеням Bi имеют вид

$$T_1 = \frac{j\Delta V}{2} \left(1 + \frac{2}{5}y_m \right) \approx \frac{j\Delta V}{2}, \quad T_2 = \frac{j\Delta V}{4} \left(1 + \frac{2}{5}y_m \right) (2y - 1) \approx \frac{j\Delta V}{4} (2y - 1). \quad (16)$$

Чтобы решать уравнение теплопроводности в электронейтральной области, требуется дополнительное краевое условие. Такое условие легко получить, используя одномерное решение (15) и полагая $y_m \ll 1$:

$$-T'_m + Bi T_m = j Bi \Delta V. \quad (17)$$

Правая часть этого соотношения является источником термической неустойчивости.

Исследование на устойчивость одномерного стационарного решения в электронейтральной области.

В электронейтральной диффузионной зоне $y_m < y < 1$ система (7), (9) вместе с краевыми условиями на границе зоны пространственного заряда, выглядит следующим образом:

$$\nabla^4 \Psi = Ra T'_x; \quad y = y_m: \Psi = 0, \quad \Psi'_y = U_m; \quad y = 1: \Psi = 0, \quad \Psi'_y = 0 \quad (18)$$

$$\dot{K} + \mathbf{u} \cdot \nabla K = \nabla^2 K; \quad y = y_m: K = 0; \quad y = 1: \int_{y_m}^1 K dy = 2 \quad (19)$$

$$\nabla^2 T = 0; \quad y = y_m: -T'_y + Bi T = j Bi \Delta V, \quad y = 1: T'_y + Bi T = 0. \quad (20)$$

Чтобы исследовать устойчивость одномерного решения, наложим на него малые периодические возмущения вида $f = f_0(y) + \hat{f}(y) \exp(ikx + \lambda t)$, $\hat{f} \rightarrow 0$, где k – волновое число, λ – показатель роста. Подставляя «возмущенное» решение в систему (18) - (20) и линеаризуя её, приходим к интегрируемой системе ОДУ

$$\lambda \hat{K} + \hat{K}'_y \hat{V} = \hat{K}''_y - k^2 \hat{K}, \quad \hat{T}''_y - k^2 \hat{T} = 0, \quad \hat{V}''_y - 2k^2 \hat{V}''_y + k^4 \hat{V} = k^2 Ra \hat{T}, \quad (21)$$

$$y = y_m: \quad \hat{K} = 0, \quad -\hat{T}'_y + Bi \hat{T} = \Delta V Bi j, \quad \hat{V} = 0, \quad \hat{V}'_y = -\frac{k^2 \kappa}{8j} \Delta V^2 \hat{j}, \quad (22)$$

$$y = 1: \quad \hat{K} = 0, \quad \hat{T}'_y + Bi \hat{T} = \Delta V Bi j, \quad \hat{V} = \hat{V}'_y = 0, \quad (23)$$

где $\hat{j} = \hat{K}'_y(y = y_m)$, $\hat{V} = -ik\hat{\Psi}$ – вертикальная компонента скорости.

Полагая $\lambda = 0$, находим решение системы, затем, ограничиваясь первыми членами разложения по степеням Bi , получаем выражение, задающее кривую нейтральной устойчивости



$$1 = \frac{\kappa}{8} \Delta V^2 \frac{k^3 \cosh k - \sinh^3 k}{4 \sinh k (k^2 - \sinh^2 k)} - Ra \frac{\Delta V}{8} Bi \frac{k^2 (\sinh k - k \cosh k)^2 - (k^2 - \sinh^2 k)^2}{k^4 \sinh^2 k (k^2 - \sinh^2 k)}. \quad (24)$$

