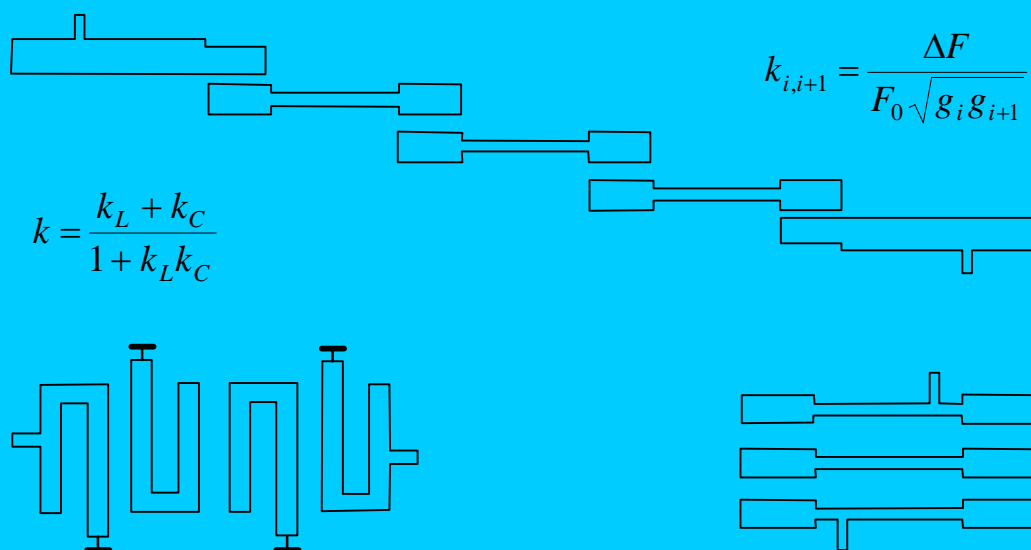


В. В. Тюрнев

ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ СВЧ



Красноярск

2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Красноярский государственный технический университет
Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН

В. В. Тюрнев

ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ СВЧ

Рекомендовано Сибирским региональным отделением УМО высших учебных заведений РФ по образованию в области радиотехники, электроники и автоматизации для межвузовского использования в качестве учебного пособия студентов, обучающихся по направлениям подготовки 552500, 654200 «Радиотехника», специальности 071500 «Радиофизика и электроника»

Красноярск 2003

УДК 621.3.029.6(07)

Т 98

Рецензенты:

кафедра радиоп физики Красноярского государственного университета (зав. кафедрой – Заслуженный деятель науки РФ, доктор физ.-мат. наук, профессор Г. А. Петраковский);

Н. Д. Малютин, доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных технологий и экологического мониторинга Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники.

Тюрнев В. В.

Т 98 Теория цепей СВЧ: Учеб. пособие // В. В. Тюрнев. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003, 194 с.

ISBN 5–7636–0506–3

Изложены теоретические основы анализа и синтеза цепей СВЧ. Подробно рассмотрены микрополосковые цепи, прямой метод синтеза фильтров СВЧ, основанный на использовании фильтров-прототипов нижних частот и эквивалентных схем, а также современная теория коэффициентов связи резонаторов.

Студентам, обучающимся по направлениям подготовки 552500 – «Радиотехника», 654200 – «Радиотехника», специальности № 071500 – «Радиофизика и электроника». Может быть полезно аспирантам и специалистам в области техники СВЧ.

УДК 621.3.029.06(07)

ISBN 5-7636-0506-3

© КГТУ, 2003

© В.В. Тюрнев, 2003

ВВЕДЕНИЕ

Диапазон сверхвысоких частот располагается между радиодиапазоном и оптическим диапазоном и охватывает частоты, которым соответствуют электромагнитные волны длиной от 1 м до 1 мм. Это частоты от 300 МГц до 300 ТГц*. За рубежом волны СВЧ называют микроволнами (англ. *microwaves*). Диапазон СВЧ делят на три поддиапазона: дециметровый, сантиметровый и миллиметровый. Иногда к диапазону СВЧ относят также метровые и субмиллиметровые волны. Поддиапазоны имеют и другие названия. Метровый поддиапазон (30–300 МГц) называют очень высокими частотами (ОВЧ), дециметровый (0.3–3 ГГц) – ультравысокими частотами (УВЧ), сантиметровый (3–30 ГГц) – сверхвысокими частотами (СВЧ), миллиметровый (30–300 ГГц) – крайневысокими частотами (КВЧ), субмиллиметровый (0.3–3 ТГц) – гипервысокими частотами (ГВЧ).

В устройствах диапазона СВЧ в полной мере проявляются волновые свойства электромагнитных колебаний. Здесь уже перестают работать уравнения электро- и магнитостатики и вытекающее из них правило Кирхгофа для замкнутого контура, используемые в теории цепей радиодиапазона, но еще не начали работать законы геометрической оптики. Это связано с тем, что схемы диапазона СВЧ содержат элементы, размеры которых могут быть соизмеримы с длиной волны. Поэтому строгое описание схем диапазона СВЧ возможно только на основе электродинамических уравнений Максвелла.

Электрические схемы радиодиапазона содержат в основном элементы с сосредоточенными параметрами (*lumped elements*), которые можно считать точечными по сравнению с длиной волны. Это могут быть конденсаторы, дроссели, резисторы, соединительные проводники и т. д. Для схем СВЧ характерно наличие элементов с распределенными параметрами (*distributed elements*). К ним относятся отрезки линий передачи, резонаторы и другие протяженные элементы. Физические свойства таких объектов обычно характеризуют величинами, отнесенными на единицу длины или на единицу площади. В диапазоне СВЧ емкость и индуктивность проводников часто нельзя рассматривать одну без другой.

* Напомним, что $1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$, $1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$, $1 \text{ ТГц} = 10^{12} \text{ Гц}$.

1. ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ СВЧ

1.1. Типы линий передачи

Линия передачи СВЧ есть устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток электромагнитной энергии СВЧ в заданном направлении. Линии передачи могут содержать проводники и диэлектрическое заполнение (см. рис. 1.1).

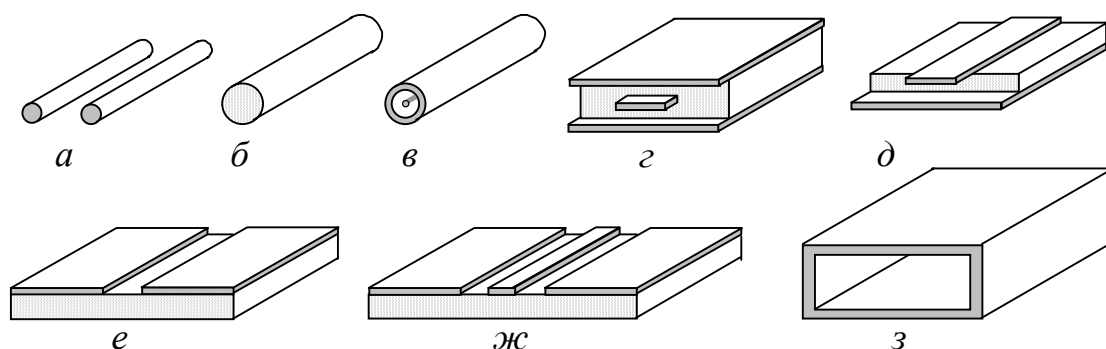


Рис. 1.1. Основные типы линий передачи:

а – двухпроводная; *б* – диэлектрическая; *в* – коаксиальная; *г* – симметричная полосковая; *д* – микрополосковая; *е* – щелевая; *ж* – копланарная; *з* – прямоугольный волновод

Порядок связности – это геометрическая характеристика поперечного сечения линии передачи, определяемая числом проводящих поверхностей. В зависимости от количества проводящих поверхностей, линии передачи подразделяют на односвязные линии, двухсвязные, трехсвязные и многосвязные. Линии нулевой связности не имеют проводящих поверхностей. Их называют диэлектрическими линиями передачи.

Регулярная линия передачи – это линия, у которой в продольном направлении неизменны поперечное сечение и электромагнитные свойства заполняющих сред. Если у линии передачи отсутствует хотя бы одно из условий регулярности, то такая линия называется нерегулярной.

Однородной линией передачи называют линию, заполненную однородной средой, то есть средой с неизменными электромагнитными свойствами в каждой точке объема, которой она заполняет. Наоборот, неоднородная линия передачи – это линия, заполненная неоднородной средой, то есть средой, в которой существуют две или более области, имеющие разные электромагнитные свойства. Линию передачи без диэлектрического заполнения называют воздушной.

Линия передачи может быть как открытой, так и экранированной. В открытой линии передачи электромагнитное поле волны находится не только внутри линии, но и вблизи нее. В экранированной линии выходу электромагнитного поля за ее пределы препятствует металлический экран.

1.2. Общие сведения о волнах в линиях передачи

В любой линии передачи можно возбуждать различные типы гармонических волн, отличающиеся структурой электромагнитного поля в поперечном сечении. Бегущей волной называют электромагнитную волну определенного типа, распространяющуюся в линии передачи только в одном направлении.

Для каждой из бегущих волн существует своя критическая частота ω_{cr} , ниже которой она распространяться не может, а лишь локализуется вблизи своего источника. Критическую частоту ω_{cr} называют еще частотой отсечки. Электромагнитная волна, имеющая наименьшую критическую частоту в данной линии передачи, называется волной основного типа или основной волной. Волной высшего типа называют волну, критическая частота которой выше критической частоты основной волны. Диапазон частот, в котором возможно распространение волн основного типа без распространения волн высших типов называют основным диапазоном частот линии передачи.

Важнейшим параметром любой бегущей гармонической волны является волновое число k_z , описывающее зависимость напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} электромагнитного поля от продольной координаты z линии передачи:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{ik_z z - i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{ik_z z - i\omega t}. \quad (1.1)$$

Волновое число k_z также называют постоянной распространения. В общем случае k_z – комплексная функция частоты ω , то есть $k_z(\omega) = k_z' + ik_z''$, где k_z' и k_z'' – вещественные функции частоты. Величину k_z' называют коэффициентом фазы, а величину k_z'' – коэффициентом затухания. В отсутствие поглощения энергии, то есть при вещественной диэлектрической и магнитной проницаемости заполняющей среды, мнимая часть волнового числа $k_z'' = 0$, если частота волны $\omega > \omega_{cr}$, и $k_z'' > 0$, если $\omega < \omega_{cr}$. Вместо

волнового числа k_z часто используют коэффициент распространения γ , определяемый формулой $\gamma = ik_z$.

Фазовая скорость гармонической волны связана с вещественной частью волнового числа соотношением*

$$v = \omega / k'_z. \quad (1.2)$$

В общем случае фазовая скорость волны в линии передачи является функцией частоты. Свойство линии передачи, характеризующее изменение фазовой скорости v в зависимости от частоты ω , называют дисперсией линии передачи.

Скорость передачи сигналов в линии передачи называют групповой скоростью v_g . Эта скорость может отличаться от фазовой скорости v , если линия обладает дисперсией. Групповая скорость связана с волновым числом k' формулой

$$v_g = d\omega / dk'_z. \quad (1.3)$$

Падающей волной называют бегущую волну, распространяющуюся от выбранного начального сечения вдоль направления распространения. Отраженной волной называют бегущую волну, вызванную отражением от нерегулярности в линии передачи и распространяющуюся в направлении обратном падающей волне. Стоячей волной называют периодическое изменение амплитуды напряженности электрического и магнитного полей вдоль линии передачи, вызванное интерференцией падающей и отраженной волн.

Одной из характеристик электромагнитного поля бегущей волны является характеристическое сопротивление. Им называют отношение

$$Z_c = E_\tau / H_\tau, \quad (1.4)$$

где E_τ и H_τ – поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного поля бегущей волны. Эту величину не следует путать с волновым сопротивлением**.

* Жирным шрифтом выделены номера формул, которые рекомендуется запомнить.

** По-английски *волновое сопротивление* есть *characteristic impedance*.

Волновое сопротивление линии передачи есть отношение

$$Z = U_{\text{пад}} / I_{\text{пад}}, \quad (1.5)$$

где $U_{\text{пад}}$ и $I_{\text{пад}}$ – напряжение и ток падающей волны. Его не следует путать и с входным сопротивлением линии передачи.

Входное сопротивление линии передачи есть отношение

$$Z(z) = U(z) / I(z), \quad (1.6)$$

где $U(z)$ и $I(z)$ – комплексные амплитуды напряжения и тока в сечении линии передачи, заданном координатой z . Очевидно, что входное сопротивление будет совпадать с волновым сопротивлением только при отсутствии отраженной волны.

1.3. Общие уравнения для электромагнитных волн

Получим ряд общих уравнений для электромагнитных волн в произвольной линии передачи и на их основе установим некоторые свойства этих волн. Будем исходить из уравнений Максвелла для участка линии передачи, заполненного материалом с относительной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon}_r$, относительной магнитной проницаемостью μ_r и проводимостью σ . Для простоты будем считать материал изотропным. Тогда $\tilde{\epsilon}_r$, μ_r и σ будут не тензорными, а скалярными величинами. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (1.7)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}, \quad (1.8)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.9)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.10)$$

где индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} связаны с напряженностями \mathbf{E} и \mathbf{H} уравнениями

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.12)$$

а ток проводимости \mathbf{j} связан с σ уравнением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.13)$$

Здесь ε_0 и μ_0 – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства.

Будем рассматривать гармонические колебания электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y, z)e^{-i\omega t}. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.7)–(1.8) и используя комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon_r = \tilde{\varepsilon}_r + i\sigma/(\varepsilon_0\omega), \quad (1.15)$$

получаем

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H}, \quad (1.16)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}. \quad (1.17)$$

Вычислим ротор от левой и правой части уравнения (1.16), а затем подставим в него равенство (1.17). Используя общее тождество

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F} \quad (1.18)$$

для произвольного вектора \mathbf{F} , получаем

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = k^2\mathbf{E}. \quad (1.19)$$

где

$$k = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} k_0, \quad (1.20)$$

$$k_0 = \omega/c \quad (1.21)$$

– волновое число электромагнитной волны в свободном пространстве; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света. С учетом равенства (1.17) и тождества

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0 \quad (1.22)$$

уравнение (1.19) принимает вид уравнения Гельмгольца

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0. \quad (1.23)$$

Аналогичным образом можно получить уравнение

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, электрическая и магнитная составляющие гармонических электромагнитных колебаний удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

Далее будем рассматривать гармонические колебания, являющиеся волной с волновым числом k_z , бегущей вдоль оси z . Учитывая (1.1), запишем уравнения (1.16) и (1.17) покомпонентно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y &= i\omega\mu_0\mu_r H_x, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - ik_z H_y &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x, \\ ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega\mu_0\mu_r H_y, & ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mu_r H_z, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Выразим поперечные составляющие бегущей волны через две продольные. Для этого в первом уравнении левого столбца исключим составляющую E_y с помощью второго уравнения правого столбца:

$$i(k^2 - k_z^2) H_x = \varepsilon_0\varepsilon_r\omega \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (1.26)$$

Аналогичным образом получаем выражения для остальных поперечных компонент

$$i(k^2 - k_z^2) H_y = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial x} - k_z \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (1.27)$$

$$i(k^2 - k_z^2) E_y = -k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu_0\mu_r \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (1.28)$$

$$i(k^2 - k_z^2) E_x = -k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - \omega\mu_0\mu_r \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (1.29)$$

Таким образом, поперечные составляющие электрического и магнитного поля бегущей волны всегда можно выразить через продольные составляющие. Сами же продольные составляющие с точностью до неопределенных коэффициентов могут быть получены независимо одна от другой решением уравнений (1.23) и (1.24). При этом значение одного из неопределенных коэффициентов можно задать произвольно, а значения остальных — найти из электродинамических граничных условий.

На границе двух сред, ни одна из которых не является идеальным проводником ($\sigma \neq \infty$), электродинамические граничные условия определяются уравнениями

$$\varepsilon_r^{(1)} E_n^{(1)} - \varepsilon_r^{(2)} E_n^{(2)} = 0, \quad (1.30)$$

$$\mu_r^{(1)} H_n^{(1)} - \mu_r^{(2)} H_n^{(2)} = 0, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{E}_t^{(1)} - \mathbf{E}_t^{(2)} = 0, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)} = 0. \quad (1.33)$$

Здесь верхние индексы, взятые в скобки, указывают номер среды. Нижние индексы n и t указывают на нормальные и тангенциальные составляющие векторов. Нормаль \mathbf{n} направлена из среды 1 в среду 2. Очевидно, что в регулярной линии передачи нормаль \mathbf{n} всегда перпендикулярна оси z .

В случае когда среда 2 является идеальным проводником ($\sigma = \infty$), то электромагнитное поле внутри нее отсутствует, а на ее поверхности появляются поверхностные заряды ρ_s и течет поверхностный ток \mathbf{J} . При этом уравнения (1.30)–(1.33) принимают вид

$$\tilde{\varepsilon}_r \varepsilon_0 E_n = -\rho_s, \quad (1.34)$$

$$H_n = 0, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{H}_t \times \mathbf{n} = \mathbf{J}, \quad (1.37)$$

где нормаль \mathbf{n} направлена в глубь идеального проводника.

Таким образом, электродинамические граничные условия состоят из шести скалярных равенств, то есть по одному равенству для каждой составляющей поля. Однако только четыре равенства из шести являются независимыми, если эти равенства налагаются на функции, являющиеся решениями уравнений Максвелла. Обычно накладывают граничные условия на все четыре тангенциальные составляющие электромагнитного поля.

Вернемся к формулам (1.26)–(1.29). Из них видно, что волны в линиях передачи в зависимости от наличия или отсутствия у них продольных составляющих E_z и H_z можно разделить на четыре типа. Сразу оговоримся, что из одного из них можно выделить пятый тип. Рассмотрим каждый из пяти типов волн.

1.4. Поперечная электромагнитная волна

Поперечной электромагнитной волной называют волну, векторы напряженности электрического и магнитного полей которой лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Кратко обозначают эту волну как Т-волна или ТЕМ-волна. Из формулы (1.37) следует, что у Т-волны отсутствуют поперечные токи на проводниках. Поперечная электромагнитная волна является единственной электромагнитной волной, которая может распространяться в свободном пространстве.

Из формул (1.26)–(1.29) видно, что Т-волна имеет волновое число

$$k_z = k, \quad (1.38)$$

где k определяется формулой (1.20). В отсутствие поглощения энергии СВЧ волновое число k_z вещественно на любой частоте ω . Следовательно, Т-волна имеет критическую частоту $\omega_{cr} = 0$. Поэтому Т-волна всегда является волной основного типа, если только она существует.

Подставляя (1.38) в (1.2), находим фазовую скорость поперечной электромагнитной волны

$$v = c / \operatorname{Re} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (1.39)$$

Из формулы (1.39), во-первых, видно, что Т-волна не обладает дисперсией. Во-вторых, из нее следует, что в неоднородных линиях передачи Т-волна распространяться не может. Действительно, в противном случае такая волна имела бы различные фазовые скорости на участках линии, заполненных различными материалами. Но это будет уже не одна, а несколько волн.

Поперечные электромагнитные волны могут распространяться только в тех однородных линиях передачи, порядок связности которых не ниже двух, например в коаксиальной линии, в полосковых линиях и в воздушных двух-, трех- и многопроводных линиях. При этом число различных Т-волн равно $n-1$, где n – порядок связности линии передачи. Очевидно, что фазовые скорости различных Т-волн совпадают, то есть эти волны являются вырожденными. Отличаются эти волны лишь структурой электромагнитного поля, а следовательно, и амплитудами токов и напряжений на проводниках.

Функции $\mathbf{E}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$, описывающие координатные зависимости электрического и магнитного полей Т-волны в плоскости поперечного сече-

ния линии передачи, являются решениями двумерных уравнений электро- и магнитостатики

$$\Delta \mathbf{E}(x, y) = 0, \quad (1.40)$$

$$\Delta \mathbf{H}(x, y) = 0. \quad (1.41)$$

Эти уравнения получаются из общих уравнений (1.23) и (1.24) после подстановки в них формул (1.1) и (1.38). Напомним, что уравнениями электро- и магнитостатики называют уравнения Лапласа:

$$\Delta \mathbf{E}(x, y, z) = 0, \quad (1.42)$$

$$\Delta \mathbf{H}(x, y, z) = 0, \quad (1.43)$$

которые являются предельным случаем уравнений Гельмгольца (1.23) и (1.24) при $k=0$, то есть при $\omega=0$.

Таким образом, структура электрического поля Т-волны в плоскости поперечного сечения линии передачи совпадает со структурой электрического поля статических зарядов на проводниках линии, а структура магнитного поля совпадает со структурой магнитного поля постоянных токов.

Получим характеристическое сопротивление Т-волны. Для этого обратимся к уравнениям (1.25). Для определенности будем считать, что в рассматриваемой точке линии передачи ось x направлена вдоль поперечной составляющей электрического поля, то есть $E_x = E_\tau$, а $E_y = 0$. Учитывая, что $E_z = 0$ и $H_z = 0$, из (1.25) находим $H_x = 0$, $H_y = H_\tau$ и

$$k_z E_\tau = \omega \mu_0 \mu_r H_\tau. \quad (1.44)$$

Подставляя (1.44), (1.38), (1.20) и (1.21) в (1.4), получаем характеристическое сопротивление поперечной электромагнитной волны

$$Z_c = Z_0 \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}, \quad (1.45)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ – характеристическое сопротивление волны в свободном пространстве, равное приблизительно 377 Ом.

Волновое сопротивление Z линии передачи для Т-волны не зависит от частоты ω , но зависит от конструкции линии, ее размеров и диэлектрического заполнения. Например, для коаксиальной линии

$$Z = Z_c \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi}, \quad (1.46)$$

где r_1 и r_2 – радиусы внутренней и внешней проводящих цилиндрических поверхностей.

Расчет Т-волн в линиях передачи является наиболее простым. Он может быть строго выполнен путем решения системы телеграфных уравнений. При этом входящие в них погонные емкости и индуктивности проводников могут быть вычислены решением уравнений электро- и магнитостатики с помощью конформных отображений. Пример расчета Т-волны в симметричной трехпроводной полосковой линии методом конформного отображения приведен в учебном пособии [8].

1.5. Электрическая волна

Электрической волной, или Е-волной, или ТМ-волной, называют электромагнитную волну, вектор напряженности \mathbf{E} электрического поля которой имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Из формулы (1.37) следует, что у Е-волны отсутствуют поперечные токи на проводниках. Она может распространяться в однородных и многих неоднородных линиях передачи. Электрическая волна всегда обладает дисперсией. Ее волновое число в случае однородного волновода и однородной коаксиальной линии выражается формулой

$$k_z = k \sqrt{1 - \omega_{cr}^2 / \omega^2}, \quad (1.47)$$

где критическая частота ω_{cr} , зависящая от двух индексов волны, обратно пропорциональна поперечному размеру линии передачи. В диэлектрической линии передачи закон дисперсии Е-волны выражается более сложной формулой (см. например [8]).

