СВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ В НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ

В.В. Беняш-Кривец[1], Я.А. Жуковец[2]

[1]Белорусский государственный университет, механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь benyash@bsu.by

[2]Белорусский государственный педагогический университет, математический факультет
ул. Советская 18, 220050 Минск, Беларусь st.yana@mail.ru

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$G = \langle a, b, c \mid a^{e_1} = b^{e_2} = c^{e_3} = R_1^m(a, b) = R_2^p(a, c) = R_3^q(b, c) = 1\rangle,$$

где R_1, R_2, R_3 — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a, b, c, которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2, а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q). Если для группы G выполнено одно из условий: G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса, то говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса. В [1] Файн и Розенбергер выдвинули гипотезу, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса. Ими получен ряд результатов, подверждающих эту гипотезу. В частности, доказано, что если $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 2$, то G удовлетворяет альтернативе Титса. Однако для большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной.

Теорема. *Пусть* $G = \langle a, b, c \mid a^{e_1} = b^{e_2} = c^2 = R_1^2(a, b) = R_2^2(a, c) = R_3^2(b, c) = 1\rangle$ — *обобщенная тетраэдральная группа, для которой* $(e_1, e_2) \in \{(3, 8), (4, 8), (4, 6)\}$ *и* $R_1(a, b) = a^{u_1}b^{v_1} \dots a^{u_s}b^{v_s}$, $U = \sum_{i=1}^{s} u_i$, $V = \sum_{i=1}^{s} v_i$. *В следующих случаях* G *содержит неабелеву свободную подгруппу и, в частности, удовлетворяет альтернативе Титса:*

1) G *— группа типа* $(3, 8, 2, 2, 2, 2)$ *и выполнено одно из условий: а)* s *нечетно; б)* s *четно и либо* $U \not\equiv 0 \pmod 3$, *либо* $V \not\equiv 4 \pmod 8$;

2) G *— группа типа* $(4, 8, 2, 2, 2, 2)$ *и* $2U + V \not\equiv 4 \pmod 8$;

3) G *— группа типа* $(4, 6, 2, 2, 2, 2)$ *и выполнено одно из условий: а)* U *нечетно; б)* V *не делится на 3; в) если* $U = 2U_1$ *и* $V = 3V_1$, *то* $U_1 + V_1$ *четно*

Литература

1. *Fine B., Rosenberger G.* Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.