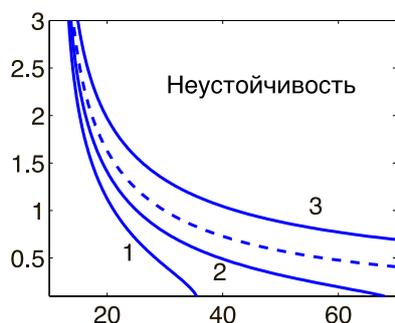


Рис. 2 Кривые нейтральной устойчивости, заданные уравнением (24) (зависимость волнового числа k от разности потенциалов ΔV) для $\kappa = 0.2$, 1: $Ra = -1000$, 2: $Ra = -500$, 3: $Ra = 500$, пунктирная линия: $Ra = 0$

При $Ra = 0$ формула превращается в известную формулу Зальцмана-Рубинштена [1]. Второе слагаемое в правой части соотношения (24), пропорционально Ra и отвечает за проявление термических эффектов. Анализ формулы (24) показывает, что система стабилизируется термическими эффектами при $Ra > 0$ и дестабилизируется при $Ra < 0$ (рис. 2). Изменения знака числа Рэлея есть не что иное, как поворот системы на 180° относительно направления силы тяжести.

Закключение

В данной работе, исходя из асимптотических предположений, найдено и исследовано на устойчивость одномерное решение системы Нернста-Планка-Пуассона-Стокса в совокупности с уравнением теплопроводности для температуры. Основным результатом являются кривые нейтральной устойчивости, анализ которых показывает, что при расположении катода сверху (случай, реализованный в экспериментах) термические эффекты оказывают дестабилизирующее действие на систему.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 14-08-00789-а

Список литературы

- [2] Rubinstein I., Zaltzman B. Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Phys. Rev. E. 2000. V. 62, P. 2238.
- [3] Rubinstein S. M., Manukyan G., Staicu A., Rubinstein I., Zaltzman B., Lammertink R. G. H., Mugele F., and Wessling M., Direct observation of nonequilibrium electro-osmotic instability // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101, 236101
- [5] Шелистов В.С., Никитин Н.В., Ганченко Г.С., Демёхин Е.А., Численное моделирование электрокинетической неустойчивости в полупроницаемых мембранах // Доклады РАН. 2011. Т. 440, № 5, С. 625.
- [6] Кирий В.А., Хасматулина Н.Ю., Демёхин Е.А. Численное нахождение границы предельных и сверхпредельных токов в полупроводящей электрической мембране // Экологический вестник научных центров ЧЭС2014, №3, С. 31.



ОБРАБОТКА ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЫ ПЛАСТА

Хусаинова Г.Я.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

При долгой эксплуатации газонефтяных скважин происходит засорение призабойной зоны пласта за счет отложения твердой фазы (например, парафина, асфальто-смолистых веществ, и т.д.). В результате это приводит к снижению дебита скважин. К числу высокоэффективных способов очистки призабойных зон относятся технологии с использованием энергии взрыва. Высокотемпературные продукты взрыва, проникая достаточно глубоко в пористые породы, приводят к ее очистке. Они могут привести к плавлению парафина и битумных отложений, что в свою очередь усиливает эффективность этих процессов.

Кроме того, информация, полученная при взрыве, может быть использована для контроля прискважинной зоны. В частности, по времени релаксации давления в скважине, можно оценить коллекторские параметры пласта. Необходимые оценки для проведения технологических расчетов можно получить на основе решений плоско-одномерной, радиально-симметричной и сферической задач. В частности, если радиально-симметричная постановка позволяет проанализировать очищение пористой среды вокруг скважины, то плоско-одномерная задача дает возможность проследить эти процессы в трещинах.

Основные уравнения. Пусть в исходном состоянии ($t < 0$) давление газа во всем пористом пласте вокруг полости постоянно и равно p_0 , а сама полость (трещина, цилиндрическая или сферическая области) заполнена взрывчатым веществом. В момент времени $t = 0$ происходит взрыв и полость заполняется продуктами взрыва, давление в ней достигает до значения p_e . Далее, за счет фильтрации продуктов взрыва давление в полости будет релаксировать до p_0 .