В волноводе и в коаксиальной и полосковой линиях существует множество различных Е-волн, которые отличают двумя индексами. Напротив, в диэлектрической линии существует только одна Е-волна. Однако во всех перечисленных линиях Е-волны являются волнами высшего типа.

Термин «волновое сопротивление» для Е-волны используется крайне редко.

Расчет Е-волны начинается с получения общего решения уравнения Гельмгольца (1.23) для продольной составляющей E_z , содержащего неопределенные коэффициенты. Общее решение также содержит неопределенное волновое число k_z . Затем по формулам (1.26)–(1.29) получают общие выражения для поперечных составляющих. Значения неопределенных коэффициентов определяют, налагая на общие выражения граничные условия (1.32)–(1.33) или (1.36). При этом значение k_z находится из условия существования нетривиального решения получающейся однородной системы линейных уравнений, то есть из равенства нулю определителя системы. Уравнение для волнового числа k_z любой волны, в том числе и Е-волны, называют дисперсионным уравнением.

1.6. Магнитная волна

Магнитной волной, или Н-волной, или ТЕ-волной, называют электромагнитную волну, вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля которой имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор напряженности \mathbf{E} электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Согласно (1.37) она имеет в проводниках поперечные токи J_τ . Безусловно, их величина, как и величина продольной составляющей магнитного поля H_z , убывает с уменьшением поперечного размера проводника и понижением частоты ω .

Магнитная волна, как и электрическая, обладает дисперсией. Ее закон дисперсии $k_z(\omega)$ подобен закону дисперсии Е-волны. Магнитная волна может распространяться во многих линиях передачи. Но в отличие от электрической волны, одна из Н-волн может быть волной основного типа в волноводе и в некоторых других линиях передачи.

Термин «волновое сопротивление» для Н-волны, как и для Е-волны, используется крайне редко.

Расчет Н-волны аналогичен расчету Е-волны.

1.7. Гибридная волна

Гибридной волной, или ЕН-волной, или НЕ-волной, называют электромагнитную волну, векторы напряженности электрического и магнитного поля которой имеют отличные от нуля поперечные и продольные составляющие. Их типы различаются двумя индексами. Все эти волны обладают дисперсией.

Согласно (1.37) НЕ-волна, как и Н-волна, имеет на проводниках поперечные токи J_t , величина которых убывает с уменьшением поперечных размеров проводников и понижением частоты ω .

Гибридные волны распространяются в тех неоднородных линиях передачи, где их разделению на Е- и Н-волны препятствуют электродинамические граничные условия.

В диэлектрической линии передачи одна из гибридных волн, НЕ₁₁-волна, является волной основного типа. Ее критическая частота $\omega_{cr}=0$. Концентрация электромагнитной энергии этой волны внутри диэлектрика возрастает как с увеличением поперечного размера диэлектрика, так и с увеличением частоты.

В копланарной линии гибридные волны являются волнами высших типов.

В щелевой линии передачи все волны гибридные, включая и основную волну. Критическая частота волны основного типа $\omega_{cr}>0$. В щелевой линии имеются области эллиптической поляризации магнитного поля.

Расчет ЕН-волны аналогичен расчету Е- и Н-волны. Однако строгое решение задачи о распространении гибридной волны может быть получено в виде формул лишь в простейших случаях. Чаще всего решение такой задачи на собственное значение сводится к решению бесконечной системы однородных линейных уравнений.

1.8. Квазипоперечная электромагнитная волна

Квазипоперечная электромагнитная волна, или квази-Т-волна, или квази-ТЕМ-волна, является частным случаем гибридной волны, у которой продольные составляющие электромагнитного поля много меньше поперечных составляющих.

Квазипоперечные электромагнитные волны распространяются в неоднородных линиях передачи с порядком связности не ниже двух и поперечными размерами много меньшими длины волны. Примерами таких линий являются микрополосковая линия и копланарная линия. У всех квази-Т-волн критическая частота $\omega_{cr}=0$. Поэтому они являются волнами основного типа. С уменьшением поперечных размеров линии или понижением частоты ω продольные составляющие электромагнитного поля E_z и H_z плавно убывают до нуля.

В области квазистатического приближения, то есть в частотном диапазоне, где длина волны в линии λ_g много больше всех поперечных размеров линии передачи, свойства квази-Т-волн похожи на свойства Т-волн. Главное различие их свойств состоит в том, что фазовые скорости различных квази-Т волн в одной и той же линии передачи, как правило, не совпадают.

Фазовую скорость v квази-Т-волны часто характеризуют с помощью эффективной относительной диэлектрической проницаемости ϵ_{eff} , с которой она связана формулой

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff}}. \quad (1.48)$$

На рис. 1.2 представлена частотная зависимость эффективной диэлектрической проницаемости микрополосковой линии для волны основного типа. Эта зависимость является монотонно возрастающей функцией. Функция $\epsilon_{eff}(\omega)$ изменяется в пределах от статического значения $\epsilon_{eff}(0)$ до диэлектрической проницаемости подложки ϵ_r . Причем всегда $\epsilon_{eff}(0) \geq (1 + \epsilon_r) / 2$. Это неравенство усиливается с увеличением относительной ширины полосковых проводников W/h , нормированной на толщину диэлектрической подложки h .

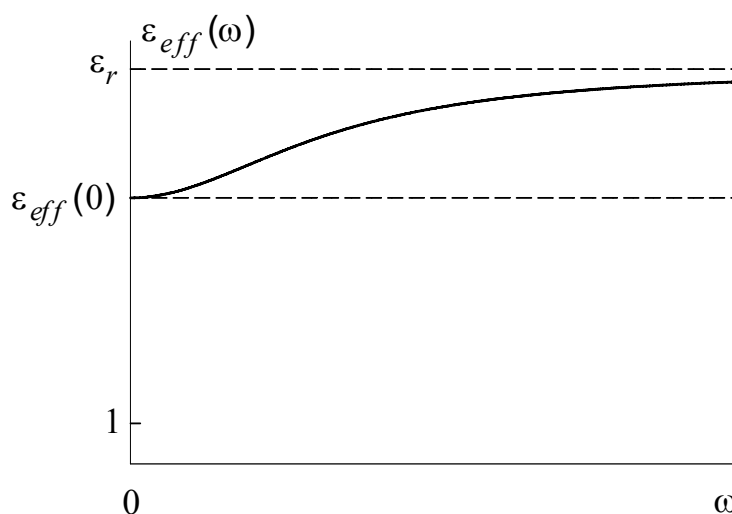


Рис. 1.2. Дисперсия эффективной диэлектрической проницаемости

Волновое сопротивление Z квази-Т волны также зависит от частоты ω . Однако, этой зависимостью в области квазистатического приближения часто можно пренебречь.

В связанных микрополосковых линиях, содержащих два одинаковых полосковых проводника, существует две волны основного типа – четная и нечетная. Четная волна имеет одинаковые амплитуды токов на полосковых проводниках и одинаковые амплитуды напряжений. Нечетная волна имеет одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку амплитуды токов и аналогичные амплитуды напряжений. Для эффективных диэлектрических проницаемостей этих волн используют обозначения ε_e и ε_o , где индекс e указывает на четную волну (*even mode*), а индекс o – на нечетную волну (*odd mode*). Волновые сопротивления обозначают соответственно Z_e и Z_o .

Таким образом, в симметричной паре связанных микрополосковых линий зависимости токов и напряжений на проводниках от координаты z описываются равенствами

$$\begin{aligned} I_1(z) &= I_e^{\text{пад}} e^{ik_e z} + I_o^{\text{пад}} e^{ik_o z} + I_e^{\text{отр}} e^{-ik_e z} + I_o^{\text{отр}} e^{-ik_o z}, \\ I_2(z) &= I_e^{\text{пад}} e^{ik_e z} - I_o^{\text{пад}} e^{ik_o z} + I_e^{\text{отр}} e^{-ik_e z} - I_o^{\text{отр}} e^{-ik_o z}, \\ U_1(z) &= Z_e I_e^{\text{пад}} e^{ik_e z} + Z_o I_o^{\text{пад}} e^{ik_o z} - Z_e I_e^{\text{отр}} e^{-ik_e z} - Z_o I_o^{\text{отр}} e^{-ik_o z}, \\ U_2(z) &= Z_e I_e^{\text{пад}} e^{ik_e z} - Z_o I_o^{\text{пад}} e^{ik_o z} - Z_e I_e^{\text{отр}} e^{-ik_e z} + Z_o I_o^{\text{отр}} e^{-ik_o z}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где волновые числа

$$k_e = k_0 \sqrt{\varepsilon_e}, \quad k_o = k_0 \sqrt{\varepsilon_o}, \quad (1.50)$$

а полные токи $I_1(z)$, $I_2(z)$ и токи падающих и отраженных волн $I_e^{\text{пад}}$, $I_o^{\text{пад}}$ и $I_e^{\text{отр}}$, $I_o^{\text{отр}}$ измеряются в положительном направлении оси z .

Электрические параметры волн основного типа в симметричной паре связанных микрополосковых линий связаны неравенствами*

$$\varepsilon_e \geq \varepsilon_o, \quad (1.51)$$

$$Z_e \geq Z_o. \quad (1.52)$$

* Неравенство (1.51) нарушается, лишь когда высота верхнего экрана над полосковыми проводниками h_a меньше толщины подложки h или диэлектрическая проницаемость подложки $\varepsilon_r < 1$.

При относительной ширине зазора между полосковыми проводниками $S/h \rightarrow \infty$ связь между линиями исчезает и неравенства (1.51), (1.52) превращаются в равенства.

В многопроводных микрополосковых линиях и в асимметричной паре связанных микрополосковых линий частные формулы (1.49) уже не справедливы. В общем случае для описания квази-Т-волн используют выражения

$$\begin{aligned} I_i(z) &= \sum_{m=1}^n \left[I_{im} X_m^{\text{пад}} e^{ik_m z} + I_{im} X_m^{\text{отр}} e^{-ik_m z} \right], \\ U_i(z) &= \sum_{m=1}^n \left[U_{im} X_m^{\text{пад}} e^{ik_m z} - U_{im} X_m^{\text{отр}} e^{-ik_m z} \right], \end{aligned} \quad (1.53)$$

где индекс i – номер полоскового проводника ($i=1, 2, \dots, n$); m – номер волны (*mode*) в связанных линиях ($m=1, 2, \dots, n$); n – число полосковых проводников; $X_m^{\text{пад}}$, $X_m^{\text{отр}}$ – безразмерные амплитуды m -й падающей и m -й отраженной волны; I_{im} , U_{im} – амплитуды тока и напряжения на i -м проводнике для m -й падающей волны единичной амплитуды. При этом волновые числа k_m связаны с эффективными диэлектрическими проницаемостями ε_m формулой

$$k_m = k_0 \sqrt{\varepsilon_m}. \quad (1.54)$$

В общем случае электрические параметры ε_m , I_{im} , U_{im} квазипоперечных волн в многопроводных связанных линиях передачи являются функциями частоты, но в области квазистатического приближения их дисперсия мала и ею можно пренебречь. Квазистатические значения электрических параметров могут быть вычислены с помощью телеграфных уравнений, если известны матрицы погонной емкости и индуктивности проводников.

Дисперсию электрических параметров можно учесть в рамках какой-либо приближенной аналитической модели. Известно несколько таких моделей. Наиболее точная модель для дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости одиночной микрополосковой линии предложена в [13]:

$$\varepsilon_{\text{eff}}(f) = \varepsilon_r - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{\text{eff}}(0)}{1 + P(f)},$$

где

$$P(f) = P_1 P_2 \left[(0.1844 + P_3 P_4) 10 f h \right]^{1.5763},$$

$$P_1 = 0.27448 + \left[0.6315 + \frac{0.525}{(1 + 0.157 fh)^{20}} \right] \frac{W}{h},$$

$$P_2 = 0.33622 \left[1 - e^{-0.03442 \varepsilon_r} \right],$$

$$P_3 = 0.0363 e^{-4.6W/h} \left[1 - e^{-(fh/3.87)^{4.97}} \right],$$

$$P_4 = 1 + 2.751 \left[1 - e^{(\varepsilon_r/15.916)^8} \right],$$

где частота f выражена в гигагерцах, а толщина подложки h и ширина проводника W выражены в сантиметрах. Эта формула получена путем обработки результатов строгого электродинамического расчета. Ее погрешность не превышает 0.6 % при $0.12 < W/h < 100$, $1 \leq \varepsilon_r \leq 20$, $0 < h/\lambda_0 < 0.13$, где λ_0 – длина волны в свободном пространстве.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются волновое сопротивление, входное сопротивление и характеристическое сопротивление?
2. Чему равны фазовая и групповая скорости Т-волн?
3. В каких линиях передачи не могут распространяться поперечные электромагнитные волны?
4. Перечислите типы волн, обладающих дисперсией.
5. Чему равна фазовая скорость волны на критической частоте?
6. Когда дисперсией квази-Т-волн можно пренебречь?
7. Чем отличаются диэлектрическая проницаемость, комплексная диэлектрическая проницаемость и эффективная диэлектрическая проницаемость? Какие типы потерь в среде они позволяют учесть?
8. Для какого типа волн квазистатический расчет является точным?
9. Когда можно использовать квазистатический расчет для линий передачи?
10. У волн какого типа отсутствуют поперечные токи?
11. В каких связанных линиях передачи имеет место вырождение фазовых скоростей волн основного типа, а в каких вырождение отсутствует?
12. Какие колебания называют гармоническими и какие функции называют гармоническими?
13. Как зависит эффективная диэлектрическая проницаемость микрополосковой линии от ширины полоскового проводника и толщины подложки?

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ И КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

2.1. Телеграфные уравнения для многопроводных линий

Рассмотрим многопроводную линию передачи, имеющую n проводников и земляной провод. Проводники будем считать идеальными. Поэтому свойства такой линии будем характеризовать только двумя матрицами – матрицей погонной емкости \mathbf{C} и матрицей погонной индуктивности \mathbf{L} . Матрица \mathbf{C} связывает погонные заряды Q_i и напряжения U_i на проводниках относительно земляного провода уравнениями

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} U_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Матрица \mathbf{L} связывает погонные электродвижущие силы \mathcal{E}_i и скорости изменения токов I_i на проводниках уравнениями

$$\mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} \partial I_k / \partial t \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Запишем градиенты напряжения и тока на i -м проводнике. Из уравнений (2.2) получаем градиент напряжения

$$-\partial U_i / \partial z = \sum_{k=1}^n L_{ik} \partial I_k / \partial t \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Градиент тока приводит к накоплению заряда на проводнике. Поэтому согласно (2.1) получаем

$$-\partial I_i / \partial z = \sum_{k=1}^n C_{ik} \partial U_k / \partial t \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Вводя вектор тока \mathbf{I} с компонентами I_i и вектор напряжения \mathbf{U} с компонентами U_i , формулы (2.3) и (2.4) можно кратко записать в матричной форме

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} = \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}, \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I} = \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) получили название телеграфных уравнений.

Дифференцируя по z обе части уравнения (2.6) и исключая \mathbf{U} с помощью уравнения (2.5), получаем волновое уравнение для вектора тока

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{I} = \mathbf{CL} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{I}. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде бегущей гармонической волны

$$\mathbf{I}(z, t) = \mathbf{I}_m e^{ik_m z - i\omega t}, \quad (2.8)$$

где индекс m нумерует собственные векторы тока \mathbf{I}_m и отвечающие им собственные волновые числа k_m . Для нахождения k_m и \mathbf{I}_m подставим выражение (2.8) в уравнение (2.7). Получаем

$$(k_m^2 - \omega^2 \mathbf{CL}) \mathbf{I}_m = 0. \quad (2.9)$$

Векторное уравнение (2.9) является краткой записью системы однородных линейных уравнений. Эта система имеет нетривиальное решение лишь в случае, когда ее определитель равен нулю. Видно, что определитель этой системы является многочленом n -й степени относительно k_m^2 . Следовательно, существует n решений для падающих волн с $k_m > 0$ и столько же решений для отраженных волн с $k_m < 0$. При этом векторы \mathbf{I}_m амплитуд токов падающих и отраженных волн, отвечающие одному и тому же k_m^2 , совпадают.

Учитывая (1.54), уравнение (2.9) можно записать также в виде

$$(\varepsilon_m - c^2 \mathbf{CL}) \mathbf{I}_m = 0. \quad (2.10)$$

Подставляя решение (2.8) в уравнение (2.5), находим вектор напряжений

$$\mathbf{U}(z, t) = \mathbf{U}_m e^{ik_m z - i\omega t}, \quad (2.11)$$

где вектор амплитуд напряжений \mathbf{U}_m связан с вектором амплитуд токов \mathbf{I}_m уравнением

$$\mathbf{U}_m = \frac{\omega}{k_m} \mathbf{L} \mathbf{I}_m. \quad (2.12)$$

Видно, что изменение направления распространения волны, то есть изменение знака k_m , приводит при неизменном векторе \mathbf{I}_m к обращению знака вектора \mathbf{U}_m .

Полученные здесь результаты кратко обобщают формулы (1.53). Очевидно, что фигурирующие в них амплитуды I_{im} и U_{im} являются i -ми компонентами векторов \mathbf{I}_m и \mathbf{U}_m .

Заметим, что используемые в этом разделе матрицы погонной емкости \mathbf{C} и индуктивности \mathbf{L} не всегда являются независимыми. Матрица погонной емкости $\mathbf{C}(\epsilon_r)$, получающаяся решением уравнения электростатики с соответствующими граничными условиями для электрического поля, является функцией диэлектрических проницаемостей сред, заполняющих линию. Напротив, матрица погонной индуктивности $\mathbf{L}(\mu_r)$, получающаяся решением уравнения магнитостатики с соответствующими граничными условиями для магнитного поля, является функцией магнитных проницаемостей сред, заполняющих линию.

Согласно формулам (1.20) и (1.21) для всех Т-волн в воздушной линии передачи $k_m = \omega/c$. Подставим это значение в формулу (2.9). Получающееся уравнение

$$[c^{-2} - \mathbf{C}(1)\mathbf{L}(1)] \mathbf{I}_m = 0$$

должно выполняться при любых значениях m . Поэтому матрица индуктивности воздушной линии передачи связана с матрицей погонной емкости формулой

$$\mathbf{L}(1) = c^{-2} \mathbf{C}^{-1}(1). \quad (2.13)$$

В случае когда диэлектрическое заполнение линии передачи не является магнитным ($\mu_r = 1$), формула (2.13) позволяет в уравнениях (2.9) и (2.12) исключить матрицу погонной индуктивности. Тогда они принимают вид

$$[k_m^2 - k_0^2 \mathbf{C}(\epsilon_r) \mathbf{C}^{-1}(1)] \mathbf{I}_m = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{U}_m = \frac{k_0}{k_m} c^{-1} \mathbf{C}^{-1}(1) \mathbf{I}_m. \quad (2.15)$$

Рассмотрим другие частные случаи. Начнем со случая двухпроводной линии передачи, то есть с $n = 1$. Тогда матрицы \mathbf{C} и \mathbf{L} являются скалярными величинами. Из уравнений (2.9), (2.10) и (2.12) получаем

$$k_z = \omega \sqrt{LC}, \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{eff} = c^2 LC, \quad (2.17)$$

$$Z = \sqrt{L/C}. \quad (2.18)$$

Если диэлектрическое заполнение двухпроводной линии передачи не является магнитным, то с учетом равенства (2.13) формулы (2.16)–(2.18) принимают вид

$$k_z = k_0 \sqrt{C(\varepsilon_r)/C(1)}, \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{eff} = C(\varepsilon_r)/C(1), \quad (2.20)$$

$$Z(\varepsilon_r) = \frac{Z(1)}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}, \quad Z(1) = \frac{1}{cC(1)}. \quad (2.21)$$

Рассмотрим теперь случай трехпроводной линии передачи с симметричной парой неземляных проводников. В этом случае матрицы \mathbf{C} и \mathbf{L} имеют вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в уравнения (2.10) и (2.12), получаем

$$\varepsilon_e = c^2(C_{11} + C_{12})(L_{11} + L_{12}), \quad \varepsilon_o = c^2(C_{11} - C_{12})(L_{11} - L_{12}), \quad (2.23)$$

$$Z_e = \sqrt{(L_{11} + L_{12})/(C_{11} + C_{12})}, \quad Z_o = \sqrt{(L_{11} - L_{12})/(C_{11} - C_{12})}. \quad (2.24)$$

Заметим, что при описании многопроводных линий передачи наряду с элементами C_{ik} матрицы погонной емкости \mathbf{C} , определяемыми уравнением (2.1), иногда используют величины C_i и C_{ik}^m , определяемые формулой

$$Q_i = C_i U_i + \sum_{k=1}^n C_{ik}^m (U_i - U_k) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.25)$$

где C_i – погонная емкость i -го проводника относительно земляного проводника; C_{ik}^m – взаимная погонная емкость i -го и k -го проводников ($C_{ik}^m = C_{ki}^m$). Эти величины в отличие от элементов матрицы \mathbf{C} всегда положительны. Сравнивая формулы (2.1) и (2.25), устанавливаем связь между емкостными параметрами

$$C_{ik} = \begin{cases} C_i + \sum_{j \neq i} C_{ij}^m & \text{при } i = k, \\ -C_{ik}^m & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (2.26)$$

Видим, что недиагональные элементы матрицы \mathbf{C} отрицательны.

Формулы (2.23), (2.24) после подстановки в них выражений (2.26) принимают вид

$$\varepsilon_e = c^2 C_1 (L_1 + L_m), \quad \varepsilon_o = c^2 (C_1 + 2C_m)(L_1 - L_m), \quad (2.27)$$

$$Z_e = \sqrt{(L_1 + L_m)/C_1}, \quad Z_o = \sqrt{(L_1 - L_m)/(C_1 + 2C_m)}. \quad (2.28)$$

2.2. Расчет матрицы погонной емкости

Рассмотрим многопроводную планарную линию передачи, изображенную на рис. 2.1. Линия содержит n параллельных бесконечно тонких идеальных полосковых проводников, расположенных над плоским безграничным экраном. Помимо нижнего экрана может существовать и верхний экран.