При описании этой задачи примем следующие допущения: пористый скелет считаем несжимаемым и однородным; пластовое давление газового месторождения небольшим и в уравнении движения используем линеаризованную функцию Лейбензона; значения коэффициентов вязкости, плотности газа не зависят от температуры и давления.

В рамках вышеизложенных допущений для нестационарного течения запишем закон сохранения массы, линейное уравнение пьезопроводности и закон Дарси для продуктов взрыва в пористой и проницаемой породе вокруг этой полости в виде [1]:

$$\frac{d}{dt} \left((\pi a)^n a \rho \right) = - (2\pi a)^n \rho v \Big|_{r=a}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \chi \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} r^n \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad v' = - \frac{k}{\mu_g} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь p' , v' - распределение давления и скорости вокруг полости; χ - коэффициент пьезопроводности, $\chi = \frac{kp_0}{\mu_g m}$; m, k - коэффициенты пористости, про-



нищаемости; ρ , μ_g - плотность, вязкость газа; a - радиус полости; $n = 0$ и 1 соответствуют плоско-одномерной и радиально-симметричной задачам.

Для данного физического процесса определим начальные и граничные условия:

$$p' = p_0 \text{ при } t = 0, \quad r > a; \quad p' = p(t), \quad v = v' \text{ при } t > 0, \quad r = a. \quad (3)$$

Для зависимости текущей плотности и давления в полости примем уравнение состояния в виде степенного закона

$$\frac{p}{p_e} = \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^\gamma, \quad (4)$$

где γ - показатель политропы.

Плоско-одномерная задача ($n = 0$, $r = x$). Из условия (3) видно, что мы имеем задачу с переменным граничным условием. Применяя принцип Дюгамеля, решение уравнения (2) при начальном и граничном условиях (3) можно представить в виде [2]:

$$p'(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U(x-a, t-\tau)}{\partial t} (p(\tau) - p_0) d\tau, \quad (5)$$

$$\text{где } U(x-a, t-\tau) = 1 - \Phi\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\chi(t-\tau)}}\right), \quad \Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\mu^2} d\mu.$$

С учетом (4) и (2) на основе (1) получаем интегральное уравнение для давления внутри полости

$$\ln\left(\frac{p}{p_e}\right) = -\frac{k\gamma}{a\mu_g\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{p(\tau) - p_0}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (6)$$

Для дальнейшего удобно представить это интегральное уравнение в безразмерной форме, введя переменные:

$$\tilde{p} = \frac{p}{p_e}, \quad \tilde{p}_0 = \frac{p_0}{p_e}, \quad T = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{t_0}, \quad t_0 = \left(\frac{k\gamma p_e}{a\mu_g\sqrt{\pi\chi}} \right)^{-2}.$$

Получаемая при этом уравнение имеет вид:

$$\ln \tilde{p} = -\int_0^T \frac{\tilde{p}(\tilde{\tau}) - \tilde{p}_0}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}} d\tilde{\tau}. \quad (7)$$

Решение и анализ этого уравнения представляет наибольший интерес с точки зрения приложений.

Библиографический список

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидродинамика. – М.: Недра, 1993. - 416 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – М.: "Наука", 1972. - 735 с.
3. Шагапов В.Ш., Хусаинова Г.Я. Задача о закачке растворителя в пористую среду, подверженную "склерозу" // ИФЖ, 2000.-№2.
4. Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи / Под ред. П.Я. Кочиной, В.М. Ентова.-М.: Наука, 1987.-216 с.



ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ

Шебелев А.В.

научный руководитель д-р физ.-мат. наук Маркович Д.М.

Сибирский Федеральный университет

Computational Fluid Dynamics (вычислительная гидродинамика) – численное моделирование газодинамических, химических, тепловых, плазменных процессов и других задач. Результаты моделирования получаются на основе решений уравнений Навье-Стокса. *CFD* моделирование стало дополнением к эксперименту т. к. эксперименты являются более дорогими и не всегда можно провести нужное испытание. Основные достоинства моделирования: скорость, полнота информации, возможность математического моделирования реальных условий, возможность моделирования идеальных условий.

Целью данной работы являлось численное моделирование течений жидкости в тестовых задачах: «Турбулентный теплообмен импактной струи и стенки» [1,2] и «Обтекание гидрокрыла *NACA0015*» [1]

Уравнение Навье-Стокса для случая несжимаемой жидкости.

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} \bar{u}) = -\nabla p + \nabla(\tau + \tau_s) + \rho \bar{g},$$

Тензор Рейнольдсовых напряжений

$$\tau_{ij}^t = \mu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \right],$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0,$$

P – скорость генерации турбулентности

$$P = \tau_{ij}^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Уравнение энергии для несжимаемой среды

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = \nabla \left(k_{eff} \nabla T - \sum_j h_j \bar{J}_j + \overline{(\tau_{eff} u)} \right) + S_h$$

Модель $k-\varepsilon-v^2-f$

Уравнение на k – энергию турбулентных пульсаций

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla(\rho v \cdot k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + P - \rho \varepsilon,$$

Уравнение на ε – скорость диссипации энергии



$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\rho v \cdot \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k},$$

Модель замыкается выражением для турбулентной вязкости

$$\mu_t = C_\mu \frac{v^2 T}{\varepsilon},$$

Уравнение на v^2 – квадрат пульсаций скорости, перпендикулярно стенке и уравнение на функцию эллиптической релаксации

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} = kf - \varepsilon \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_k} \right]$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{C_1 - 1}{T} \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) - C_2 \frac{P}{\varepsilon}.$$

Модель $k-\varepsilon-\zeta-f$

Уравнение на k - энергию турбулентных пульсаций

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla(\rho u \cdot k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + P - \rho \varepsilon$$

Уравнение на ε - диссипацию энергии

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\rho u \cdot \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Уравнение на μ_t – турбулентную вязкость, в отличие от стандартной $k-\varepsilon$ модели турбулентности в состав турбулентной вязкости входит еще один параметр- ζ

$$\mu_t = \rho C_\mu k T \zeta$$

Уравнение на ζ – отношение квадрата пульсаций скорости к энергии турбулентных пульсаций

$$\frac{D\zeta}{Dt} = f - \frac{\zeta}{k} P + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \right]$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{T} \left(C_1 - 1 + C'_2 \frac{P}{\varepsilon} \right) \left(\zeta - \frac{2}{3} \right)$$

В программном пакете FLUENT 14.0 реализована модель турбулентности $k-\varepsilon-v^2-f$, в программном пакете Sigmaflow (код вычислительной гидродинамики, разрабатываемый кафедрой Теплофизики СФУ и красноярским филиалом Института Теплофизики СО РАН) реализована $k-\varepsilon-\zeta-f$. Сравнение производилось с моделью турбулентности $k-\omega SST$, которая имеет хорошую численную устойчивость, множество поправок, достаточно изучена.



Турбулентный теплообмен импактной струи и стенки. Данная задача выбрана в качестве тестовой по причине ее большого прикладного значения в промышленности. В данной задаче теплообмен имеет сложный характер, по причине образования турбулентного тороидального вихря.