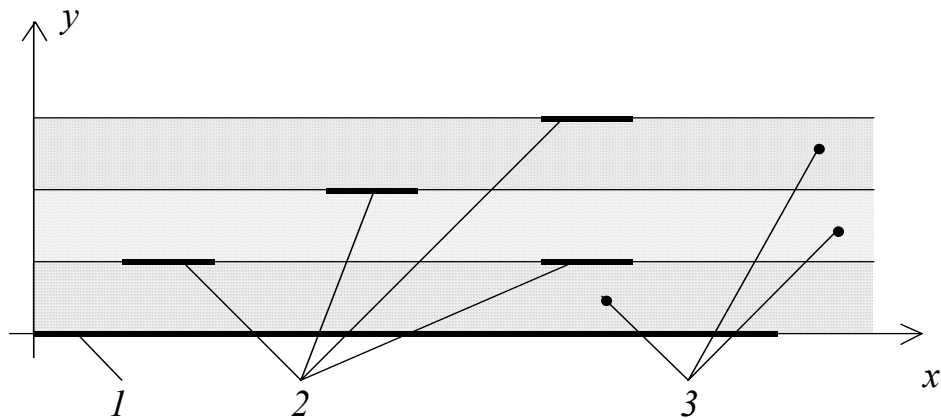


Рис. 2.1. Поперечное сечение связанных многопроводных линий:
1 – экран; 2 – полосковые проводники; 3 – слои диэлектрика

В общем случае каждый последующий проводник отделен от предыдущего проводника слоем диэлектрика. В частном случае толщина некоторых слоев может равняться нулю. Тогда смежные проводники будут лежать на поверхности одного и того же слоя диэлектрика.

Вычисление элементов C_{ij} матрицы погонной емкости \mathbf{C} начнем с нахождения функции распределения зарядов $\rho_{si}(x)$ по ширине i -го проводника, заряженного с погонной плотностью зарядов Q_i , и определения напряжения U_i на нем относительно экрана. Для этого запишем усредненную по времени погонную плотность электрической энергии квазистатического поля в связанных проводниках

$$W_E = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{D}^* \mathbf{E} ds, \quad (2.29)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{E} – векторы амплитуд индукции и напряженности электрического поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону (1.1), а звездочка указывает на комплексно сопряженную величину. Интегрирование производится по всему сечению связанных линий ($-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$). Наличие оператора Re указывает на допустимость потерь в диэлектрических слоях.

Так как

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi, \quad (2.30)$$

где Φ – потенциал электрического поля, то формулу (2.29) перепишем в виде

$$W_E = -\frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{D}^* \text{grad } \Phi \, ds. \quad (2.31)$$

Используя правило действий с оператором ∇ , получим

$$W_E = -\frac{1}{2} \text{Re} \int [\text{div}(\Phi \mathbf{D}^*) - \Phi \text{div} \mathbf{D}^*] \, ds. \quad (2.32)$$

Согласно теореме о дивергенции интеграл от первого члена в квадратных скобках равен интегралу $\Phi \mathbf{D}_n^*$ по замкнутому контуру, проходящему по экрану и замыкающемуся в бесконечности в верхней полуплоскости. Так как потенциал $\Phi(x, y)$ от зарядов Q_i равен нулю на поверхности экрана и в бесконечности, то и интеграл по контуру будет равен нулю. Поэтому первый член в квадратных скобках формулы (2.32) можно опустить. Получаем

$$W_E = \frac{1}{2} \text{Re} \int \Phi \text{div} \mathbf{D}^* \, ds. \quad (2.33)$$

Учитывая, что $\text{div} \mathbf{D}$ является объемной плотностью зарядов, а заряды располагаются только на проводниках с поверхностной плотностью $\rho_{si}(x)$, интеграл (2.33) перепишем в виде

$$W_E = \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{i=1-\infty}^n \int \Phi_i(x) \rho_{si}^*(x) \, dx. \quad (2.34)$$

где $\Phi_i(x) = \Phi(x, y_i)$, y_i – высота i -го проводника над поверхностью экрана.

Формула (2.34) будет использована для нахождения функций поверхностной плотности зарядов $\rho_{si}(x)$ на проводниках путем минимизации погонной плотности электрической энергии W_E при заданной погонной плотности зарядов на проводниках $Q_i \neq 0$ и условии, что

$$\arg \rho_{si}(x) = \text{const}. \quad (2.35)$$

Условие (2.35) говорит об отсутствии токов на проводниках в поперечном направлении. То есть волны высшего типа не рассматриваются. Кроме того,

для простоты будем считать, что диэлектрические и магнитные проницаемости всех слоев являются скалярными величинами.

Так как потенциал $\Phi(x, y)$ создается квазистатическими зарядами, распределенными на полосковых проводниках с поверхностной плотностью $\rho_{si}(x)$, то он удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \frac{-1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(y)} \rho(x, y), \quad (2.36)$$

где объемная плотность зарядов

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \rho_{si}(x) \delta(y - y_i); \quad (2.37)$$

$\varepsilon_r(y)$ – относительная диэлектрическая проницаемость слоя.

Нахождение потенциала $\Phi(x, y)$ по заданным функциям $\rho_{si}(x)$ значительно упрощается, если произвести преобразование Фурье:

$$\bar{\Phi}(\beta, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\beta x} dx, \quad (2.38)$$

$$\bar{\rho}_{si}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{si}(x) e^{i\beta x} dx. \quad (2.39)$$

Тогда уравнение (2.36) во всей плоскости поперечного сечения за исключением линий раздела слоев $y = y_i$ принимает вид

$$\left(\partial^2 / \partial y^2 - \beta^2 \right) \bar{\Phi}(\beta, y) = 0. \quad (2.40)$$

На границе раздела слоев должны выполняться условия

$$\bar{\Phi}|_{y=y_i-0} = \bar{\Phi}|_{y=y_i+0}, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r|_{y=y_i-0} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Phi}|_{y=y_i-0} = \varepsilon_0 \varepsilon_r|_{y=y_i+0} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Phi}|_{y=y_i+0} + \rho_{si}|_{y=y_i}, \quad (2.42)$$

являющиеся следствием непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля E_x и скачка нормальной составляющей электрической индукции D_y на величину поверхностной плотности зарядов ρ_{si} . Так как потенциал Φ , создаваемый зарядами Q_i , обращается на бесконечности в нуль, а поверхность экрана эквипотенциальна, то должны выполняться еще два условия

$$\bar{\Phi}|_{y=0} = 0, \quad \bar{\Phi}|_{y=\infty} = 0. \quad (2.43)$$

Преобразование Фурье приводит выражение (2.34) к виду

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_i(\beta) \bar{\rho}_{si}^*(\beta) d\beta. \quad (2.44)$$

Решение уравнения (2.40) с граничными условиями (2.41)–(2.43) в общем случае может быть записано в форме

$$\bar{\Phi}(\beta, y) = \sum_{i=1}^n F_i \bar{\rho}_{si}(\beta), \quad (2.45)$$

где F_i – дробные рациональные функции от $\operatorname{sh}(|\beta|y_i)$, $\operatorname{ch}(|\beta|y_i)$, $\operatorname{sh}(|\beta|y)$, $\operatorname{ch}(|\beta|y)$ и $|\beta|$. Конкретный вид функций F_i зависит от геометрии поперечного сечения связанных планарных линий.

Из выражения (2.45) следует, что потенциал зарядов на i -й границе раздела слоев имеет вид

$$\bar{\Phi}_i(\beta) = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(\beta) \bar{\rho}_{sj}(\beta), \quad (2.46)$$

где φ_{ij} – дробные рациональные функции от $\operatorname{sh}(|\beta|y_i)$, $\operatorname{ch}(|\beta|y_i)$ и $|\beta|$. Поэтому они удовлетворяют условию

$$\varphi_{ij}(-\beta) = \varphi_{ij}(\beta). \quad (2.47)$$

Кроме того, функции φ_{ij} обладают симметрией

$$\varphi_{ij}(\beta) = \varphi_{ji}(\beta), \quad (2.48)$$

так как при перестановке зарядов $\rho_{si}(x)$ и $\rho_{sj}(x)$ происходит перестановка вкладов в потенциал от зарядов на i -й и j -й границе слоев.

Получим функции F_i и φ_{ij} для открытых связанных микрополосковых линий, то есть в случае когда верхний экран отсутствует, а все полосковые проводники расположены на одной подложке толщиной h . Ширины полосковых проводников и координаты их центров обозначим W_i и x_i .

Решение уравнения (2.40), удовлетворяющее граничным условиям (2.43), имеет вид

$$\bar{\Phi}(\beta, y) = \begin{cases} A_1 \operatorname{sh}(|\beta|y) & \text{при } 0 < y < h, \\ A_2 e^{-|\beta|y} & \text{при } h < y < \infty. \end{cases} \quad (2.49)$$

Выразим константы интегрирования A_1 и A_2 через функции плотности зарядов $\bar{\rho}_{si}(\beta)$. Подставляя (2.49) в граничные условия (2.41) и (2.42), получаем

$$\bar{\Phi}(\beta, y) = \begin{cases} \frac{\bar{\rho}_{si}(\beta)}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{\text{sh}(|\beta|y)}{\varepsilon_r \text{ch}(|\beta|h) + \text{sh}(|\beta|h)} & \text{при } 0 < y < h, \\ \frac{\bar{\rho}_{si}(\beta)}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{\text{sh}(|\beta|h) e^{-|\beta|(y-h)}}{\varepsilon_r \text{ch}(|\beta|h) + \text{sh}(|\beta|h)} & \text{при } h < y < \infty. \end{cases} \quad (2.50)$$

Отсюда находим, что в случае открытых связанных микрополосковых линий, выполненных на однослойной подложке, искомые функции имеют вид

$$F(\beta, y) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{\text{sh}(|\beta|y)}{\text{sh}(|\beta|h) + \varepsilon_r \text{ch}(|\beta|h)} & \text{при } 0 < y < h, \\ \frac{1}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{\text{sh}(|\beta|h) e^{-|\beta|(y-h)}}{\text{sh}(|\beta|h) + \varepsilon_r \text{ch}(|\beta|h)} & \text{при } h < y < \infty, \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\varphi_{ij}(\beta) = \frac{1}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{1}{1 + \varepsilon_r / \text{th}(|\beta|h)}. \quad (2.52)$$

Видно, что в рассматриваемом случае функции $\varphi_{ij}(\beta)$ вообще не зависят от номеров полосковых проводников, то есть от индексов i и j .

Аналогичным образом можно получить функции $\varphi_{ij}(\beta)$ для других случаев связанных планарных линий. Отметим, что в случае экранированных связанных микрополосковых линий

$$\varphi_{ij}(\beta) = \frac{1}{\varepsilon_0 |\beta|} \frac{1}{\text{cth}(|\beta|h_a) + \varepsilon_r \text{cth}(|\beta|h)}, \quad (2.53)$$

где h_a – высота верхнего экрана над полосковыми проводниками. Видно, что в пределе $h_a \rightarrow \infty$ формула (2.53) совпадает с формулой (2.52).

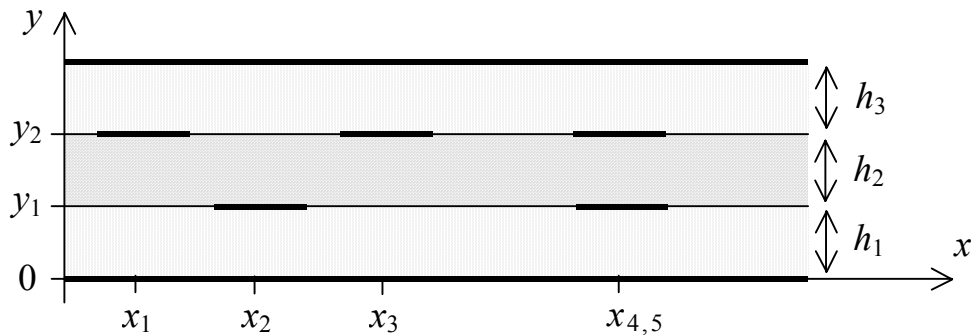


Рис. 2.2. Поперечное сечение экранированной трехслойной многопроводной линии передачи

Отметим также, что для экранированной трехслойной планарной линии передачи, изображенной на рис. 2.2, функция $\varphi_{ij}(\beta)$ имеет вид

$$\varphi_{ij}(\beta) = \begin{cases} \frac{(\varepsilon_2 \operatorname{th} u_3 + \varepsilon_3 \operatorname{th} u_2) \operatorname{th} u_1}{\varepsilon_0 |\beta| \Delta}, & \text{если } i, j \in y_1, \\ \frac{\varepsilon_2 \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_3 / \operatorname{ch} u_2}{\varepsilon_0 |\beta| \Delta}, & \text{если } i \in y_1 \text{ и } j \in y_2 \\ & \text{или } i \in y_2 \text{ и } j \in y_1, \\ \frac{(\varepsilon_2 \operatorname{th} u_1 + \varepsilon_1 \operatorname{th} u_2) \operatorname{th} u_3}{\varepsilon_0 |\beta| \Delta}, & \text{если } i, j \in y_2, \end{cases} \quad (2.54)$$

где

$$\Delta = \varepsilon_2^2 \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_3 \operatorname{th} u_2 + \varepsilon_2 (\varepsilon_3 \operatorname{th} u_1 + \varepsilon_1 \operatorname{th} u_3) + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \operatorname{th} u_2, \\ u_1 = |\beta| h_1, \quad u_2 = |\beta| h_2, \quad u_3 = |\beta| h_3.$$

Вернемся к погонной плотности энергии электрического поля. Подставляя (2.46) в формулу (2.44), получаем

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ij}(\beta) \bar{\rho}_{si}^*(\beta) \bar{\rho}_{sj}(\beta) d\beta. \quad (2.55)$$

Поверхностную плотность зарядов $\rho_{si}(x)$ будем искать в виде разложения в ряд по некоторой последовательности функций, удовлетворяющих следующим требованиям.

В рассматриваемой задаче граничные поверхности полосковых проводников имеют сингулярности типа острых углов, на которых некоторые компоненты электромагнитного поля обращаются в бесконечность. Поэтому решение уравнений электродинамики, а следовательно, и квазистатики не может быть однозначным. Для обеспечения единственности решения задачи необходимо использовать дополнительное физическое условие, называемое условием на ребре или условием Мейкснера [11]. Оно заключается в требовании конечности энергии электромагнитного поля, запасаемой в любом конечном объеме ребра V . Это равносильно требованию

$$\lim_{V \rightarrow 0} \int_V [\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2] dv = 0. \quad (2.56)$$

Из условия (2.56) следует, что в окрестности ребра ни одна составляющая электромагнитного поля (\mathbf{E} , \mathbf{H}) не может возрастать быстрее, чем $r^{-1+\tau}$

($\tau > 0$) при $r \rightarrow 0$, где r – расстояние до ребра. Для ребра в форме клина конкретное значение параметра τ находят решением уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат, разлагая компоненты электромагнитного поля в ряд по степеням r .

В [11] показано, что в случае ребра, являющегося краем бесконечно тонкого полоскового проводника, параметр τ для поперечных компонент электрического поля (E_x, E_y) и продольной компоненты магнитного поля (H_z) принимает значение $\tau = 1/2$, для остальных компонент $\tau = 0$. Так как поверхностная плотность зарядов пропорциональна нормальной составляющей электрического поля, она должна возрасти вблизи края полоскового проводника по закону $r^{-1/2}$. Поэтому функцию $\rho_{si}(x)$ на одном из краев полоскового проводника можно записать в виде ряда по положительным степеням x , умноженного на $r^{-1/2}$. Однако полосковый проводник имеет два края. Чтобы условия Мейкснера выполнялись на обоих краях одновременно, степенной ряд следует умножить не на $r^{-1/2}$, а на $(1 - u_i^2)^{-1/2}$, где

$$u_i = 2(x - x_i)/W_i. \quad (2.57)$$

Расчет значительно упрощается, если искомый ряд по положительным степеням x перегруппировать и представить в виде ряда по ортогональным многочленам Чебышева первого рода

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.58)$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Таким образом, функцию $\rho_{si}(x)$ будем искать в виде

$$\rho_{si}(x) = \frac{2Q_i}{\pi W_i \sqrt{1-u_i^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} T_m(u_i), \quad (2.60)$$

где A_{im} – вещественные функции x , постоянные на участке $x_i - W_i/2 < x < x_i + W_i/2$ и равные нулю в остальной области.

Из условия (2.59) видно, что вклад в погонную плотность заряда

$$Q_i = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{si}(x) dx \quad (2.61)$$

дает только нулевой член ряда (2.60), причем коэффициент разложения при нулевом члене

$$A_{i0} = 1. \quad (2.62)$$

Последнее равенство обеспечено введением множителя $2Q_i/(\pi W_i)$ в разложении (2.60).

После выполнения преобразования Фурье формула (2.60) принимает вид

$$\bar{\rho}_{si}(\beta) = Q_i e^{i\beta x_i} \sum_{m=0}^{\infty} i^m A_{im} J_m(\beta W_i/2), \quad (2.63)$$

где

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi i^m} \int_0^{\pi} e^{ix \cos \varphi} \cos(m\varphi) d\varphi \quad (2.64)$$

– функция Бесселя первого рода порядка m .

Подставляя выражение (2.63) в формулу (2.55) и используя обозначение (2.57) и четность функции Бесселя

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x), \quad (2.65)$$

получаем

$$W_E = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^n Q_i^* Q_j \sum_{m,l=0}^n A_{im} A_{jl} \operatorname{Re} w_{imjl}, \quad (2.66)$$

где

$$w_{imjl} = \int_0^{\infty} \varphi_{ij}(\beta) J_m(\beta W_i/2) J_l(\beta W_l/2) \cos[\beta(x_i - x_j) + \frac{\pi}{2}(m-l)] d\beta. \quad (2.67)$$

Дифференцируя выражение (2.66) по коэффициентам A_{jl} , где $j=1, 2, \dots, n$, $l=1, 2, 3, \dots$ и приравнявая производные нулю, получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов разложения A_{im} , минимизирующих погонную плотность энергии W_E :

$$\sum_{i=1}^n Q_i^* Q_j \sum_{m=1}^{\infty} A_{im} \operatorname{Re} w_{imjl} = - \sum_{i=1}^n Q_i^* Q_j \operatorname{Re} w_{i0jl}. \quad (2.68)$$

Здесь была учтена симметрия функции φ_{ij} , выражаемая формулой (2.48), а также вещественность произведения $Q_i^* Q_j$.

Бесконечная система уравнений (2.68) при заданных Q_i может быть решена численно на компьютере, если в разложении (2.60) ограничиться конечным числом многочленов Чебышева $T_m(u_i)$, а суммирование в формуле (2.68) произвести по конечной последовательности индекса m .

Для нахождения напряжения U_i на i -м проводнике вычислим величину

$$U_i Q_i^* = U_i \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{si}^*(x) dx. \quad (2.69)$$

Внося константу U_i под знак интегрирования и учитывая, что она равна потенциалу $\Phi_i(x)$ на поверхности i -го проводника, получаем

$$U_i Q_i^* = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x) \rho_{si}^*(x) dx. \quad (2.70)$$

После выполнения преобразования Фурье имеем

$$U_i Q_i^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_i(\beta) \bar{\rho}_{si}^*(\beta) d\beta. \quad (2.71)$$

Подставляя формулу (2.46) в интеграл (2.71), получаем

$$U_i Q_i^* = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ij}(\beta) \bar{\rho}_{si}^*(\beta) \bar{\rho}_{sj}(\beta) d\beta. \quad (2.72)$$

И, наконец, после подстановки ряда (2.63) для $\bar{\rho}_{si}(\beta)$ в формулу (2.72) искомая величина

$$U_i Q_i^* = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n Q_i^* Q_j \sum_{m,l=0}^{\infty} w_{imjl} A_{im} A_{jl}. \quad (2.73)$$

Сокращая левую и правую части уравнения (2.73) на множитель Q_i^* , получаем формулу для расчета напряжения на полосковом проводнике

$$U_i = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n Q_j \sum_{m,l=0}^{\infty} w_{imjl} A_{im} A_{jl}. \quad (2.74)$$

Для нахождения элементов C_{ij} матрицы погонной емкости \mathbf{C} формулу (2.1) перепишем в виде

$$U_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} Q_j. \quad (2.75)$$

где X_{ij} – элементы матрицы \mathbf{X} , являющейся обратной к матрице \mathbf{C} .

Матрица погонной емкости \mathbf{C} получается обращением матрицы \mathbf{X} .

В случае одного проводника ($n=1$) матрица \mathbf{C} содержит единственный элемент $C_{11} = 1/X_{11}$.

2.3. Расчет матрицы погонной индуктивности

Запишем погонную плотность магнитной энергии квазистатического поля в связанных многопроводных линиях

$$W_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{H}^* \mathbf{B} ds. \quad (2.82)$$

где \mathbf{H} и \mathbf{B} – векторы напряженности и индукции магнитного поля. Так как

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2.83)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал магнитного поля, то формулу (2.82) можно переписать в виде

$$W_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{H}^* \operatorname{rot} \mathbf{A} ds. \quad (2.84)$$

Используя правило действий с оператором ∇ , получим

$$W_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int [\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}^*) + \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}^*] ds. \quad (2.85)$$

В квазистатическом приближении векторный потенциал магнитного поля \mathbf{A} удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A}(x, y) = -\mu_0 \mu_r(y) \mathbf{j}(x, y), \quad (2.86)$$

где объемная плотность токов

$$\mathbf{j}(x, y) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i(x) \delta(y - y_i), \quad (2.87)$$

а $\mathbf{J}_i(x)$ – поверхностная плотность тока на проводниках. Так как в квазистатическом приближении поперечные токи для волн основного типа равны нулю, то из формулы (2.86) видно, что равны и поперечные составляющие векторного потенциала \mathbf{A} . Поэтому, как видно из (2.83), нормальная к поверхности проводников и экрана составляющая индукции магнитного поля

$$B_y = -\partial A_z / \partial x. \quad (2.88)$$

Так как на поверхности проводников и экрана $B_y=0$, из формулы (2.88) следует, что векторный потенциал \mathbf{A} постоянен по периметру поперечного сечения любого проводника и экрана.

Согласно теореме о дивергенции интеграл от первого члена в квадратных скобках формулы (2.85) равен интегралу от $(\mathbf{A} \times \mathbf{H}^*)_n$ по замкнутому контуру, проходящему по экрану и замыкающемуся в бесконечности в верхней полуплоскости. Так как векторный потенциал от токов на проводниках I_i равен нулю в бесконечности, в том числе и на поверхности экрана, а поверхность экрана эквипотенциальна, то интеграл по контуру равен нулю и первый член в скобках формулы (2.85) можно опустить. Тогда получаем

$$W_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}^* ds. \quad (2.89)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (2.90)$$

формулу (2.89) перепишем в виде

$$W_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{i=1-\infty}^n \int A_i(x) j_i^*(x) dx, \quad (2.91)$$

где $j_i(x)$ и $A_i(x)$ – продольные составляющие вектора поверхностной плотности токов и векторного потенциала на высоте $y=y_i$. После выполнения преобразования Фурье

$$\bar{A}(\beta, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) e^{i\beta x} dx, \quad (2.92)$$

$$\bar{j}_i(\beta, y) = \int_{-\infty}^{\infty} j_i(x) e^{i\beta x} dx \quad (2.93)$$

выражение для погонной плотности магнитной энергии (2.91) и уравнение Пуассона (2.86) принимают вид

$$W_M = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \sum_{i=1-\infty}^n \int \bar{A}_i(\beta) \bar{j}_i^*(\beta) d\beta, \quad (2.94)$$

$$\left(\partial^2 / \partial y^2 - \beta^2 \right) \bar{A}(\beta, y) = 0. \quad (2.95)$$

На границе раздела слоев должны выполняться условия

$$\bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=y_i-0} = \bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=y_i+0}, \quad (2.96)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r(y)} \frac{\partial}{\partial y} \bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=y_i-0} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r(y)} \frac{\partial}{\partial y} \bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=y_i+0} + \bar{j}_i(\beta), \quad (2.97)$$

являющиеся следствием непрерывности нормальной составляющей индукции магнитного поля B_y и скачка тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля H_x на величину поверхностной плотности токов j_z , то есть формул (1.31) и (1.37).

Кроме того, должны выполняться еще два граничных условия:

$$\bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=\infty} = 0, \quad \bar{A}(\beta, y) \Big|_{y=0} = 0, \quad (2.98)$$

так как векторный потенциал \mathbf{A} , создаваемый токами I_i на проводниках, обращается в нуль на бесконечности и на поверхности экрана.

Сравнение формул (2.92)–(2.98) с формулами (2.38)–(2.44) показывает, что формулы (2.92)–(2.98) переходят в формулы (2.38)–(2.44), если произвести замену

$$A \rightarrow \Phi, \quad A_i \rightarrow U_i, \quad I_i \rightarrow Q_i, \quad j_i \rightarrow \sigma_i, \quad \mu_0 \rightarrow \varepsilon_0^{-1}, \quad \mu_r \rightarrow \varepsilon_r^{-1}. \quad (2.99)$$

Поэтому из формулы (2.74) следует, что продольная составляющая векторного потенциала на i -м проводнике

$$A_i = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n I_j \sum_{m,l=0}^{\infty} u_{imjl} B_{im} B_{jl}, \quad (2.100)$$

где коэффициенты B_{im} являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n I_i^* \sum_{m=1}^{\infty} B_{im} \operatorname{Re} u_{imjl} = - \sum_{i=1}^n I_i^* \operatorname{Re} u_{i0jl}, \quad (2.101)$$

а константы u_{imjl} равны константам w_{imjl} при $\varepsilon_0 = 1/\mu_0$, $\varepsilon_r = 1/\mu_r$.

Найдем элементы L_{ij} матрицы погонной емкости \mathbf{L} , связывающей поток индукции Ψ_i через зазор между i -м проводником и экраном с токами I_i на проводниках формулой

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j. \quad (2.102)$$

Для этого запишем поток индукции, пронизывающий контур C_i , образованный i -м проводником единичной длины и экраном

$$\Psi_i = \int \mathbf{B} ds_i, \quad (2.103)$$

где ds_i – вектор элемента площади $dydz$. Подставляя выражение (2.83) в формулу (2.103) и используя теорему Стокса, получаем

$$\Psi_i = \int_{C_i} \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2.104)$$

Учитывая, что l -составляющая вектора \mathbf{A} на контуре C_i отлична от нуля только на проводнике, где она равна A_i , приходим к равенству

$$\Psi_i = A_i. \quad (2.105)$$

Поэтому формулу (2.102) можно переписать в виде

$$A_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j. \quad (2.106)$$

Если число проводников $n > 2$, то в качестве линейно независимых векторов токов $\mathbf{I}^{(k)}$ можно взять векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(1)} &= (-1, 1, 1, \dots, 1), \\ \mathbf{I}^{(2)} &= (1, -1, 1, \dots, 1), \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{I}^{(n)} &= (1, 1, 1, \dots, -1). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Для каждого вектора токов $\mathbf{I}^{(k)}$, задаваемого формулой (2.107), вычислим по формулам (2.100), (2.101) соответствующий ему вектор потенциалов $\mathbf{A}^{(k)}$. Подставляя (2.107) в систему уравнений (2.106) и решая ее, находим элементы матрицы погонной индуктивности

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-2} \left(\sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \right) - A_i^{(j)} \right]. \quad (2.108)$$

Сравнивая формулу (2.108) с формулой (2.78), а также формулы (2.107), (2.100), (2.101) соответственно с формулами (2.76), (2.74) (2.68) приходим к важной формуле

$$\mathbf{L}(\mu_0, \mu_{ri}) = \mathbf{C}^{-1}(\varepsilon_0, \varepsilon_{ri}) \Big|_{\varepsilon_0 = \mu_0^{-1}, \varepsilon_{ri} = \mu_{ri}^{-1}}. \quad (2.109)$$

Аналогичным образом можно доказать, что формула (2.109) справедлива и в случае $n \leq 2$.

Контрольные вопросы

14. Какие элементы в матрице погонной емкости многопроводной линии передачи отрицательны, а какие положительны?

15. В какой многопроводной линии передачи матрица погонной индуктивности обратно пропорциональна матрице погонной емкости?

16. Позволяет ли квазистатический расчет учесть диэлектрические, омические или магнитные потери в диэлектрическом заполнении?

3. ДОБРОТНОСТЬ

3.1. Добротность колебательной системы

Добротность произвольной колебательной системы есть безразмерная величина Q , определяемая формулой

$$Q = \omega W/P, \quad (3.1)$$

где ω – частота колебаний; W – запасенная системой энергия; P – усредненная по времени мощность потерь. Из определения (3.1) получается, в частности, известная формула

$$Q = \sqrt{L/C}/R \quad (3.2)$$

для добротности последовательного контура на его резонансной частоте.

Если колебательная система совершает свободные колебания, то их амплитуда убывает во времени. Для описания затухающих гармонических колебаний удобно использовать комплексную частоту

$$\omega = \omega' - i\omega'' \quad (3.3)$$

В этом случае зависимость от времени вещественной колеблющейся величины $A(t)$ (ток, напряжение, деформация и т. д.) описывается формулой

$$A(t) = \operatorname{Re}[A_0 e^{-i\omega t}] = |A_0| e^{-\omega'' t} \cos(\omega' t - \arg A_0), \quad (3.4)$$

где $A_0 = |A_0| e^{i \arg A_0}$ – комплексная амплитуда колебаний (начальная). Очевидно, что в случае затухающих колебаний частота ω в формуле (3.1) должна быть заменена на ω' .

Установим связь добротности Q с вещественной и мнимой частью комплексной частоты. Как известно, энергия, запасенная любой колебательной системой, пропорциональна квадрату модуля амплитуды колебаний. Поэтому, используя формулу (3.4), запасенную энергию можно записать в виде

$$W = \alpha |A_0|^2 e^{-2\omega'' t}, \quad (3.5)$$

где коэффициент α – константа, зависящая только от типа и параметров колебательной системы*.

* Например, в случае колебательного контура, когда $A(t)$ есть ток, коэффициент $\alpha = L/2$, где L – индуктивность.

Мощность потерь связана с запасенной энергией соотношением

$$P = -dW/dt. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в определение (3.1), получаем искомое соотношение

$$Q = \omega' / (2\omega''). \quad (3.7)$$

Колебательные системы обычно подключают к внешним нагрузкам. В этом случае мощность потерь

$$P = P_0 + P_e, \quad (3.8)$$

где P_0 – мощность потерь внутри колебательной системы; P_e – мощность потерь во внешней нагрузке. Тогда формулу (3.1) можно записать в виде

$$Q^{-1} = Q_0^{-1} + Q_e^{-1}, \quad (3.9)$$

где величину

$$Q_0 = \omega W / P_0 \quad (3.10)$$

называют собственной добротностью колебательной системы, а величину

$$Q_e = \omega W / P_e \quad (3.11)$$

называют внешней добротностью. Собственная добротность Q_0 характеризует свойства уединенной колебательной системы, а внешняя добротность Q_e характеризует величину связи колебательной системы с внешним окружением. Величину Q , описываемую формулой (3.9), называют нагруженной добротностью.

Формула (3.1) есть общее определение добротности, применимое к любой колебательной системе на любой частоте. Однако в некоторых случаях приходится иметь дело с двухполюсником, являющимся «черным ящиком», о котором известно только то, что его входное комплексное сопротивление описывается функцией

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = R - iX, \quad (3.12)$$

а обратная ему величина – входная комплексная проводимость – функцией*

$$Y_{\text{вх}}(\omega) = G - iB. \quad (3.13)$$

Величину $X(\omega)$ называют реактивным сопротивлением, а величину $B(\omega)$ – реактивной проводимостью. Обе эти величины называют реактансами.

* Знак перед мнимой единицей i в формулах (3.12), (3.13) выбран в соответствии со знаком в формуле (1.1).

Реактансы могут на некоторых частотах обращаться в нуль. Если на частоте ω_0 обращается в нуль X , то двухполюсник на этой частоте проявляет свойства последовательного колебательного контура, если же в нуль обращается B , то – параллельного.

Добротность двухполюсника на резонансной частоте ω_0 определяют формулой

$$Q = x/R \quad (3.14)$$

для случая последовательного резонанса и формулой

$$Q = b/G \quad (3.15)$$

для случая параллельного резонанса, где величина

$$x = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (3.16)$$

называется параметром крутизны реактивного сопротивления, а величина

$$b = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dB(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (3.17)$$

называется параметром крутизны реактивной проводимости.

Формулы (3.14)–(3.15) получаются из формулы (3.7) и резонансных условий $Z(\omega' - i\omega'') = 0$ и $Y(\omega' - i\omega'') = 0$. Не трудно убедиться, что для последовательного колебательного контура с входным сопротивлением

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = R - i\omega L + i/(\omega C) \quad (3.18)$$

и для параллельного колебательного контура с входной проводимостью

$$Y_{\text{вх}}(\omega) = 1/R - i\omega C + i/(\omega L) \quad (3.19)$$

выражения (3.14) и (3.15) дают правильную формулу (3.2) и потому согласуются с общим определением (3.1).

Термин «добротность» используется не только для описания колебательных систем, но и для описания линий передачи. Добротностью линии передачи называют добротность резонатора СВЧ, образованного из отрезка линии передачи.

Добротность линии передачи Q в случае гармонических колебаний с вещественной частотой ω связана с волновым числом k_z бегущей волны формулой

$$Q = k_z' / (2k_z''). \quad (3.20)$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим отрезок линии длиной l . За период колебания T фронты прямой и обратной волны пройдут путь vT , дважды претерпевая отражения на концах, и возвратятся на исходное место. Этот путь будет равен $2l$. Поэтому имеем

$$2l = \omega T / k'_z. \quad (3.21)$$

Пройдя расстояние $2l$, амплитуды бегущих волн станут

$$A(z, t+T) = A(z, t) e^{-k''_z 2l} = A_0 e^{-k''_z 2l}. \quad (3.22)$$

Из формул (3.21), (3.22) получаем закон убывания запасенной энергии

$$W(t) = W_0 e^{-2\omega t k''_z / k'_z}. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) и (3.6) в определение (3.1), получаем формулу (3.20).

Мощность потерь в линии передачи

$$P = P_d + P_c, \quad (3.24)$$

где P_d – мощность потерь в диэлектрическом заполнении линии, а P_c – мощность потерь в проводниках линии передачи. Тогда, согласно (3.1), обратную величину добротности линии можно представить в виде суммы

$$Q^{-1} = Q_d^{-1} + Q_c^{-1}, \quad (3.25)$$

где величину

$$Q_d = \omega W / P_d \quad (3.26)$$

называют добротностью диэлектрического заполнения линии, а величину

$$Q_c = \omega W / P_c \quad (3.27)$$

называют добротностью проводников линии.

Добротность Q_d есть усредненная характеристика материалов, заполняющих линию передачи. В однородной линии величина Q_d не зависит ни от конструкции, ни от размеров линии, а зависит только от тангенсов угла диэлектрических и магнитных потерь. В случае, когда однородное диэлектрическое заполнение не является магнитным, имеет место равенство

$$Q_d = \varepsilon'_r / \varepsilon''_r. \quad (3.28)$$

Равенство (3.28) получается из формул (1.20), (1.38) и (3.20) и предположения о малости тангенса угла диэлектрических потерь.

Добротность Q_c есть комплексная характеристика материала проводников и их конфигурации. Она обратно пропорциональна толщине скин-слоя материала проводника

$$\Delta = \sqrt{2/(\sigma\omega\mu_0\mu_r)}, \quad (3.29)$$

то есть Q_c возрастает с увеличением проводимости проводника σ и частоты ω . Отметим, что толщина скин-слоя меди на частоте 1 ГГц составляет $\Delta_{Cu} = 2.09$ мкм. С увеличением поперечных размеров линии передачи добротность проводников растет.

3.2. Плоский волновод

Для изучения влияния конечной проводимости проводников σ на распространение поперечных и квазипоперечных электромагнитных волн рассмотрим плоский волновод, поперечное сечение которого изображено на рис. 3.1.

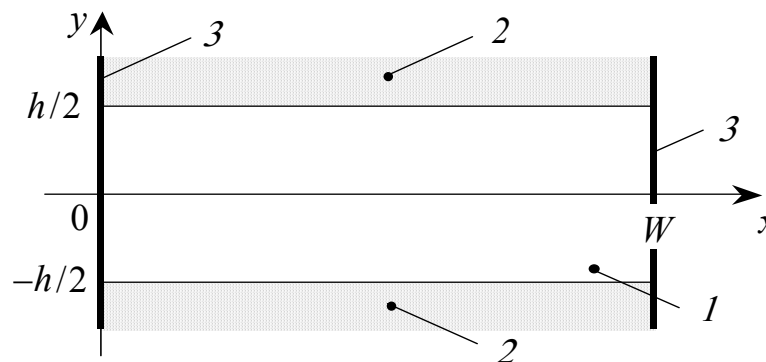


Рис. 3.1. Поперечное сечение плоского волновода:

1 – диэлектрическое заполнение; 2 – проводник; 3 – магнитная стенка

Волновод содержит два плоских горизонтальных бесконечно толстых проводника 2 с конечной проводимостью σ , ограничивающих электромагнитное поле в вертикальном направлении. В горизонтальном направлении поле ограничено двумя плоскими вертикальными магнитными стенками 3, на поверхности которых обращаются в нуль тангенциальные составляющие магнитного поля. Пространство, ограниченное проводниками и магнитными стенками заполнено немагнитным материалом 1 с диэлектрической проницаемостью ϵ_r .

Таким образом, плоский волновод есть не реальная линия передачи, используемая в технике СВЧ, а всего лишь упрощенная математическая модель. Эту модель часто используют для упрощенного описания отражения волн на нерегулярностях полосковых и микрополосковых линий передачи. Аппроксимацию полосковой или микрополосковой линии передачи плоским волноводом с тем же волновым сопротивлением и той же фазовой скоростью называют моделью Олинера.

Будем рассматривать бегущую гармоническую волну, сопровождаемую напряжением U на верхнем проводнике относительно нижнего проводника. Очевидно, что такая волна будет иметь поперечную составляющую электрического поля E_y . Эта составляющая направлена нормально к поверхности проводника.

Поэтому в случае идеального проводника на его поверхности согласно формуле (1.34) должны возникать поверхностные заряды ρ_s . Эти заряды, перемещаясь с фазовой скоростью v вдоль оси z , будут создавать поверхностные продольные токи J_z . Их направления на верхнем и нижнем проводниках будут противоположными.

В рассматриваемом случае, то есть при конечной проводимости проводника, вместо поверхностных токов J_z потекут объемные токи j_z . В свою очередь, объемные продольные токи j_z , согласно закону Ома (1.13), будут сопровождаться продольной составляющей электрического поля E_z , имеющей противоположные знаки на верхней и нижней половинах волновода.

Таким образом, конечная проводимость проводников приводит к появлению у Т-волны продольной составляющей электрического поля. Поэтому начнем решать уравнение Гельмгольца (1.23) для продольной составляющей электрического поля.

Так как волновод имеет горизонтальную плоскость симметрии, то достаточно записать решение лишь для верхней половины волновода ($y \geq 0$). Учтем, что зависимость E_z от координаты x должна иметь вид стоячей волны из-за отражения на вертикальных магнитных стенках. Зависимость от координаты y в области диэлектрического заполнения ($0 \leq y \leq h/2$) также должна иметь вид стоячей волны из-за симметричного расположения диэлектрика между двумя одинаковыми горизонтальными проводниками. Более того, она должна описываться нечетной функцией. Зависимость от координаты y в области верхнего проводника ($h/2 \leq y < \infty$) должна описываться бегущей вол-

ной, так как толщина проводника бесконечна и волне нет от чего отразиться. Итак, уравнение (1.23) имеет решение

$$E_z = \begin{cases} \sin k_y^{(1)} y [X_1 \cos k_x x + X_2 \sin k_x x] e^{ik_z z} & \text{при } 0 \leq y \leq h/2, \\ e^{ik_y^{(2)} y} [X_3 \cos k_x x + X_4 \sin k_x x] e^{ik_z z} & \text{при } h/2 \leq y < \infty, \end{cases} \quad (3.30)$$

где

$$k_y^{(1)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_r - k_x^2 - k_z^2}; \quad (3.31)$$

$$k_y^{(2)} = \sqrt{k_0^2 i\sigma / (\varepsilon_0 \omega) - k_x^2 - k_z^2} \approx (i+1)/\Delta; \quad (3.32)$$

Δ – толщина скин-слоя проводника, определяемая формулой (3.29). В выражении (3.32) была учтена высокая проводимость проводника σ .

Требую выполнение граничного условия (1.32) для E_z при $y=h/2$, исключаем в (3.30) два неизвестных параметра:

$$E_z = \begin{cases} \sin k_y^{(1)} y [X_1 \cos k_x x + X_2 \sin k_x x] e^{ik_z z} & \text{при } y \leq \frac{1}{2}h, \\ e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)} \sin k_y^{(1)} \frac{h}{2} [X_1 \cos k_x x + X_2 \sin k_x x] e^{ik_z z} & \text{при } y \geq \frac{1}{2}h. \end{cases} \quad (3.33)$$

Подставляя выражение (3.33) в равенство (1.27), получаем

$$H_y = \begin{cases} \frac{-i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r k_x \sin k_y^{(1)} y}{k_0^2 \varepsilon_r - k_z^2} [X_1 \sin k_x x - X_2 \cos k_x x] & \text{при } y \leq \frac{1}{2}h, \\ \frac{\sigma k_x e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)} \sin k_y^{(1)} \frac{h}{2}}{k_0^2 i\sigma / (\varepsilon_0 \omega) - k_z^2} [X_1 \sin k_x x - X_2 \cos k_x x] & \text{при } y \geq \frac{1}{2}h. \end{cases} \quad (3.34)$$

В этой формуле и в последующих формулах мы для краткости опускаем зависимость от координаты z .

Напряженность H_y является тангенциальной составляющей на поверхности магнитной стенки. Поэтому должны выполняться граничные условия

$$H_y|_{x=0} = 0, \quad H_y|_{x=W} = 0. \quad (3.35)$$

Отсюда находим

$$X_2 = 0, \quad k_x = \pi n/W \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в выражения (3.33) и (3.35) и ограничиваясь случаем $n=0$, имеем

$$E_z = \begin{cases} X_1 \sin k_y^{(1)} y & \text{при } y \leq \frac{1}{2} h, \\ X_1 \sin k_y^{(1)} \frac{h}{2} e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)} & \text{при } y \geq \frac{1}{2} h, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$H_y = 0. \quad (3.38)$$

После подстановки (3.37) в (1.26), (1.28) и (1.29) получаем остальные поперечные составляющие волны

$$H_x = \begin{cases} \frac{-i\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}{k_y^{(1)}} X_1 \cos k_y^{(1)} y & \text{при } y \leq \frac{1}{2} h, \\ \frac{i\sigma}{k_y^{(2)}} X_1 \sin k_y^{(1)} \frac{h}{2} e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)} & \text{при } y \geq \frac{1}{2} h, \end{cases} \quad (3.39)$$

$$E_y = \begin{cases} \frac{ik_z}{k_y^{(1)}} X_1 \cos k_y^{(1)} y & \text{при } y \leq \frac{1}{2} h, \\ \frac{-k_z}{k_y^{(2)}} X_1 \sin k_y^{(1)} \frac{h}{2} e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)} & \text{при } y \geq \frac{1}{2} h, \end{cases} \quad (3.40)$$

$$E_x = 0. \quad (3.41)$$

Составляющая H_x является тангенциальной составляющей на поверхности проводника. Поэтому она должна удовлетворять граничному условию (1.33) при $y=h/2$. Отсюда получаем дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg} k_y^{(1)} \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega k_y^{(2)}}{\sigma k_y^{(1)}} = 0. \quad (3.42)$$

Будем искать квази-Т-волну, полагая

$$1 \gg k_0 h \gg k_0 \Delta. \quad (3.43)$$

В этом случае $k_y^{(1)} h/2 \ll 1$ и уравнение (3.42) упрощается:

$$k_y^{(1)} \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega k_y^{(2)}}{\sigma k_y^{(1)}} = 0. \quad (3.44)$$

Подставляя выражения (3.31) и (3.32) в уравнение (3.44), получаем

$$k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon_r} \left[1 + (i+1) \frac{\Delta}{2h} \right]. \quad (3.45)$$

Отсюда по формуле (3.20) находим искомую добротность проводников для квази-Т-волны в плоском волноводе

$$Q_c = h/\Delta. \quad (3.46)$$

Приступим к вычислению волнового сопротивления. Полагая, что напряжение между верхним и нижним проводником равно U , из выражения (3.40) находим значение константы

$$X_1 = i \frac{U}{h} \frac{k_y^{(1)}}{k_z}. \quad (3.47)$$

Подставляя (3.47) в выражение (3.37), находим продольную составляющую электрического поля внутри верхнего проводника

$$E_z = i \frac{U}{2} \frac{k_y^{(1)2}}{k_z} e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)}. \quad (3.48)$$

Согласно закону (1.13) внутри проводника возникают объемные токи

$$j_z = i\sigma \frac{U}{2} \frac{k_y^{(1)2}}{k_z} e^{ik_y^{(2)}(y-h/2)}. \quad (3.49)$$

Интегрируя (3.49) по всей глубине проводника и учитывая (3.32), находим поверхностный ток

$$J_z = \int_{h/2}^{\infty} j_z dy = -\sigma \frac{U}{2} \frac{k_y^{(1)2}}{k_z k_y^{(2)}}. \quad (3.50)$$

Учитывая выражения (3.31), (3.32) и (3.45), получаем

$$J_z = \frac{1}{h + (i+1)\frac{\Delta}{2}} \frac{U}{Z_c}, \quad (3.51)$$

где Z_c – характеристическое сопротивление, определяемое формулой (1.45). Полный ток I получаем интегрированием (3.51) по ширине проводника

$$I = \int_0^W J_z dx = \frac{W}{h + (i+1)\frac{\Delta}{2}} \frac{U}{Z_c}. \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в определение (1.5) и пренебрегая толщиной скин-слоя Δ по сравнению с толщиной диэлектрического заполнения h , находим волновое сопротивление

$$Z = \frac{h}{W} Z_c. \quad (3.53)$$

3.3. Граничное условие Леонтовича

Рассматривая волны в плоском волноводе, мы получили общие формулы (3.30), (3.32), согласно которым тангенциальная составляющая электрического поля убывает в глубь проводника с конечной проводимостью σ по закону

$$\mathbf{E}_t(y) = \mathbf{E}_t e^{(i-1)y/\Delta}, \quad (3.54)$$

где Δ – толщина скин-слоя проводника. Эта составляющая сопровождается токами с объемной плотностью

$$\mathbf{j}_t(y) = \sigma \mathbf{E}_t e^{(i-1)y/\Delta}. \quad (3.55)$$

Интегрируя (3.55) по y от 0 до ∞ , получаем поверхностную плотность токов

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta}{1-i} \sigma \mathbf{E}_t. \quad (3.56)$$

Формулу (3.56) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}_t = (1-i) R_s \mathbf{J}, \quad (3.57)$$

где величина

$$R_s = 1/(\sigma \Delta) \quad (3.58)$$

называется поверхностным сопротивлением проводника. Из выражения (3.57) следует, что импеданс скин-слоя определяется формулой

$$Z_s = (1-i) R_s. \quad (3.59)$$

Учитывая, что поверхностный ток \mathbf{J} связан с тангенциальной составляющей магнитного поля \mathbf{H}_t граничным условием (1.37), формулу (3.57) можно, в свою очередь, представить в виде

$$\mathbf{E}_t = Z_s [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}]. \quad (3.60)$$

Формулу (3.60) называют граничным условием Леонтовича. Оно позволяет решать электродинамические задачи, не рассматривая электромагнитное поле внутри проводника. Это условие приближенное. Оно хорошо выполняется, когда $\lambda \gg \Delta$.