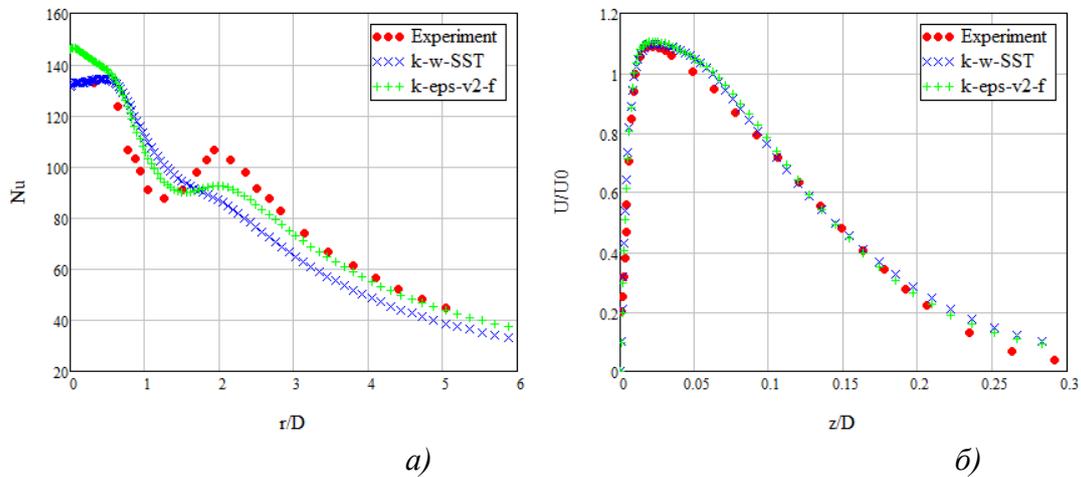


Рис.1. а) Распределение числа Нуссельта вдоль нижней стенки; б) профиль скорости в сечении $r/d=1$.

Как видно из полученных результатов на Рис.1 модель с эллиптической релаксацией показывает лучшее совпадение с результатами эксперимента, особенно в месте перегиба кривой для числа Нуссельта, как раз в этом месте и происходит присоединение турбулентного вихря к нагретой стенке. Преимущество модели турбулентности $k-\varepsilon-v^2-f$ над $k-\omega$ SST объясняется дополнительным масштабом турбулентности, который более точно описывает турбулентный теплообмен, но при этом требуется в полтора раза больше машинного времени для схождения решения задачи.

Обтекание гидрокрыла *NACA0015*. Выбор данного тестового задания обусловлен так же ее большим прикладным характером. Семейство гидрокрыл используется в направляющих аппаратах гидротурбин и самих гидротурбинах, также применение *NACA* подобных профилей нашло себе применение в судах на подводных крыльях. Вследствие этого, расчет режимов обтекания сильно влияет на конечные характеристики аппаратов.

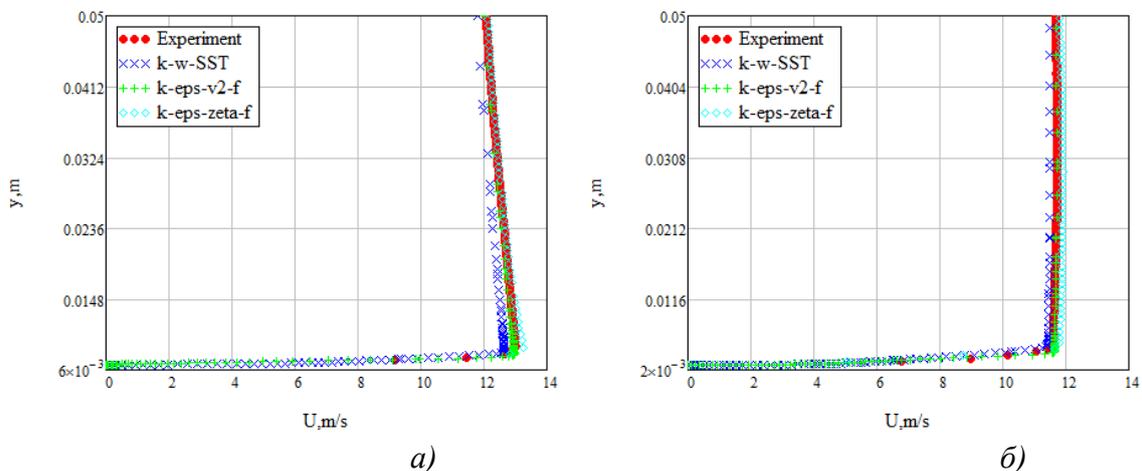


Рис.2. а) Профиль скорости в сечении $x/c=0,5$; б) профиль скорости в сечении $x/c=0,75$.