3.4. Закон приращения индуктивности

В общем случае комплексное сопротивление любого проводника имеет активную и реактивную части. Его погонную величину записывают в виде суммы

$$Z_i = R_i - iX_i. \quad (3.61)$$

Согласно формуле (2.3) погонное комплексное сопротивление i -го идеального проводника для m -й квазипоперечной электромагнитной волны есть

$$Z_i^{m0} = -i\omega L_i^m, \quad (3.62)$$

где

$$L_i^m = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_{km} / I_{im} \quad (3.63)$$

– эффективная погонная индуктивность i -го проводника для m -й волны. Это сопротивление не содержит активной части.

При конечной проводимости проводников погонное комплексное сопротивление получает некоторое приращение ΔZ_i^m и становится равным

$$Z_i^m = -i\omega L_i^m + \Delta Z_i^m. \quad (3.64)$$

Поэтому активная часть сопротивления Z_i^m есть активная часть его приращения ΔZ_i^m . Однако, согласно формуле (3.57), вещественная часть приращения ΔZ_i^m должна равняться его мнимой части. Поэтому активная часть погонного комплексного сопротивления i -го проводника для m -й волны есть

$$R_i = \omega \Delta L_i^m, \quad (3.65)$$

где ΔL_i^m – приращение эффективной погонной индуктивности в результате появления конечной проводимости. Формула (3.65) получила название закона приращения индуктивности.

3.5. Добротность проводников линии передачи для квази-Т-волн

Опираясь на закон приращения индуктивности, установим связь добротности проводников Q_c с волновым сопротивлением

$$Z_{im} = U_{im}/I_{im}. \quad (3.66)$$

Согласно уравнению (2.12) и определению (3.63) эффективная погонная индуктивность L_i^m i -го проводника для m -й волны связана с соответствующим волновым сопротивлением Z_{im} формулой

$$L_i^m = \frac{k'_m}{\omega} Z_{im}. \quad (3.67)$$

Таким образом, формулу (3.65) переписываем в виде

$$R_i = k'_m \Delta Z_{im}, \quad (3.68)$$

где ΔZ_{im} – приращение волнового сопротивления линии передачи в результате замены бесконечной проводимости проводников на конечную проводимость.

Далее для упрощения расчетов будем предполагать, что линия передачи двухпроводная. Тогда индексы i и m можно опустить.

Закон сохранения энергии электромагнитной волны в линии передачи выражается формулой

$$-\partial P/\partial z = W, \quad (3.69)$$

где усредненная по времени мощность, переносимая электромагнитной волной в точке z , есть

$$P(z) = \frac{1}{2} Z I_0^2 e^{-2k''_z z}, \quad (3.70)$$

погонная мощность омических потерь в проводниках есть

$$W(z) = \frac{1}{2} R I_0^2 e^{-2k''_z z}, \quad (3.71)$$

I_0 – амплитуда тока волны в точке $z=0$.

Подставляя выражения (3.70), (3.71) и (3.68) в равенство (3.69), получаем

$$k''_z Z = \frac{1}{2} k'_z \Delta Z. \quad (3.72)$$

Отсюда по формуле (3.20) находим

$$Q_c = Z/\Delta Z. \quad (3.73)$$

Эта формула выражает добротность проводников двухпроводной линии передачи для поперечных и квазипоперечных электромагнитных волн через относительное изменение волнового сопротивления, обусловленное проникновением токов в глубь проводников.

Абсолютную величину изменения волнового сопротивления ΔZ можно получить как приращение волнового сопротивления в результате перемещения поверхностных токов в глубь проводников на половину толщины скин-слоя:

$$\Delta Z = \frac{\Delta}{2} \sum_i \frac{\partial Z}{\partial n_i}, \quad (3.74)$$

где производные вычисляются по нормалям ко всем поверхностям пары проводников, i – индексы поверхностей. Подставляя (3.74) в (3.73), получаем искомую формулу

$$Q_c = \frac{2}{\Delta} Z \left/ \sum_i \frac{\partial Z}{\partial n_i} \right. . \quad (3.75)$$

Проверим правильность общей формулы (3.75) на примере плоского волновода. Согласно формуле (3.53)

$$\sum_i \frac{\partial Z}{\partial n_i} = 2 \frac{\partial Z}{\partial h} = \frac{2Z_c}{W}. \quad (3.76)$$

Подставляя (3.53) и (3.76) в общее выражение (3.75), получаем формулу (3.46). Это подтверждает правильность общей формулы (3.75) и, в частности, правильность предположения о том, что индуктивность проводников с экспоненциально затухающими объемными токами равна индуктивности проводников с поверхностными токами, протекающими под поверхностями проводников на глубине половины толщины скин-слоя.

Аналогичным образом получим формулу для добротности проводников коаксиальной линии. Подставляя (1.46) в (3.75), имеем

$$Q_c = \frac{2r_2}{\Delta} \frac{\ln(r_2/r_1)}{1 + r_2/r_1}. \quad (3.77)$$

Видно, что добротность Q_c пропорциональна радиусу внешнего проводника и обратно пропорциональна толщине скин-слоя. Зависимость $Q_c(r_2/r_1)$ имеет максимум, когда $1 + r_1/r_2 = \ln(r_2/r_1)$, то есть при $r_2/r_1 \approx 3.591$.

При максимальной добротности волновое сопротивление воздушной коаксиальной линии равно $76.66/\sqrt{\epsilon_r}$ Ом.

Контрольные вопросы

17. Чем отличаются собственная добротность, внешняя добротность и нагруженная добротность колебательной системы?
18. Как ведут себя реактансы двухполюсника на резонансной частоте?
19. Какую размерность имеют параметры крутизны реактансов?
20. Запишите формулу, связывающую добротность линии передачи с волновым числом.
21. Как зависит толщина скин-слоя проводника от частоты, проводимости и магнитной проницаемости?
22. Запишите формулу для добротности проводников и волнового сопротивления плоского волновода.
23. Как зависит волновое сопротивление микрополосковой линии от ширины полоскового проводника и от диэлектрической проницаемости подложки?
24. Как зависит добротность микрополосковой линии от толщины подложки?
25. Запишите формулу для поверхностного импеданса проводника.
26. Запишите формулу, связывающую тангенциальные составляющие напряженностей электрического и магнитного поля на поверхности проводника (неидеального).
27. Запишите и прокомментируйте формулу, выражающую закон прращения индуктивности.
28. Запишите и прокомментируйте формулу, по которой можно вычислить добротность проводников линии передачи, зная ее волновое сопротивление.

4. МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМ

4.1. Матричное описание многополюсников

Устройство СВЧ в обобщенном виде можно представить в виде многополюсника, который состоит обычно из нескольких компонентов, соединенных определенным образом между собой с помощью отрезков линий передачи. Такие схемы могут описываться напряжениями и токами на входах устройства или нормированными волновыми переменными.

Большинство компонентов СВЧ имеют один вход и один выход, то есть являются четырехполюсниками. В англоязычной литературе принято указывать не количество полюсов, а количество пар полюсов, то есть число портов (плеч). Поэтому термину «четыреполюсник» соответствует термин *two-port network*.

Каскадное соединение четырехполюсников (см. рис. 4.1) удобно описывать с помощью классической матрицы передачи, которую также называют цепной матрицей, или $ABCD$ -матрицей, или $ABCD$ -параметрами. Для четырехполюсника $ABCD$ -параметры определяются равенством

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Они связывают напряжение U_1 и ток I_1 на входе четырехполюсника с напряжением U_2 и током I_2 на выходе.

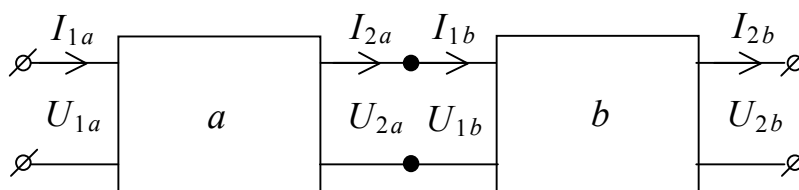


Рис. 4.1. Каскадное соединение четырехполюсников a и b

При каскадном соединении четырехполюсников (рис. 4.1) вытекающий из четырехполюсника a ток I_{2a} является втекающим током I_{1b} четырехполюсника b . Поэтому $ABCD$ -матрица каскадного соединения четырехполюсников a и b выражается формулой

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_b. \quad (4.2)$$

Из $ABCD$ -матрицы могут быть найдены различные характеристики схемы. Входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = (AZ_{\text{наг}} + B)/(CZ_{\text{наг}} + D), \quad (4.3)$$

где сопротивление нагрузки $Z_{\text{наг}} = U_2/I_2$.

Выходное сопротивление

$$Z_{\text{вых}} = (DZ_{\text{ист}} + B)/(CZ_{\text{ист}} + A), \quad (4.4)$$

где внутреннее сопротивление источника $Z_{\text{ист}} = (E_{\text{ист}} - U_1)/I_1$.

Отметим, что отрезок линии передачи длиной l с волновым сопротивлением Z имеет матрицу передачи

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -iZ \sin \theta \\ -iZ^{-1} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\theta = k_z l \quad (4.6)$$

– электрическая длина отрезка.

Иногда используют нормированные $ABCD$ -параметры, задаваемые формулой

$$[ABCD]_{\text{н}} = \begin{bmatrix} A & B/Z_0 \\ CZ_0 & D \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

где Z_0 – нормирующее сопротивление. Все элементы нормированной матрицы безразмерны. Часто нормирующим сопротивлением Z_0 является волновое сопротивление линий передачи, подсоединенных к четырехполюснику.

Для $ABCD$ -матрицы используют и другие обозначения:

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Нормированные матрицы передачи обозначают как

$$[ABCD]_{\text{н}} = [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Матрицу передачи используют и для описания $4n$ -полюсников, содержащих n входов и n выходов (см. рис. 4.2). В этом случае у $4n$ -полюсника будут n входных токов и n выходных токов. Обозначая совокупности входных и выходных токов n -мерными векторами \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 , а отвечающие им совокуп-

ности напряжений – n -мерными векторами \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 , определение матрицы передачи $4n$ -полюсника можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

где матричные элементы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} являются матрицами размерности $n \times n$.

Классические матрицы передачи удобны при описании каскадных соединений $4n$ -полюсников и, в частности, четырехполюсников. При описании на СВЧ иных соединений или более сложных многополюсников преимущество $ABCD$ -параметров теряется.

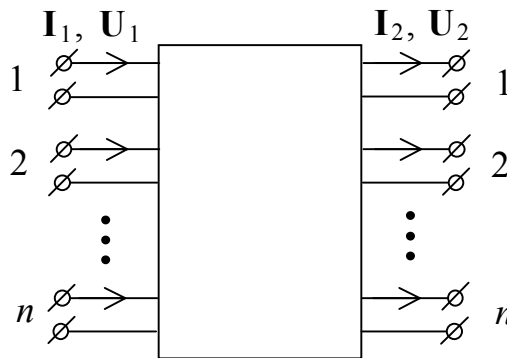


Рис. 4.2. Токи и напряжения в $4n$ -полюснике

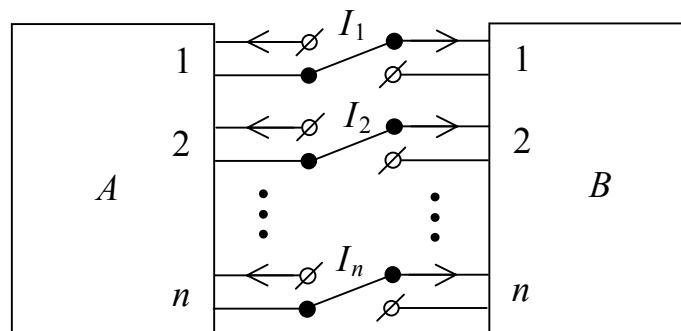


Рис. 4.3. Последовательное соединение многополюсников

При последовательном соединении многополюсников (см. рис. 4.3) удобно пользоваться матрицей сопротивлений, или Z -матрицей, или импедансной матрицей. Эта матрица описывает связь между напряжениями U_i и втекающими токами I_i на всех входах многополюсника ($i = 1, 2, \dots, n$), выражаемую формулой

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Матрица сопротивлений многополюсника, полученного последовательным соединением двух одностипных многополюсников A и B , есть

$$[Z] = [Z]_A + [Z]_B, \quad (4.12)$$

где $[Z]_A$ и $[Z]_B$ – матрицы сопротивлений исходных многополюсников.

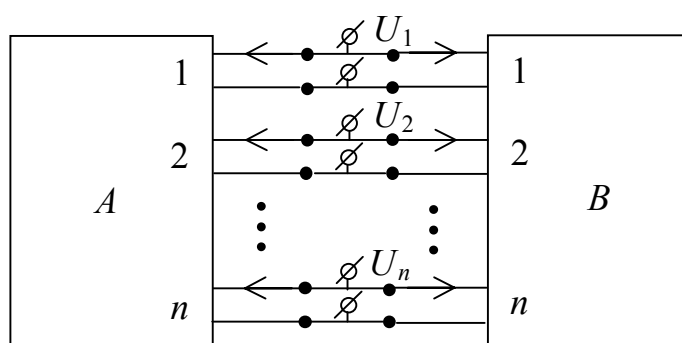


Рис. 4.4. Параллельное соединение многополюсников

При параллельном соединении многополюсников (см. рис. 4.4) удобно пользоваться матрицей проводимостей, или Y -матрицей, или адмитансной матрицей. Эта матрица описывает связь между напряжениями U_i и втекающими токами I_i на всех входах многополюсника ($i=1,2,\dots,n$), выражаемую формулой

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Матрица проводимостей многополюсника, полученного параллельным соединением двух одностипных многополюсников A и B , есть

$$[Y] = [Y]_A + [Y]_B, \quad (4.14)$$

где $[Y]_A$ и $[Y]_B$ – матрицы проводимостей исходных многополюсников.

Смешанное соединение четырехполюсников бывает последовательно-параллельным и параллельно-последовательным. При последовательно-

параллельном соединении четырехполюсников (рис. 4.5) удобно использовать H -матрицу, которая связывает напряжение первого входа и ток второго входа с напряжением второго входа и током первого формулой

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_1 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Параметры четырехполюсника, полученного последовательно-параллельным соединением четырехполюсников A и B , рассчитываются по формуле

$$[H] = [H]_A + [H]_B. \quad (4.16)$$

При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников (рис. 4.6) удобно использовать G -матрицу, которая связывает ток первого входа и напряжение второго входа с током второго входа и напряжением первого формулой

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} I_2 \\ U_1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Параметры четырехполюсника, полученного параллельно-последовательным соединением четырехполюсников A и B , рассчитываются по формуле

$$[G] = [G]_A + [G]_B. \quad (4.18)$$

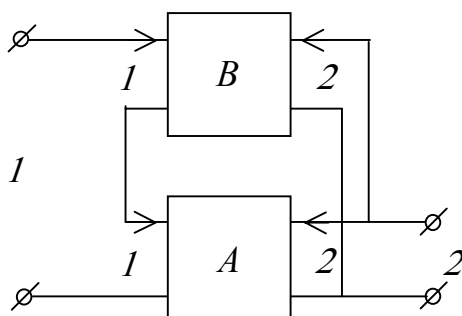


Рис. 4.5. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников

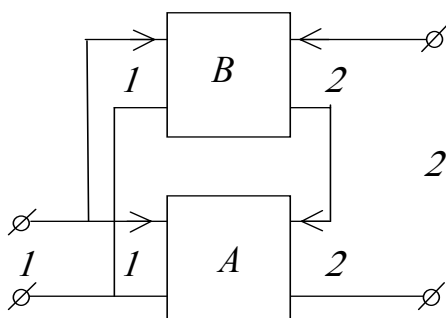


Рис. 4.6. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников

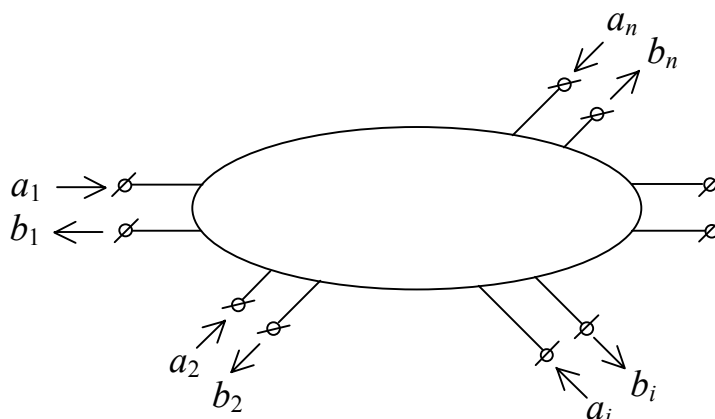


Рис. 4.7. Нормированные напряжения входящих и выходящих волн в многполюснике

Универсальным методом анализа схем СВЧ является метод, основанный на использовании матриц рассеяния, или S -матриц. Матрица рассеяния определяет взаимосвязь между нормированными напряжениями входящих и выходящих волн, которые определяются формулами

$$a_i = U_i^+ / \sqrt{Z_i}, \quad b_i = U_i^- / \sqrt{Z_i}, \quad (4.19)$$

где U_i^+ и U_i^- – напряжения входящей и выходящей волны на i -й паре полюсов; Z_i – волновое сопротивление линии передачи, соединенной с i -й парой полюсов (см. рис. 4.7). Таким образом, размерность квадратов нормированных напряжений a_i и b_i равна размерности мощности. Нормированные напряжения a_i и b_i называют также волновыми переменными.

В случае четырехполюсника ($i=1, 2$) S -матрица, или матрица рассеяния, следующим образом связывает нормированные напряжения b_i и a_i :

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \quad (4.20)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2.$$

В общем случае для схемы с n парами полюсов имеем

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}, \quad (4.21)$$

где \mathbf{S} – матрица размером $n \times n$, называемая матрицей рассеяния.

Средняя мощность на i -м входе может быть найдена из (4.19). Для этого напряжение и ток для i -й пары полюсов запишем в виде

$$U_i = U_i^+ + U_i^- = (a_i + b_i)\sqrt{Z_i}, \quad (4.22)$$

$$I_i = I_i^+ - I_i^- = (a_i - b_i)/\sqrt{Z_i}.$$

Мощность на i -м входе определяется формулой

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_i I_i^*) = \frac{1}{2} (a_i a_i^* - b_i b_i^*). \quad (4.23)$$

Отсюда видно, что мощность P_i равна разности мощностей падающей $\frac{1}{2} a_i a_i^*$ и отраженной $\frac{1}{2} b_i b_i^*$ волн на i -м входе.

Для пассивных цепей без потерь закон сохранения энергии выражается формулой

$$\sum_{i=1}^n |S_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n S_{ij} S_{ij}^* = 1. \quad (4.24)$$

Рассмотренная S -матрица не удобна для анализа схем, состоящих из каскадно соединенных четырехполюсников. В этих случаях S -матрица может быть преобразована в $ABCD$ -матрицу. Однако возможен и другой путь анализа каскадных схем, при котором используется новый набор параметров рассеяния на основе волновых переменных a_i и b_i со свойствами, аналогичными свойствам $ABCD$ -матриц относительно умножения матриц при каскадировании. Новый набор параметров четырехполюсника, называемый волновой матрицей передачи, или T -матрицей, определяется равенством*

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Параметры T -матрицы называют T -параметрами.

Параметры различных матриц многополюсника взаимосвязаны. Для четырехполюсника связь параметров S -матрицы с параметрами $ABCD$ -матрицы выражается формулами

$$\begin{aligned} A &= (1 + S_{11} - S_{22} - \Delta S) \sqrt{Z_1/Z_2} / (2S_{21}), \\ B &= (1 + S_{11} + S_{22} + \Delta S) \sqrt{Z_1 Z_2} / (2S_{21}), \\ C &= (1 - S_{11} - S_{22} + \Delta S) / (2\sqrt{Z_1 Z_2} S_{21}), \\ D &= (1 - S_{11} + S_{22} - \Delta S) \sqrt{Z_2/Z_1} / (2S_{21}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где Z_1 и Z_2 – нормирующие сопротивления для S -параметров на входах 1 и 2 соответственно, а

* Встречается и иное определение T -матрицы, отличающееся нумерацией волновых переменных.

$$\Delta S = S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}. \quad (4.27)$$

Заметим, что если $S_{21} = 0$, то $ABCD$ -параметры становятся неопределенными. Параметр S_{21} представляет собой коэффициент прямой передачи, и в цепях СВЧ он редко бывает равным нулю.

Обратный переход выражается формулами

$$S_{11} = \frac{AZ_2 + B - CZ_1Z_2 - DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1}, \quad S_{12} = \frac{2(AD - BC)\sqrt{Z_1Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1}, \quad (4.28)$$

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_1Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1}, \quad S_{22} = \frac{-AZ_2 + B - CZ_1Z_2 + DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1}.$$

Для многополюсника уравнения перехода от Z -матрицы к S -матрице можно записать в матричной форме

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{Y}_0}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0)^{-1}\sqrt{\mathbf{Z}_0}, \quad (4.29)$$

где \mathbf{Z}_0 и \mathbf{Y}_0 – диагональные матрицы с элементами Z_1, Z_2, \dots, Z_n и $1/Z_1, 1/Z_2, \dots, 1/Z_n$ представляют собой нормирующие сопротивления различных входов схемы.

Обратный переход можно выполнить по формуле

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I} + \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\sqrt{\mathbf{Z}_0}, \quad (4.30)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Аналогичные формулы для перехода от Y -матрицы к S -матрице и обратно имеют вид

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y})(\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y})^{-1}\sqrt{\mathbf{Y}_0}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\mathbf{Y}_0}(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}\sqrt{\mathbf{Y}_0}.$$

Для T - и S -матриц формулы перехода имеют вид

$$T_{11} = (-S_{11}S_{22} + S_{12}S_{21})/S_{21},$$

$$T_{12} = S_{11}/S_{21},$$

$$T_{21} = S_{22}/S_{21},$$

$$T_{22} = 1/S_{21} \quad (4.32)$$

и

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= T_{12}/T_{22}, \\
 S_{12} &= T_{11} - T_{12}T_{21}/T_{22}, \\
 S_{21} &= 1/T_{22}, \\
 S_{22} &= -T_{21}/T_{22}.
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

При расчете цепей, получаемых каскадным соединением четырехполюсников, преобразование S -матриц в T -матрицы более предпочтительно, чем в $ABCD$ -матрицу по следующим причинам. Вычислительные затраты при преобразовании $ABCD$ -параметров оказываются несколько меньшими, чем при преобразовании S -матриц в T -матрицы. Кроме того, T -матрицы определяются через волновые переменные, нормированные относительно волновых сопротивлений точно так же, как и S -матрицы. Это облегчает переход от одного типа описания схемы к другому.

В общем случае матричные элементы любой матрицы многополюсника являются независимыми. Однако в ряде случаев они бывают связаны некоторыми уравнениями.

Многополюсник называют взаимным, если он подчиняется принципу взаимности для двух любых входов при произвольных режимах на остальных входах.

Принцип взаимности (обратимости) гласит: если некоторая ЭДС в цепи одного из входов многополюсника вызывает в цепи другого короткозамкнутого входа электрический ток, то при перемещении этого источника ЭДС в цепь второго входа в цепи первого короткозамкнутого входа появляется точно такой же электрический ток. Этот принцип можно сформулировать следующим равенством:

$$I_2/U_1 = I_1/U_2. \tag{4.34}$$

Из равенства (4.34) следует, что элементы $ABCD$ -матрицы взаимного многополюсника удовлетворяют условию

$$AD - BC = 1. \tag{4.35}$$

Для S - и T -матриц это условие эквивалентно равенствам

$$S_{ij} = S_{ji}, \tag{4.36}$$

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1. \tag{4.37}$$

Формула (4.34), выражающая принцип взаимности, является частным случаем некоторых общих соотношений, изучаемых в статистической физике, которые называют соотношениями взаимности Онсагера для обобщенной восприимчивости. Эти соотношения вытекают из инвариантности уравнений движения физической системы относительно обращения знака времени с одновременным изменением знака магнитного поля.

Принцип взаимности, согласно соотношениям взаимности Онсагера, распространяется лишь на те системы, которые описываются физическими уравнениями, являющимися инвариантными относительно инверсии знака времени. Это значит, что он не работает в системах, содержащих гиротропные среды. Поэтому принцип взаимности нарушается в устройствах СВЧ, содержащих ферриты и другие ферромагнитные материалы, а также плазму, в том числе и полупроводниковую, когда она находится в магнитном поле. Невзаимными устройствами СВЧ являются ферритовый вентиль, ферритовый циркулятор, некоторые устройства на поверхностных магнитостатических волнах и др.

Многополюсник называют симметричным, если перенумерация его входов не приводит к изменению параметров его матриц. Различают геометрическую и электрическую симметрию. Электрическая симметрия, не являющаяся следствием геометрической симметрии, достигается специальным подбором номиналов элементов многополюсника и не является априорно устанавливаемой. Напротив, геометрическая симметрия может быть установлена заранее, то есть без расчета.

Элементы $ABCD$ -матрицы симметричного четырехполюсника удовлетворяют условию

$$A = D. \quad (4.38)$$

Для симметричного четырехполюсника симметрия S - и T -матриц выражается формулами

$$S_{11} = S_{22}, \quad (4.39)$$

$$T_{21} = -T_{12}. \quad (4.40)$$

4.2. Расчет $ABCD$ -матрицы отрезка связанных многопроводных линий

Рассмотрим отрезок связанных многопроводных линий передачи для квазипоперечных волн (см. рис. 4.8). Пусть он содержит n незаземленных проводников и один заземленный провод (не отображен).

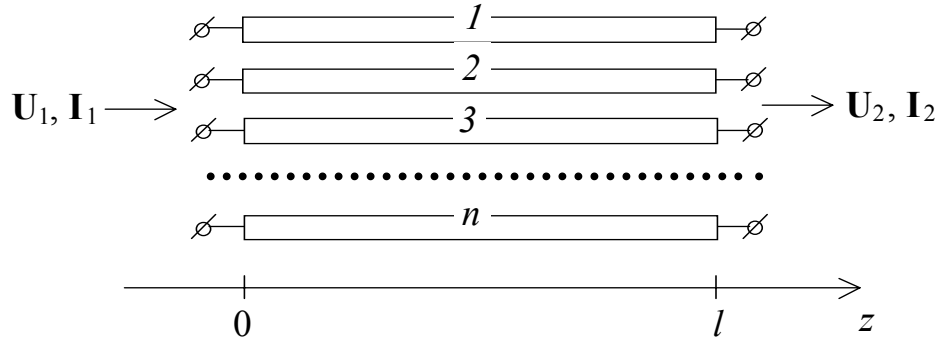


Рис. 4.8. Отрезок связанных многопроводных линий передачи

Как мы уже знаем, в случае четырехполюсника напряжение U_1 и ток I_1 на входе 1 отрезка линии связаны с напряжением U_2 и током I_2 на выходе 2 с помощью $ABCD$ -матрицы равенством (4.1). При этом напряжения U_1 , U_2 и токи I_1 , I_2 , а также параметры A , B , C и D являются обычными числами, то есть скалярными величинами.

Рассчитаем $ABCD$ -матрицу для случая n -проводного отрезка линии передачи. В рассматриваемом случае напряжения U_1 , U_2 и токи I_1 , I_2 являются уже векторами, i -е составляющие которых равны напряжениям U_{1i} , U_{2i} и токам I_{1i} , I_{2i} на i -м проводнике. Поэтому параметры A , B , C и D будут матрицами.

Выбирая отсчет фазы в точке $z=l$, формулы (1.53) для распределения тока и напряжения перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_i(z) &= \sum_{m=1}^n \left[I_{im} X_m^{\text{пад}} e^{ik_m(z-l)} + I_{im} X_m^{\text{отр}} e^{-ik_m(z-l)} \right], \\ U_i(z) &= \sum_{m=1}^n \left[U_{im} X_m^{\text{пад}} e^{ik_m(z-l)} - U_{im} X_m^{\text{отр}} e^{-ik_m(z-l)} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Используя (4.41) при $z=0$ и $z=l$, получаем

$$\begin{aligned}
U_{1i} &= \sum_{m=1}^n U_{im} \left[X_m^- \cos \theta_m - i X_m^+ \sin \theta_m \right], \\
I_{1i} &= \sum_{m=1}^n I_{im} \left[X_m^+ \cos \theta_m - i X_m^- \sin \theta_m \right],
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
U_{2i} &= \sum_{m=1}^n U_{im} X_m^-, \\
I_{2i} &= \sum_{m=1}^n I_{im} X_m^+,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

где

$$X_m^\pm = X_m^{\text{пад}} \pm X_m^{\text{отр}}, \quad \theta_m = k_m l. \tag{4.44}$$

Уравнения (4.42), (4.43) можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \cos \boldsymbol{\theta} & -i \mathbf{U} \sin \boldsymbol{\theta} \\ -i \mathbf{I} \sin \boldsymbol{\theta} & \mathbf{I} \cos \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^- \\ \mathbf{X}^+ \end{bmatrix}, \tag{4.45}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^- \\ \mathbf{X}^+ \end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

где

$$\mathbf{U} = [U_{im}], \quad \mathbf{I} = [I_{im}], \quad \mathbf{X}^\pm = [X_m^\pm], \tag{4.47}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Из (4.46) находим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^- \\ \mathbf{X}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

Подставляя (4.49) в (4.45), получаем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \cos \boldsymbol{\theta} \mathbf{U}^{-1} & -i \mathbf{U} \sin \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}^{-1} \\ -i \mathbf{I} \sin \boldsymbol{\theta} \mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \cos \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

Сравнивая (4.50) с (4.1), находим искомую $ABCD$ -матрицу n -проводного отрезка линии передачи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \cos \boldsymbol{\theta} \mathbf{U}^{-1} & -i \mathbf{U} \sin \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}^{-1} \\ -i \mathbf{I} \sin \boldsymbol{\theta} \mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \cos \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

4.3. Связь между $ABCD$ -матрицей и S -матрицей $4n$ -полюсника

Выразим S -матрицу $4n$ -полюсника через его $ABCD$ -матрицу. Для этого матричное уравнение (4.10), связывающее напряжение \mathbf{U}_1 и ток \mathbf{I}_1 на n входах $4n$ -полюсника с векторами напряжения \mathbf{U}_2 и тока \mathbf{I}_2 на его n выходах, распишем покомпонентно:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{U}_2 + \mathbf{B} \mathbf{I}_2, \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{C} \mathbf{U}_2 + \mathbf{D} \mathbf{I}_2.\end{aligned}\quad (4.52)$$

Выразим в (4.52) напряжения и токи через волновые переменные:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_0^{1/2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) &= \mathbf{A} \mathbf{Z}_0^{1/2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) + \mathbf{B} \mathbf{Z}_0^{-1/2}(-\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2), \\ \mathbf{Z}_0^{-1/2}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) &= \mathbf{C} \mathbf{Z}_0^{1/2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) + \mathbf{D} \mathbf{Z}_0^{-1/2}(-\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2).\end{aligned}\quad (4.53)$$

где \mathbf{Z}_0 – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны волновым сопротивлениям линий на входах и выходах $4n$ -полюсника. Решая эту систему матричных уравнений, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right]^{-1} \left[-(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right] \mathbf{a}_1 + \\ &+ \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{C}) \right] \mathbf{a}_2,\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2 &= 2(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{a}_1 + (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \times \\ &\times (-\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{C}) \mathbf{a}_2.\end{aligned}$$

Отсюда получаем искомую S -матрицу для $4n$ -полюсника

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},\quad (4.55)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{11} &= \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right]^{-1} \left[-(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right], \\ \mathbf{S}_{12} &= \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B})^{-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{C}) \right],\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$\mathbf{S}_{21} = 2(\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1},$$

$$\mathbf{S}_{22} = (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{C})^{-1} (-\mathbf{A} + \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{C}).$$

4.4. Расчет S -матрицы микрополоскового решетчатого фильтра

Микрополосковый решетчатый фильтр представляет собой отрезок связанных микрополосковых линий. Каждый полосковый проводник такого отрезка является микрополосковым резонатором. Все микрополосковые резонаторы фильтра электромагнитно связаны между собой по всей их длине. Вход и выход фильтра подключаются непосредственно к проводникам крайних резонаторов, как показано на рис. 4.9. Такое подключение резонаторов называют кондуктивным. Как и во всяком фильтре, каждый из его микрополосковых резонаторов настроен с учетом влияния всех его связей на центральную частоту полосы пропускания. В частности это может достигаться путем регулирования ширины полосковых проводников.

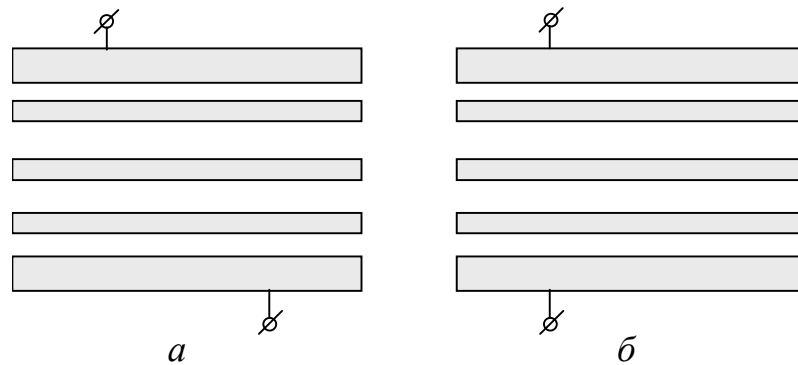


Рис. 4.9. Микрополосковый решетчатый фильтр:

a – диагональное кондуктивное подключение; b – смежное кондуктивное подключение

Как видно из рис. 4.9, существуют два способа симметричного подключения решетчатого фильтра – диагональный и смежный. Мы будем рассматривать случай диагонального кондуктивного подключения фильтра. Такое подключение, как показывают исследования, обеспечивает более симметричные склоны полосы пропускания.

Микрополосковый решетчатый фильтр наиболее просто можно рассчитать, используя приближенную модель (рис. 4.10), которая содержит три каскадно соединенных отрезка связанных микрополосковых линий. На схеме вытянутые прямоугольники изображают протяженные проводники отрезков микрополосковых линий. Два прямоугольника с разрывом – сверху и внизу – изображают подводящие линии внешнего тракта СВЧ. Сплошными линиями показаны соединения протяженных проводников. Эти соединительные линии имеют нулевую физическую длину. Свободные концы проводников отрезков

замкнуты на емкости C_j . Эти емкости моделируют эффективные концевые емкости разомкнутых концов полосковых проводников. Их величина определяется шириной проводника W , толщиной подложки h и диэлектрической проницаемостью ϵ_r ее материала.

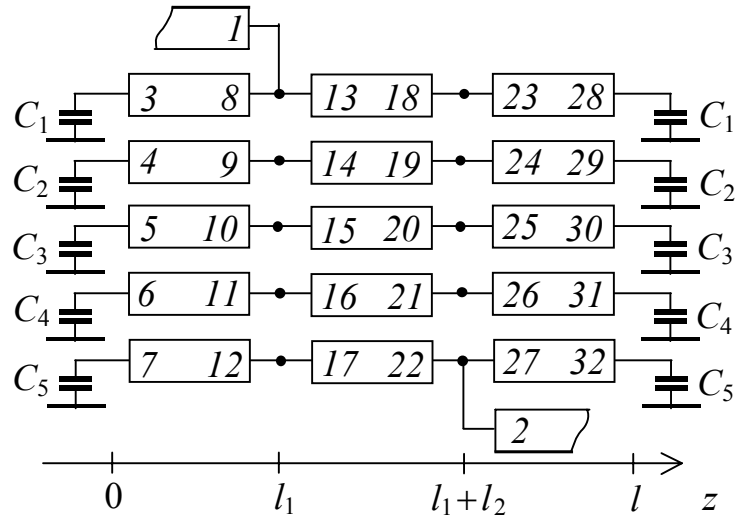


Рис. 4.10. Расчетная модель микрополоскового решетчатого фильтра

Пусть на верхний вход фильтра, который обозначен цифрой 1 , падает волна заданной амплитуды a_1 . Этой амплитуде отвечает напряжение и ток на входе 1

$$U_1 = a_1 \sqrt{Z_1}, \quad I_1 = a_1 / \sqrt{Z_1}, \quad (4.57)$$

где Z_1 – волновое сопротивление линии на входе 1 . На нижний вход фильтра, который обозначен цифрой 2 , падает волна амплитудой a_2 . Этой амплитуде отвечает напряжение и ток

$$U_2 = a_2 \sqrt{Z_2}, \quad I_2 = a_2 / \sqrt{Z_2}, \quad (4.58)$$

где Z_2 – волновое сопротивление линии на входе 2 . Напомним, что положительные направления токов на входах направлены внутрь четырехполюсника.

Падающие на фильтр волны a_1 и a_2 вызывают в подводящих линиях отраженные волны b_1 и b_2 , а также вызывают в каждом проводнике фильтра по две волны, распространяющиеся в противоположные направления. Прономеруем все вторичные волны, начиная с b_1 и b_2 , как показано на рис. 4.10. Амплитуды вторичных волн обозначим X_i , где $i = 1, 2, \dots, 32$. Номера волн, распространяющихся слева направо, расположим на левом конце проводни-

ка, а номера волн, распространяющихся справа налево, расположим в правом конце проводника.

Следует иметь в виду, что если проводник принадлежит отрезку связанных микрополосковых линий, то волна, номер которой расположен на этом проводнике, распространяется одновременно и по всем остальным проводникам этого отрезка.

Приступим к написанию системы уравнений для амплитуд X_i . Положительное направление для всех токов на проводниках отрезков связанных микрополосковых линий выберем слева направо, то есть вдоль оси z . Начнем с емкостей C_i , подключенных к левому краю левого пятипроводного отрезка. Все эти емкости имеют координату $z=0$.

Сформулируем сначала уравнение для произвольной емкости C , подключенной к левому краю какого-либо проводника. Заряд Q на емкости C , находящейся под напряжением U , выражается формулой

$$Q = CU. \quad (4.59)$$

Так как ток I на левом конце проводника является током разряда емкости, то он связан с Q равенством

$$I = -\partial Q / \partial t. \quad (4.60)$$

Подставляя (4.59) в (4.60) и учитывая временную зависимость (1.1), получаем общее уравнение для левого конца проводника, замкнутого на емкость

$$I - i\omega CU = 0. \quad (4.61)$$

В соответствии с общим уравнением (4.61) записываем первые пять уравнений для емкостей C_i ($i=1, 2, \dots, 5$), подключенных к левому краю пятипроводного отрезка, то есть для точек $z=0$:

$$\sum_{m=1}^5 [(I_{im} - i\omega C_i U_{im}) X_{2+m} + (I_{im} + i\omega C_i U_{im}) X_{7+m}] = 0. \quad (4.62)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках содержит вклад от вторичных волн с номерами от 3 до 7, распространяющихся слева направо сразу по всем пяти проводникам левого отрезка связанных линий. Эти волны имеют амплитуды X_3, X_4, \dots, X_7 .

Второе слагаемое в квадратных скобках содержит вклад волн с номерами от 8 до 12, распространяющихся справа налево. Эти волны имеют амплитуды X_8, X_9, \dots, X_{12} . Так как они распространяются против оси z , а поло-

жительное направление токов выбрано вдоль этой оси, знак перед амплитудами напряжений U_{im} этих волн изменен. Набег фаз в (4.62) отсутствует, так как их отсчет для всех волн на левом отрезке производится от точки $z=0$.

Запишем теперь уравнения для пяти точек соединения правых концов левого отрезка с левыми концами среднего отрезка, то есть для точек $z=l_1$. Первые пять уравнений для этих точек являются уравнениями непрерывности напряжения по обе стороны соединения проводников:

$$\sum_{m=1}^5 \left[U_{im} e^{i\theta_{1m}} X_{2+m} - U_{im} e^{-i\theta_{1m}} X_{7+m} - U_{im} X_{12+m} + U_{im} X_{17+m} \right] = 0, \quad (4.63)$$

где $\theta_{1m} = k_m l_1$ – электрическая длина левого отрезка для m -й волны. Здесь первые два слагаемых в квадратных скобках обусловлены волнами на левом отрезке, а последние два слагаемых – волнами на центральном отрезке. Набег фаз для последних двух слагаемых отсутствует, так как он отсчитывается от левого края центрального отрезка, то есть от точки $z=l_1$.

Запишем еще одно уравнение непрерывности напряжения на входе l в точке кондуктивного подключения резонатора ($i=1$) при $z=l_1$:

$$\sqrt{Z_1} X_1 + \sum_{m=1}^5 \left[-U_{1m} X_{12+m} + U_{1m} X_{17+m} \right] = -\sqrt{Z_1} a_1. \quad (4.64)$$

Здесь выражение в квадратных скобках описывает напряжение на левом конце центрального отрезка. Остальные слагаемые описывают напряжение на входе l , складывающееся из напряжения падающей волны с амплитудой a_1 и напряжения отраженной волны с амплитудой $b_1 = X_1$.

Четыре уравнения непрерывности тока для проводников с $i=2, 3, \dots, 5$ при $z=l_1$ имеют вид

$$\sum_{m=1}^5 \left[I_{im} e^{i\theta_{1m}} X_{2+m} + I_{im} e^{-i\theta_{1m}} X_{7+m} - I_{im} X_{12+m} - I_{im} X_{17+m} \right] = 0. \quad (4.65)$$

Пятое уравнение непрерывности тока для проводника с $i=1$ при $z=l_1$ имеет вид

$$\frac{-X_1}{\sqrt{Z_1}} + \sum_{m=1}^5 \left[I_{1m} e^{i\theta_{1m}} X_{2+m} + I_{1m} e^{-i\theta_{1m}} X_{7+m} - I_{1m} X_{12+m} - I_{1m} X_{17+m} \right] = \frac{-a_1}{\sqrt{Z_1}}. \quad (4.66)$$

Это уравнение получается из условия, что сумма всех токов, входящих в точку соединения трех проводников, равна нулю.

Аналогичным образом получаем одиннадцать уравнений для пяти точек соединения проводников ($i = 1, 2, \dots, 5$), имеющих координату $z = l_1 + l_2$:

$$\sum_{m=1}^5 U_{im} \left[e^{i\theta_{2m}} X_{12+m} - e^{-i\theta_{2m}} X_{17+m} - X_{22+m} + X_{27+m} \right] = 0, \quad (4.67)$$

$$-\sqrt{Z_2} X_2 + \sum_{m=1}^5 U_{5m} [X_{22+m} - X_{27+m}] = \sqrt{Z_2} a_2, \quad (4.68)$$

$$\sum_{m=1}^5 I_{im} \left[e^{i\theta_{2m}} X_{12+m} + e^{-i\theta_{2m}} X_{17+m} - X_{22+m} - X_{27+m} \right] = 0 \quad (i \neq 5), \quad (4.69)$$

$$\frac{-X_2}{\sqrt{Z_2}} + \sum_{m=1}^5 I_{5m} \left[e^{i\theta_{2m}} X_{12+m} + e^{-i\theta_{2m}} X_{17+m} - X_{22+m} - X_{27+m} \right] = \frac{-a_2}{\sqrt{Z_2}}, \quad (4.70)$$

где $\theta_{2m} = k_m l_2$ – электрическая длина центрального отрезка для m -й волны.