Из Рис.2 видно, модели с эллиптической релаксацией показывает немного лучшее совпадение с результатами эксперимента, однако время, требуемое для сходимости задачи значительно больше, примерно в 2 раза.

Из полученных результатов можем сделать вывод , что модели с эллиптической релаксацией имеют преимущество над другими моделями в задачах, в которых течение выходит из приближения пограничного слоя, однако при этом требуют больше машинного времени.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В МИКРОКАНАЛЕ Т-ТИПА.

Шебелева А.А., Минаков А.В.

научный руководитель доктор физ.-мат. наук Алексеенко С.В.

Сибирский федеральный университет

В данном исследовании была протестирована численная методика расчета двухфазных течений со свободной поверхностью в микроканале, которая учитывает нестационарность, трехмерность процесса, а также поверхностное натяжение.

Математическое моделирование двухкомпонентных потоков жидкость-жидкость проводилось VOF методом для Т-образного канала, по которому движутся две жидкости на встречу друг другу, с различными расходами [1-2]. Жидкость первая - вода, жидкость вторая - керосин. Для моделирования поверхностного натяжения в рамках VOF метода использовался CSF алгоритм [3]. Суть которого состоит во введении в уравнения движения дополнительной объемной силы F_s - величина, которая определяется из соотношения:

$$F_s = \sigma \cdot k \cdot \nabla F, \quad (1)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения, k - кривизна свободной поверхности, которая определяется как дивергенция вектора нормали:

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right), \quad (2)$$

Нормаль к свободной поверхности вычисляется, в свою очередь, как градиент объемной доли жидкой фазы в ячейке:

$$\mathbf{n} = \nabla F,$$

При этом на твердой стенке, величина вектора нормали определяется по краевому углу θ смачивания:

$$\mathbf{n} = n_w \cdot \cos \theta + \tau_w \cdot \sin \theta, \quad (3)$$

где n_w , τ_w - нормальный и тангенциальный к стенке вектора.

Коэффициент поверхностного натяжения на поверхности керосин-вода задавался равным 0,04875 Н/м.

Расчеты проводились для различных соотношений массовых расходов воды и керосина (таблица 1).

Таблица 1. Значение расходов.

Режим течения	Расход воды, мкл/мин	Расход керосина, мкл/мин
Параллельный	960	240
Серпантинный	4000	4000

Картина течения при заданном отношении расходов и краевом угле смачивания равном 90° приведена на рисунках 1,2. Полученные результаты сравнивались с экспериментальными данными, полученными в институте теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Поскольку точное значение краевого угла смачивания в эксперименте не было известно, расчеты были проведены для нескольких значений краевого угла смачивания.