Наконец, пять уравнений для правых концов проводников правого отрезка, замкнутых на емкости, то есть уравнения для точек с координатой $z = l$, имеют вид

$$\sum_{m=1}^5 \left[(I_{im} + i\omega C_i U_{im}) e^{i\theta_{1m}} X_{22+m} + (I_{im} - i\omega C_i U_{im}) e^{-i\theta_{1m}} X_{27+m} \right] = 0. \quad (4.71)$$

Уравнения (4.71) получаются из условия (4.61), в котором изменен знак перед током, так как этот ток в случае подключения емкости к правому концу проводника является уже не вытекающим из емкости, а втекающим в нее.

Таким образом, мы записали 32 уравнения для 32-х неизвестных амплитуд X_i . Эта система уравнений решается численно. Затем, так как $b_1 = X_1$ и $b_2 = X_2$, элементы матрицы в соответствии с определением (4.20) находятся по формулам

$$\begin{aligned} S_{11} &= X_1 \Big|_{a_1=1, a_2=0}, & S_{21} &= X_2 \Big|_{a_1=1, a_2=0}, \\ S_{12} &= X_1 \Big|_{a_1=0, a_2=1}, & S_{22} &= X_2 \Big|_{a_1=0, a_2=1}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.5. Произвольное соединение многополюсников

Рассмотрим схему СВЧ, полученную произвольным соединением многополюсников. Пусть схема содержит i внутренних и p внешних входов (см. рис. 4.11).

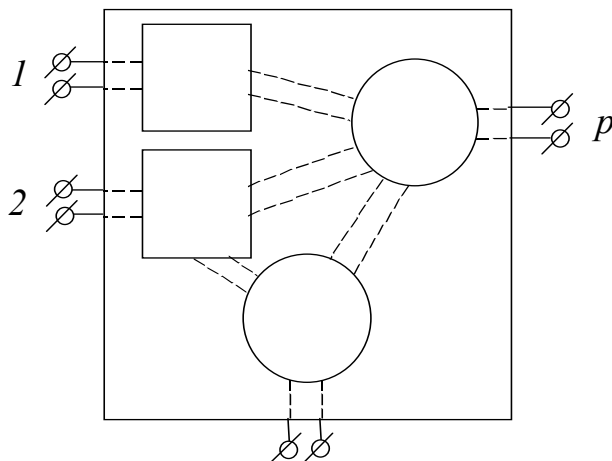


Рис. 4.11. Схема СВЧ с i внутренними и p внешними входами

Для всех компонент схемы вектор амплитуд всех выходящих волн \mathbf{b} связан с вектором амплитуд входящих волн \mathbf{a} соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}. \quad (4.73)$$

Строки и столбцы в (4.73) можно перегруппировать так, чтобы волновые переменные разделились на две группы: первая соответствовала бы p внешним входам, а вторая – i входам, соединенным внутри схемы. Тогда уравнение (4.73) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_p \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pp} & \mathbf{S}_{pi} \\ \mathbf{S}_{ip} & \mathbf{S}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

где \mathbf{b}_p и \mathbf{a}_p – волновые переменные, соответствующие p внешним входам; \mathbf{b}_i и \mathbf{a}_i – волновые переменные, соответствующие i внутренним входам. Ограничения, накладываемые внутренними соединениями для i внутренних входов, могут быть записаны в виде

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{\Gamma}\mathbf{a}_i, \quad (4.75)$$

где $\mathbf{\Gamma}$ – матрица соединений, содержащая нули и единицы. Из выражений (4.74) и (4.75) можно получить

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{a}_i = \mathbf{S}_{ip}\mathbf{a}_p + \mathbf{S}_{ii}\mathbf{a}_i$$

или

$$\mathbf{a}_i = (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{S}_{ii})^{-1}\mathbf{S}_{ip}\mathbf{a}_p. \quad (4.76)$$

Подставляя (4.76) в (4.74), получаем

$$\mathbf{b}_p = [\mathbf{S}_{pp} + \mathbf{S}_{pi}(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{S}_{ii})^{-1}\mathbf{S}_{ip}]\mathbf{a}_p, \quad (4.77)$$

откуда матрица рассеяния

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{S}_{pp} + \mathbf{S}_{pi}(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{S}_{ii})^{-1}\mathbf{S}_{ip}. \quad (4.78)$$

Уравнения (4.76) и (4.75) могут использоваться для получения волновых переменных на внутренних входах при произвольном способе возбуждения внешних входов.

Пример 1. Расчет S-матрицы составной схемы. Рассмотрим схему на рис. 4.12, состоящую из узлов A , B и C . Матрицы рассеяния составляющих компонентов обозначим \mathbf{S}^A , \mathbf{S}^B и \mathbf{S}^C .

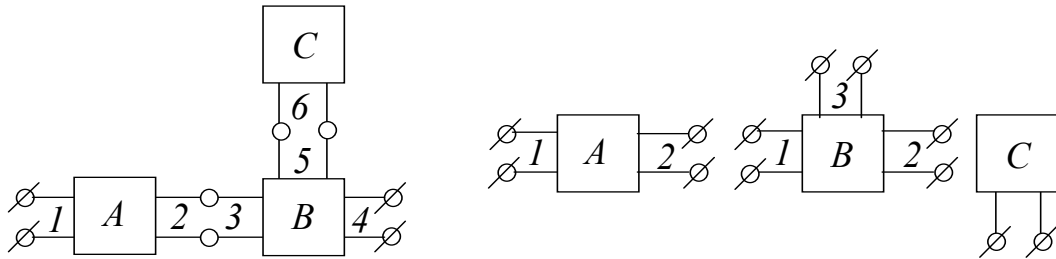


Рис. 4.12. Составная схема и ее компоненты A , B и C

Запишем параметры всех трех компонентов схемы в виде (4.74):

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_4 \\ - \\ b_2 \\ b_6 \\ b_5 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^A & 0 & | & S_{12}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^B & | & 0 & 0 & S_{23}^B & S_{21}^B \\ - & - & + & - & - & - & - \\ S_{21}^A & 0 & | & S_{22}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & S^C & 0 & 0 \\ 0 & S_{32}^B & | & 0 & 0 & S_{33}^B & S_{31}^B \\ 0 & S_{12}^B & | & 0 & 0 & S_{13}^B & S_{11}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \\ - \\ a_2 \\ a_6 \\ a_5 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Матрица соединений $\mathbf{\Gamma}$ может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_6 \\ b_5 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_5 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Полную матрицу рассеяния находим по формуле (4.78), используя (4.79) и (4.80):

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} S_{11}^A & 0 \\ 0 & S_{22}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{12}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{23}^B & S_{21}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{22}^A & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -S^C & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -S_{33}^B & -S_{31}^B \\ 1 & 0 & -S_{13}^B & -S_{11}^B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{21}^A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & S_{32}^B \\ 0 & S_{12}^B \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Пример 2. Расчет S-матрицы схемы, один из входов которой нагружен.
Пусть схема A , описываемая матрицей \mathbf{S}^A , имеет $p+1$ вход. Требуется рассчитать матрицу \mathbf{S}^B схемы B , которая получается подключением к $(p+1)$ -му входу схемы A нагрузки с импедансом Z . Объединенная матрица схемы A и нагрузки Z имеет вид

$$[S] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pp}^A & | & \mathbf{S}_{pi}^A & 0 \\ - & + & - & - \\ \mathbf{S}_{ip}^A & | & \mathbf{S}_{ii}^A & 0 \\ 0 & | & 0 & S^Z \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

где S^Z – параметр рассеяния нагрузки Z ; i указывает на вход, к которому подключена нагрузка Z . Матрица соединений Γ может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} b_i \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

где a_i и b_i – волновые переменные для нагруженного входа i схемы A ; a и b – волновые переменные для нагрузки Z . Подставим (4.82) и (4.83) в общую формулу (4.78):

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{pi}^A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{ii}^A & 1 \\ 1 & -S^Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ip}^A \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

После выполнения произведения матриц получаем

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A + \frac{1}{(S^Z)^{-1} - S_{ii}^A} \mathbf{S}_{pi}^A \mathbf{S}_{ip}^A. \quad (4.85)$$

Вычислим параметр рассеяния для нагрузки Z . Будем исходить из того, что ток I и напряжение U на нагрузке Z связаны равенством

$$U/I = Z.$$

Подставляя в последнее равенство выражения

$$\begin{aligned} U &= Z_0^{1/2} (a + b), \\ I &= Z_0^{-1/2} (a - b), \end{aligned} \quad (4.86)$$

находим

$$b = [(Z - Z_0) / (Z + Z_0)] a. \quad (4.87)$$

Здесь Z_0 – нормирующее волновое сопротивление для матриц \mathbf{S}^A и S^Z . Из формулы (4.87) получаем

$$S^Z = (Z - Z_0) / (Z + Z_0). \quad (4.88)$$

Подставляя (4.88) в выражение (4.85), получаем искомую формулу

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A + \frac{1}{\frac{Z + Z_0}{Z - Z_0} - S_{ii}^A} \mathbf{S}_{pi}^A \mathbf{S}_{ip}^A. \quad (4.89)$$

Из (4.89), в частности, следует, что в режиме короткого замыкания ($Z = 0$) на i -м входе

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A - \frac{1}{1 + S_{ii}^A} \mathbf{S}_{pi}^A \mathbf{S}_{ip}^A, \quad (4.90)$$

в режиме холостого хода ($Z = \infty$)

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A + \frac{1}{1 - S_{ii}^A} \mathbf{S}_{pi}^A \mathbf{S}_{ip}^A, \quad (4.91)$$

в режиме согласованной нагрузки ($Z = Z_0$)

$$\mathbf{S}^B = \mathbf{S}_{pp}^A. \quad (4.92)$$

4.6. Расчет $ABCD$ -матрицы встречно включенного отрезка пары связанных микрополосковых линий

Рассчитаем $ABCD$ -матрицу четырехполюсника, образованного встречным подключением отрезка симметричной пары связанных микрополосковых линий (см. рис. 4.13). Такой четырехполюсник является элементарным звеном полосно-пропускающего фильтра на параллельно связанных микрополосковых резонаторах. В фильтре эти звенья включены каскадно.

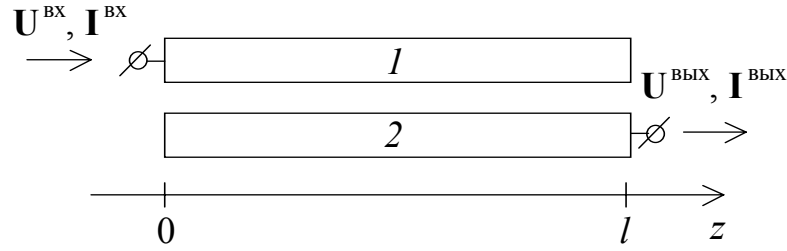


Рис. 4.13. Встречно включенный отрезок пары связанных линий

Обратимся к $ABCD$ -параметрам n -проводного отрезка связанных линий передачи, которые выражаются формулой (4.51). В рассматриваемом случае матрицы напряжений, токов и электрических длин, фигурирующие в (4.51), имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} Z_e & Z_o \\ Z_e & -Z_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_e & 0 \\ 0 & \theta_o \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

Подставляя (4.93) в (4.51), получаем $ABCD$ -матрицу восьмиполюсника

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_e + \cos \theta_o}{2} & \frac{\cos \theta_e - \cos \theta_o}{2} & \frac{Z_e \sin \theta_e + Z_o \sin \theta_o}{2i} & \frac{Z_e \sin \theta_e - Z_o \sin \theta_o}{2i} \\ \frac{\cos \theta_e - \cos \theta_o}{2} & \frac{\cos \theta_e + \cos \theta_o}{2} & \frac{Z_e \sin \theta_e - Z_o \sin \theta_o}{2i} & \frac{Z_e \sin \theta_e + Z_o \sin \theta_o}{2i} \\ \frac{Z_e^{-1} \sin \theta_e + Z_o^{-1} \sin \theta_o}{2i} & \frac{Z_e^{-1} \sin \theta_e - Z_o^{-1} \sin \theta_o}{2i} & \frac{\cos \theta_e + \cos \theta_o}{2} & \frac{\cos \theta_e - \cos \theta_o}{2} \\ \frac{Z_e^{-1} \sin \theta_e - Z_o^{-1} \sin \theta_o}{2i} & \frac{Z_e^{-1} \sin \theta_e + Z_o^{-1} \sin \theta_o}{2i} & \frac{\cos \theta_e - \cos \theta_o}{2} & \frac{\cos \theta_e + \cos \theta_o}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Эта матрица связывает векторы напряжений и токов на входе и выходе отрезка формулой

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^{\text{BX}} \\ \mathbf{I}^{\text{BX}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{\text{BЫX}} \\ \mathbf{I}^{\text{BЫX}} \end{bmatrix}. \quad (4.95)$$

Матричное равенство (4.95) означает краткую запись четырех равенств

$$U_1^{\text{BX}} = A_{11}U_1^{\text{BЫX}} + A_{12}U_2^{\text{BЫX}} + B_{11}I_1^{\text{BЫX}} + B_{12}I_2^{\text{BЫX}}, \quad (4.96)$$

$$U_2^{\text{BX}} = A_{21}U_1^{\text{BЫX}} + A_{22}U_2^{\text{BЫX}} + B_{21}I_1^{\text{BЫX}} + B_{22}I_2^{\text{BЫX}}, \quad (4.97)$$

$$I_1^{\text{BX}} = C_{11}U_1^{\text{BЫX}} + C_{12}U_2^{\text{BЫX}} + D_{11}I_1^{\text{BЫX}} + D_{12}I_2^{\text{BЫX}}, \quad (4.98)$$

$$I_2^{\text{BX}} = C_{21}U_1^{\text{BЫX}} + C_{22}U_2^{\text{BЫX}} + D_{21}I_1^{\text{BЫX}} + D_{22}I_2^{\text{BЫX}}. \quad (4.99)$$

Учитывая, что

$$I_2^{\text{BX}} = I_1^{\text{ВЫХ}} = 0, \quad (4.100)$$

из (4.97), (4.99) находим

$$U_1^{\text{ВЫХ}} = -(C_{22}/C_{21})U_2^{\text{ВЫХ}} - (D_{22}/C_{21})I_2^{\text{ВЫХ}}. \quad (4.101)$$

Подставим (4.100) и (4.101) в (4.96) и (4.98):

$$\begin{aligned} U_1^{\text{BX}} &= [A_{12} - A_{11}C_{22}/C_{21}]U_2^{\text{ВЫХ}} + [B_{12} - A_{11}D_{22}/C_{21}]I_2^{\text{ВЫХ}}, \\ I_1^{\text{BX}} &= [C_{12} - C_{11}C_{22}/C_{21}]U_2^{\text{ВЫХ}} + [D_{12} - C_{11}D_{22}/C_{21}]I_2^{\text{ВЫХ}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $ABCD$ -параметры четырехполюсника связаны с $ABCD$ -параметрами отрезка пары связанных линий формулой

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} - A_{11}C_{22}/C_{21} & B_{12} - A_{11}D_{22}/C_{21} \\ C_{12} - C_{11}C_{22}/C_{21} & D_{12} - C_{11}D_{22}/C_{21} \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

Подставим в (4.102) значения $ABCD$ -параметров (4.94). В результате получаем искомую $ABCD$ -матрицу четырехполюсника

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{Z_e \operatorname{ctg} \theta_e + Z_o \operatorname{ctg} \theta_o}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o} & i \frac{Z_e Z_o (\sin^{-1} \theta_e \sin^{-1} \theta_o + \operatorname{ctg} \theta_e \operatorname{ctg} \theta_o) - (Z_e^2 + Z_o^2)/2}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o} \\ \frac{-2i}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o} & \frac{Z_e \operatorname{ctg} \theta_e + Z_o \operatorname{ctg} \theta_o}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Формула (4.103) будет использоваться в дальнейшем при синтезе микрополосковых фильтров.

Контрольные вопросы

29. В каких единицах измеряются нормированные напряжения?
30. Какую размерность имеют элементы Z -, Y -, S - и T -матриц?
31. При использовании каких матриц порты многополюсника подразделяют на входы и выходы?
32. При использовании каких матриц все порты многополюсника именуются входами?

33. У какого многополюсника не меняется S -матрица при транспонировании?

34. Сколько независимых уравнений для токов и напряжений можно записать для точки соединения n проводников?

35. Сколько независимых элементов имеют матрицы взаимного симметричного четырехполюсника?

5. ДВУМЕРНЫЕ ЦЕПИ

5.1. Планарные компоненты

Компоненты устройств СВЧ разделяют по типу размерности. Элементы с сосредоточенными параметрами называют нульмерными компонентами, так как их размеры по всем трем координатам много меньше длины волны λ_g . Линии передачи (коаксиальные, микрополосковые, копланарные, щелевые и др.) называют одномерными компонентами, так как размеры их поперечного сечения много меньше λ_g , а длина соизмерима с λ_g . Компоненты, все три размера которых соизмеримы с λ_g , называют трехмерными компонентами. Существуют еще и такие элементы СВЧ, у которых только один из трех размеров много меньше λ_g . Эти элементы называют двумерными или планарными.

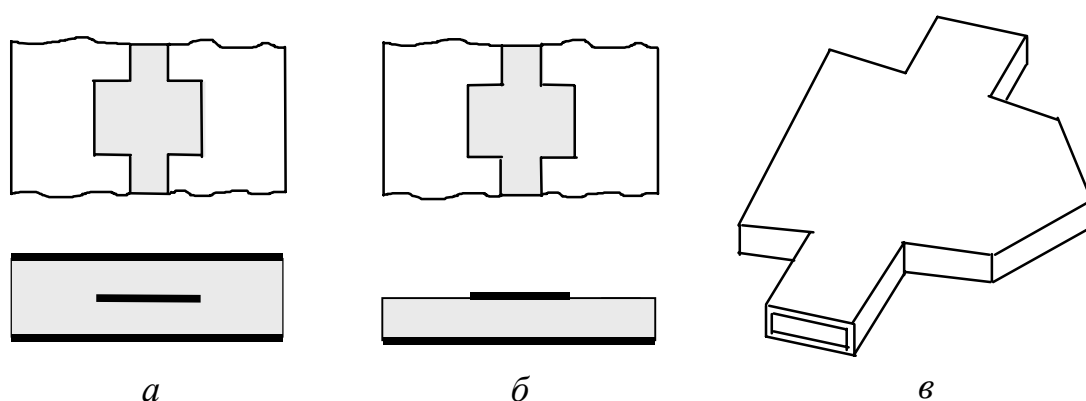


Рис. 5.1. Конфигурации планарных компонентов:

a – полосковая цепь; *б* – микрополосковая цепь; *в* – волноводная цепь

Возможны три конфигурации планарных цепей (см. рис. 5.1):

- 1) трехплоскостные, или полосковые;
- 2) открытые, или микрополосковые;
- 3) волноводные.

Рассмотрим планарную цепь полоскового типа, центральный проводник которой имеет произвольную форму и расположен между двумя заземленными пластинами (см. рис. 5.2, *a*). Эта цепь возбуждается симметрично из-за наличия верхней и нижней заземленных пластин. На краях центрального проводника имеются несколько выводов. Обозначим ширины этих выводов W_i . Остальные края центрального проводника являются разомкнутыми.

Выберем направление координатных осей так, чтобы рассматриваемый проводник лежал в плоскости xu перпендикулярно оси z . При этом размеры центрального проводника по осям x и y будут соизмеримы с длиной волны, а размером по оси z (толщиной $2h$) можно пренебречь. Следовательно, поле по направлению оси z можно считать постоянным.

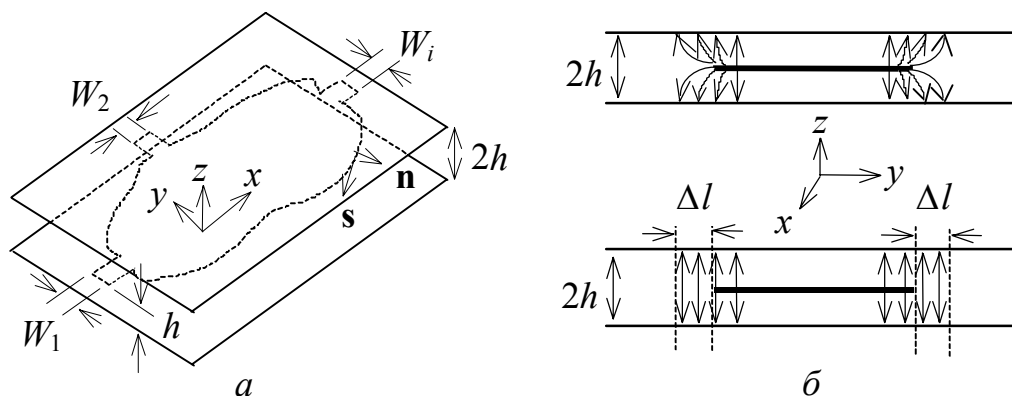


Рис. 5.2. Планарная полосковая цепь:

a – полосковая цепь; b – перемещение магнитной стенки

Расчет планарных полосковых цепей наиболее просто выполняется в рамках модели Олинера, которая основана на сравнении волновых сопротивлений реальной линии передачи и однородного плоского волновода с магнитными боковыми стенками. Используя формулу для плоского волновода (3.53) и формулу [8]

$$Z = Z_c \frac{K(k)}{2K'(k)}, \quad k = \exp\left(-\frac{\pi W}{2h}\right) \quad (5.1)$$

для волнового сопротивления полосковой линии, где $K(k)$ и $K'(k)$ – связанные эллиптические интегралы Лежандра первого рода, можно вычислить ширину плоского волновода W и определить, на каком расстоянии Δl должны будут отстоять магнитные стенки от краев внутреннего проводника. В общем случае величина Δl зависит от ширины внутреннего проводника. Однако когда $W \gg h$, величина Δl становится постоянной и принимает значение

$$\Delta l = \frac{2 \ln 2}{\pi} h. \quad (5.2)$$

В случае планарных полосковых цепей, у которых края внутреннего проводника описываются криволинейным контуром, магнитные стенки в мо-

дели Олинера должны повторять этот контур с отступом наружу на величину Δl (см. рис. 5.2, б).

Необходимо отметить, что напряженности полей под центральным проводником и над ним должны быть направлены противоположно. В дальнейшем анализе векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} будут определяться по напряженности поля с одной стороны проводника, например с нижней.

Уравнение Гельмгольца для планарной полосковой цепи с боковыми магнитными стенками имеет вид

$$(\nabla_t^2 + k^2) \mathbf{E} = 0 \quad (k^2 = k_0^2 \varepsilon_r), \quad (5.3)$$

где $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Поскольку составляющие E_x и E_y равны нулю на поверхности центрального проводника и заземленных пластин, то независимый от координаты z вектор напряженности электрического поля можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_z(x, y), \quad (5.4)$$

где \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z . Используя уравнение Максвелла (1.16), магнитное поле можно записать в виде

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0 Z_0} \left(-\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x} \right) E_z, \quad (5.5)$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y .