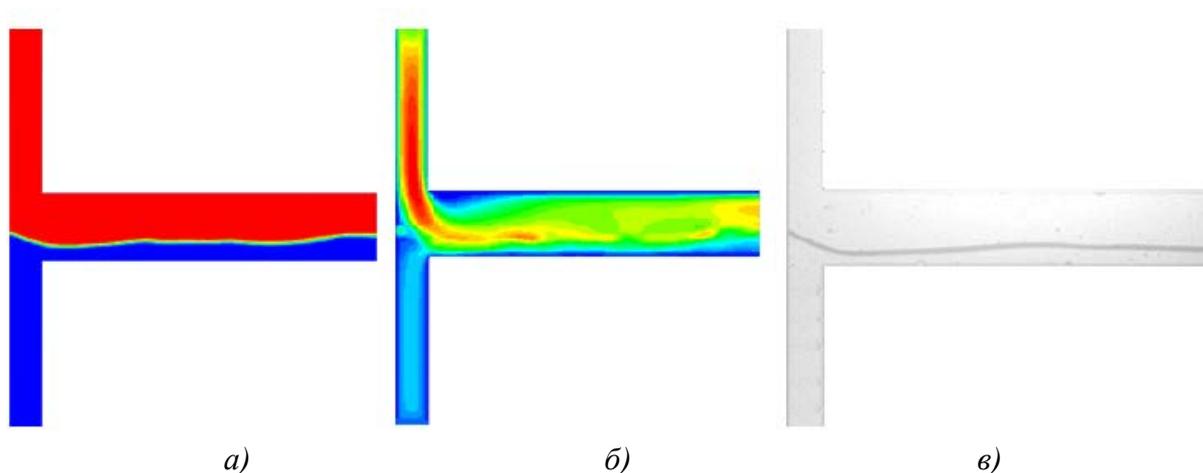


Рисунок 1. параллельный режим течения.
а) плотность; б) модуль скорости; в) эксперимент.

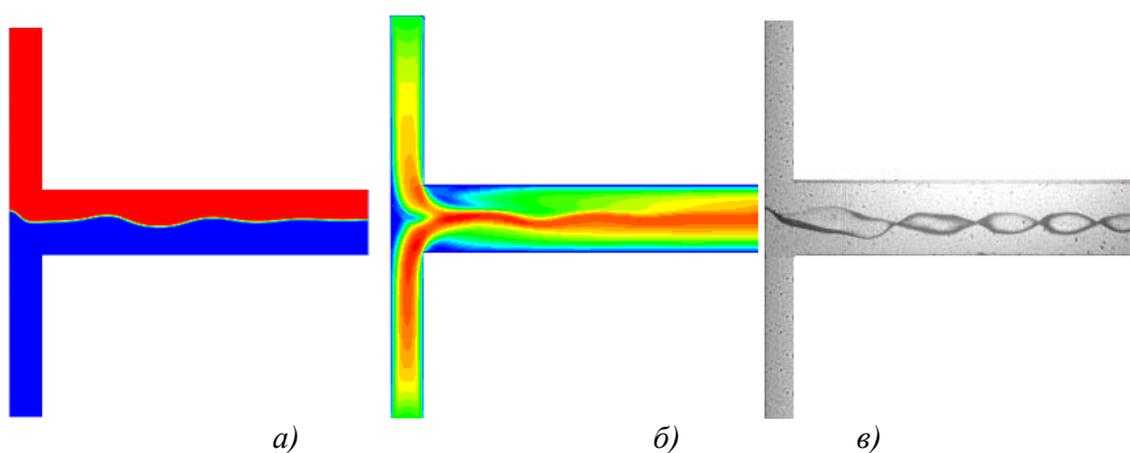


Рисунок 2. Серпантинный режим течения.
а) плотность; б) модуль скорости; в) эксперимент.

Сравнение результатов тестирования и экспериментальных данных показывает, что значение краевого угла смачивания играет ключевую роль при описании двухфазных потоков в микроканале. Поэтому при проведении расчетов необходимо внимательно следить, чтобы его значение максимально соответствовало данным рассматриваемого эксперимента. В целом, по результатам тестирования было показано, что численная методика хорошо описывает эксперимент и характер течения при угле смачивания равном 90^0 , лучше всего согласуется с экспериментальными данными.

Список литературы

1. C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. J. Comput. Phys., 39:201-225, 1981.
2. Минаков, А.В. Численный алгоритм решения пространственных задач гидродинамики с подвижными твердыми телами и свободной поверхностью. Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – № 4(36). С.-95-105.
3. J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach. A Continuum Method for Modeling Surface Tension. J. Comput. Phys., 100:335-354, 1992