Поверхностный ток на центральном проводнике может быть найден из граничного условия (1.37). Учитывая, что этот ток течет по нижней и верхней поверхности центрального проводника, получаем

$$\mathbf{J} = \frac{i2}{k_0 Z_0} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) E_z. \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) имеет силу для всех точек двумерного центрального проводника произвольной формы, включая его края. Для точек на краях поверхностный ток \mathbf{J} может быть выражен через составляющие, нормальные и тангенциальные к границе:

$$\mathbf{J} = \frac{i2}{k_0 Z_0} \left(\mathbf{s} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) E_z, \quad (5.7)$$

где \mathbf{s} и \mathbf{n} – единичные векторы, направленные тангенциально и нормально к границе. Для точек на краях двумерного планарного компонента, где отсут-

ствуют выводы, нормальная составляющая поверхностного тока должна быть равна нулю:

$$\partial E_z / \partial n = 0. \quad (5.8)$$

Ток, текущий через i -й вывод компонента, может быть получен на основе формулы (5.7):

$$I_i = \frac{-i2}{k_0 Z_0} \int_{W_i} \frac{\partial E_z}{\partial n} ds. \quad (5.9)$$

Знак «минус» в формуле (5.9) означает, что ток I_i направлен внутрь компонента, тогда как вектор \mathbf{n} направлен наружу.

Характеристики планарных компонентов можно выразить через напряжение СВЧ $U(x,y)$ на центральном проводнике. Учитывая, что поле E_z однородно вдоль оси z , получаем

$$U = -E_z h. \quad (5.10)$$

Теперь уравнения (5.3), (5.8) и (5.9) можно записать в виде

$$(\nabla_t^2 + k^2) U = 0 \quad (5.11)$$

при

$$\partial U / \partial n = 0 \quad (5.12)$$

для точек на краях планарного компонента, за исключением точек выводов. Ток выводов выражается формулой

$$I_i = \frac{i2}{k_0 Z_0 h} \int_{W_i} \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (5.13)$$

Решением уравнения (5.11) с граничными условиями (5.12) и (5.13) находят характеристики планарных компонентов полоскового типа.

5.2. Решение двумерных задач методом функций Грина

Уравнения Гельмгольца для планарной цепи простой геометрической формы удобно решать с помощью функций Грина. Используя функции Грина, можно получить аналитическое выражение напряжения в произвольной точке при возбуждении планарного компонента единичным источником тока, расположенным в какой-либо заданной точке. С помощью функций Грина

нетрудно получить Z -матрицу компонента с заданным расположением его выводов.

Пусть планарный компонент возбуждается сторонним током плотностью j_z , протекающим в направлении оси z через некоторую произвольную внутреннюю точку с координатами x_0, y_0 , не лежащую на границе планарного компонента. Тогда уравнение Гельмгольца (5.11), согласно уравнениям Максвелла (1.7) и (1.8), может быть записано в виде

$$(\nabla_t^2 + k^2)U = ik_0 Z_0 h j_z. \quad (5.14)$$

Если же планарная цепь возбуждается сторонней полосковой линией, то j_z можно рассматривать как фиктивный ток СВЧ, текущий в направлении, нормальном плоскости компонента. Этот ток втекает в местах расположения вводов на краях планарного компонента. При этом запитывание осуществляется нормально, то есть по оси z , с выполнением условия наличия магнитной стенки (5.12) на протяжении всей границы планарного компонента.

Функция Грина может быть получена из уравнения (5.14), если в качестве источников тока использовать единичный источник тока $j_z = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, направленный вдоль оси z . Этот источник расположен под центральным проводником планарного компонента при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Функция Грина $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ есть решение уравнения

$$(\nabla_t^2 + k^2)G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = ik_0 Z_0 h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (5.15)$$

с граничными условиями

$$\partial G / \partial n = 0. \quad (5.16)$$

Теперь можно записать выражение для напряжения в произвольной точке планарного элемента

$$U(x, y) = \int_D G(x, y | x_0, y_0) j_z(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (5.17)$$

где $j_z(x_0, y_0)$ – плотность фиктивного тока, втекающего в планарный компонент в направлении, нормальном плоскости его центрального проводника; D – область планарного компонента, окруженная магнитной стенкой.

Если источник тока запитывается только со стороны выводов на краях планарного компонента, то напряжение U на границе может быть выражено через ток J подводющих линий формулой

$$U(s) = \int_C G(s | s_0) J(s_0) ds_0, \quad (5.18)$$

где s, s_0 – расстояния, отсчитываемые вдоль границы. Поскольку ток J существует только в сечениях выводов, то формулу (5.18) можно записать в виде

$$U(s) = \sum_i \int_{W_i} G(s | s_0) J(s_0) ds_0, \quad (5.19)$$

где суммирование осуществляется по всем выводам. При этом запитываемый i -й вывод полный ток

$$I_i = 2 \int_{W_i} J(s_0) ds_0. \quad (5.20)$$

Поясним, почему в формуле (5.18) нами использовано равенство $j_z(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = J(s_0) ds_0$. Величина $J(s_0)$ есть поверхностная плотность втекающих токов подводных линий на выводах планарного компонента. Однако выполнение граничного условия (5.16) означает, что должны существовать еще и вытекающие токи с такой же плотностью $J(s_0)$, но направленные в противоположную сторону. Вытекающие токи, в отличие от втекающих, не уходят в подводные линии, а создают фиктивные токи $j_z(x_0, y_0)$.

Если проводники подводных линий настолько узки, что плотность токов в них можно считать распределенной равномерно, то из (5.20) можно получить

$$J(s_0) |_{\text{для } i\text{-го вывода}} = I_i / (2W_i). \quad (5.21)$$

Подставив (5.21) в (5.18), найдем

$$U(s) = \sum_i \frac{I_i}{2W_i} \int_{W_i} G(s | s_0) ds_0. \quad (5.22)$$

Это уравнение позволяет определить напряжение в произвольной точке границы. Для определения напряжения U_i на i -м выводе усредним напряжение по ширине вывода. Тогда получим

$$U_i = \frac{1}{W_i} \int_{W_i} U(s) ds = \sum_j \frac{I_j}{2W_i W_j} \int_{W_i} \int_{W_j} G(s | s_0) ds_0 ds. \quad (5.23)$$

Из (5.23) можно определить элементы Z -матрицы планарного компонента

$$Z_{ij} = \frac{1}{2W_i W_j} \int_{W_i} \int_{W_j} G(s | s_0) ds_0 ds. \quad (5.24)$$

В приведенном анализе предполагалось, что втекающий ток распределен равномерно по ширине вывода. Это значит, что ширина вывода должна быть малой по сравнению с длиной волны и размерами планарного компонента. В тех случаях, когда эти предположения не выполняются, каждый вывод может быть разделен на несколько подвыводов, в каждом из которых ток можно предполагать распределенным равномерно.

Матрицу сопротивлений компонента получают для всех выводов. При этом предполагается, что в полосковой линии на участке вывода имеется только Т-волна. Это предположение выполняется, если выводы находятся на таком расстоянии от планарного компонента, при котором любые волны высших порядков, возбуждаемые неоднородностью перехода от полосковой линии к планарной цепи, затухают вдоль полосковой линии. Промежуточная полосковая линия считается частью планарной цепи.

Поскольку предполагается, что в линии вывода существует только Т-волна, то напряжения подвыводов вывода одинаковы. Поэтому можно считать, что подвыводы соединены параллельно. При параллельном соединении Z -матрицу преобразуют в Y -матрицу. Если выводы i и j разделены на подвыводы $i = (i_1, i_2, \dots)$ и $j = (j_1, j_2, \dots)$, то матрица проводимости Y_{ij} задается в виде суммы:

$$Y_{ij} = \sum_{k \in i} \sum_{l \in j} y_{kl}, \quad (5.25)$$

где y_{kl} – составляющие матрицы проводимости.

5.3. Особенности использования модели Олинера для микрополосковых цепей

Особенности построения модели Олинера для планарных цепей микрополоскового типа связаны как с отсутствием симметрии между нижним и верхним волноведущим каналом, так и с неодинаковым диэлектрическим заполнением этих каналов.

При некоторых допущениях все основные соотношения, полученные выше для планарной цепи полоскового типа, могут быть использованы с

одной поправкой и для планарной цепи микрополоскового типа. Одним из допущений является то, что мощность СВЧ в планарной цепи микрополоскового типа распространяется только в одном из волноведущих каналов, а именно, в канале, содержащем подложку. Из этого допущения следует, что токи текут не по двум, а только по одной из поверхностей полоскового проводника. Этим допущением и вызвана поправка к формулам. В формулах (5.6), (5.7), (5.9), (5.13) и (5.20) она сводится к удалению множителя 2, а в формулах (5.21)–(5.24) — к удалению делителя 2.

В эквивалентной модели, когда ширина планарного компонента W значительно больше толщины подложки h , диэлектрическая проницаемость среды, ограниченной плоскими проводниками и боковыми магнитными стенками, считается равной диэлектрической проницаемости подложки ϵ_r . При этом магнитные стенки должны отступать от краев полоскового проводника на такое расстояние Δl , при котором емкость этого проводника в модели оставалась бы такой же, как и в исходном объекте.

В случае же узкого планарного компонента, который можно рассматривать как нерегулярность микрополосковой линии типа скачка ширины, изгиба, разветвления, разомкнутого конца и т. д., диэлектрическая проницаемость среды, ограниченной плоскими проводниками и боковыми магнитными стенками, считается равной эффективной диэлектрической проницаемости микрополосковой линии ϵ_{eff} . Величина же отступа Δl магнитных стенок от краев полоскового проводника по-прежнему определяется из условия одинаковости емкости полоскового проводника в модели и в реальном объекте.

5.4. Собственные функции планарного уравнения Гельмгольца и функции Грина

Один из методов построения функции Грина $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ основан на разложении ее в ряд

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_m A_m \psi_m(\mathbf{r}), \quad (5.26)$$

по собственным функциям ψ_n уравнения Гельмгольца

$$(\nabla_t^2 + k_n^2)\psi_n = 0, \quad (5.27)$$

где k_n^2 – собственное значение. Условие ортогональности функций ψ_n выражается формулой

$$\iint_D \psi_n^* \psi_m dx dy = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m, \end{cases} \quad (5.28)$$

где область интегрирования D ограничивается границами планарного компонента, на которых ψ_n удовлетворяет граничному условию

$$\partial\psi_n/\partial n = 0. \quad (5.29)$$

Подставляя (5.26) в (5.15) и используя (5.27), получаем

$$\sum_m A_m (k^2 - k_m^2) \psi_m(\mathbf{r}) = i k_0 Z_0 h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (5.30)$$

Умножая обе части равенства (5.30) на ψ_n^* , интегрируя в области D и используя условие ортогональности (5.28), получаем уравнение

$$A_n (k^2 - k_n^2) = i k_0 Z_0 h \psi_n^*(\mathbf{r}_0). \quad (5.31)$$

Тогда имеем

$$A_n = i k_0 Z_0 h \psi_n^*(\mathbf{r}_0) / (k^2 - k_n^2),$$

так что

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = i k_0 Z_0 h \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}_0)}{k^2 - k_n^2} \quad (5.32)$$

есть выражение искомой функции Грина. Для цепей без потерь ψ_n^* – действительная функция.

Приведем функции Грина для некоторых форм планарных элементов, представленных на рис. 5.3.

A. Для **прямоугольника** со сторонами a и b функция Грина определяется формулой

$$G(x, y | x_0, y_0) = \frac{i k_0 Z_0 h}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_m \sigma_n \cos(k_x x_0) \cos(k_y y_0) \cos(k_x x) \cos(k_y y)}{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, \quad (5.33)$$

где $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$, а величина

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

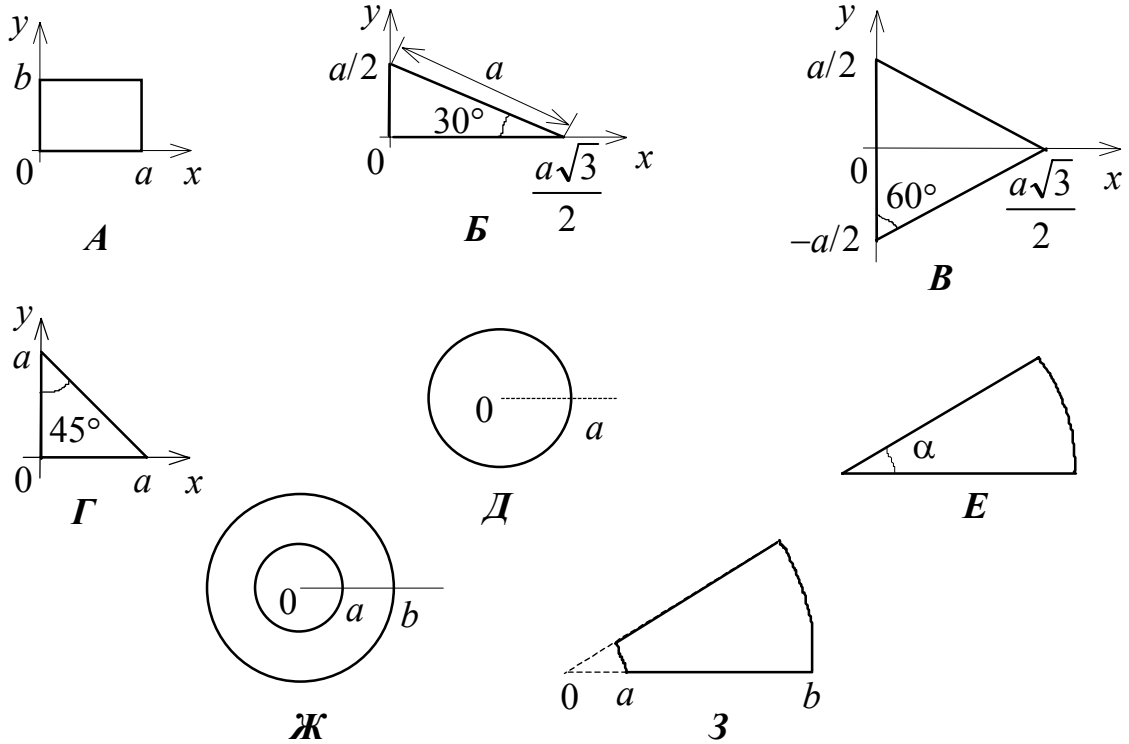


Рис. 5.3. Планарные элементы

Б. Для **прямоугольного треугольника** с углами 30° и 60° и диагональю a функция Грина определяется формулой

$$G(x, y | x_0, y_0) = i8k_0 Z_0 h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_1(x_0, y_0) T_1(x, y)}{9\sqrt{3} a^2 k^2 - 16\sqrt{3} \pi^2 (m^2 + mn + n^2)}, \quad (5.34)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(x, y) = & (-1)^l \cos\left(\frac{2\pi lx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] + \\ & + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi mx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(n-l)y}{3a}\right] + \\ & + (-1)^n \cos\left(\frac{2\pi nx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(l-m)y}{3a}\right], \end{aligned}$$

а $l = -(m+n)$.

В. Для **равностороннего треугольника** со стороной a функция Грина определяется формулой

$$G(x, y | x_0, y_0) = i4k_0 Z_0 h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_1(x_0, y_0) T_1(x, y) + T_2(x_0, y_0) T_2(x, y)}{9\sqrt{3} a^2 k^2 - 16\sqrt{3} \pi^2 (m^2 + mn + n^2)}, \quad (5.35)$$

где $T_1(x, y)$ определяется в формуле (5.34), а

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) = & (-1)^l \cos\left(\frac{2\pi lx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] + \\
& + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi mx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(n-l)y}{3a}\right] + \\
& + (-1)^n \cos\left(\frac{2\pi nx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(l-m)y}{3a}\right].
\end{aligned}$$

Г. Для прямоугольного равнобедренного треугольника со стороной a функция Грина определяется формулой

$$G(x, y | x_0, y_0) = ik_0 Z_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_m \sigma_n T(x_0, y_0) T(x, y)}{a^2 k^2 - (m^2 + n^2) \pi^2}, \quad (5.36)$$

где

$$T(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + (-1)^{m+n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right).$$

Д. Для круга с радиусом a функция Грина определяется формулой

$$G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0) = \frac{ik_0 Z_0 h}{\pi k^2 a^2} + ik_0 Z_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n J_n(k_{mn} \rho_0) J_n(k_{mn} \rho) \cos n(\varphi - \varphi_0)}{\pi (a^2 - n^2 / k_{mn}^2) (k^2 - k_{mn}^2) J_n^2(k_{mn} a)}, \quad (5.37)$$

где $J_n(z)$ – функция Бесселя n -го порядка, а k_{mn} определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_{mn} \rho) \Big|_{\rho=a} = 0.$$

Индекс m в коэффициенте k_{mn} соответствует m -му корню уравнения.

Е. Для сектора круга с радиусом a и углом $\alpha = \pi/l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) функция Грина определяется формулой

$$\begin{aligned}
G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0) = & \frac{i2lk_0 Z_0 h}{\pi k^2 a^2} + \\
& + i2lk_0 Z_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n J_\nu(k_{m\nu} \rho_0) J_\nu(k_{m\nu} \rho) \cos \nu \varphi_0 \cos \nu \varphi}{\pi (a^2 - \nu^2 / k_{m\nu}^2) (k^2 - k_{m\nu}^2) J_\nu^2(k_{m\nu} a)}, \quad (5.38)
\end{aligned}$$

где $\nu = nl$, а $k_{m\nu}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \rho} J_\nu(k_{m\nu} \rho) \Big|_{\rho=a} = 0.$$

Ж. Для круглого кольца с внутренним радиусом a и внешним радиусом b функция Грина определяется формулой

$$G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0) = \frac{ik_0 Z_0 h}{\pi k^2 (b^2 - a^2)} + \frac{ik_0 Z_0 h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n F_{mn}(\rho_0) F_{mn}(\rho) \cos n(\varphi - \varphi_0)}{[(b^2 - \frac{n^2}{k_{mn}^2}) F_{mn}^2(b) - (a^2 - \frac{n^2}{k_{mn}^2}) F_{mn}^2(a)] (k^2 - k_{mn}^2)}, \quad (5.39)$$

где

$$F_{mn}(\rho) = N'_n(k_{mn}a)J_n(k_{mn}\rho) - J'_n(k_{mn}a)N_n(k_{mn}\rho),$$

а k_{mn} – корень уравнения

$$\frac{J'_n(k_{mn}a)}{N'_n(k_{mn}a)} = \frac{J'_n(k_{mn}b)}{N'_n(k_{mn}b)}.$$

3. Для **сектора кольца** с внутренним радиусом a , внешним радиусом b и углом $\alpha = \pi/l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) функция Грина определяется формулой

$$G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0) = \frac{i2lk_0 Z_0 h}{\pi k^2 (b^2 - a^2)} + \frac{i2lk_0 Z_0 h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n F_{mv}(\rho_0) F_{mn}(\rho) \cos v\varphi_0 \cos v\varphi}{[(b^2 - \frac{v^2}{k_{mv}^2}) F_{mv}^2(b) - (a^2 - \frac{n^2}{k_{mv}^2}) F_{mv}^2(a)] (k^2 - k_{mv}^2)}, \quad (5.40)$$

где $v = nl$, а F_{mv} определяется выше (см. формулу (5.39)).

5.5. Анализ компонентов методами сегментации и десегментации

Если рассматривается планарный компонент, для которого функция Грина не известна, то можно попытаться воспроизвести его форму добавлением или исключением элементов простых форм, для которых функции Грина известны. На рис. 5.4, *а* планарный компонент можно считать составленным из двух прямоугольников, соединенных вдоль общей стороны AB (см. рис. 5.4, *б*). Для получения Z -матрицы этой цепи будем считать, что оба прямоугольных компонента соединены с помощью нескольких отдельных выводов на стороне AB (рис. 5.4, *в*). При возрастании числа выводов вдоль стороны AB увеличивается точность, как и в случае широких внешних выводов. Это пример метода сегментации.

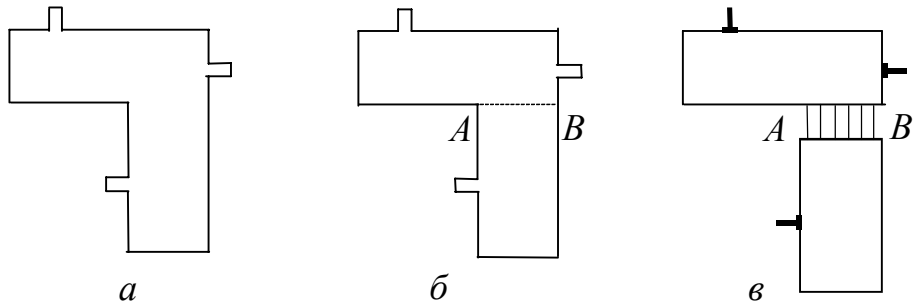


Рис. 5.4. Метод сегментации

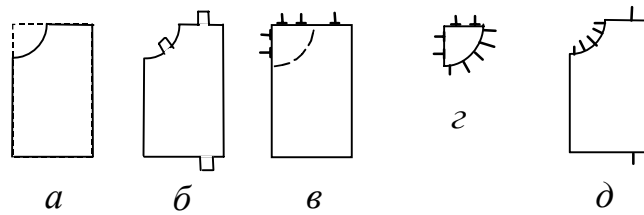


Рис. 5.5. Метод десегментации

Конфигурация другого планарного компонента, представляющая собой прямоугольник с исключенным круговым сектором, приведена на рис. 5.5, *a*. Для получения Z -матрицы цепи, показанной на рис. 5.5, *б*, необходимо вначале определить Z -матрицы элементов, имеющих формы прямоугольника (рис. 5.5, *в*) и кругового сектора (рис. 5.5, *г*). Для компонента, форма которого изображена на рис. 5.5, *д*, Z -матрица может быть получена на основании элементов, изображенных на рис. 5.5, *в* и *г*. Этот метод называется методом десегментации.

Контрольные вопросы

36. Можно ли в рамках модели Олинера рассчитать АЧХ микрополоскового фильтра, содержащего электромагнитно связанные резонаторы?

37. Запишите формулу, выражающую элементы Z -матрицы через функцию Грина микрополоскового компонента с узкими проводниками выводов.

6. МИКРОПОЛОСКОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

6.1. Микрополосковые резонаторы

Простейшим микрополосковым резонатором (МПР) является отрезок микрополосковой линии (МПЛ). Концы полоскового проводника МПР бывают как разомкнуты, так и коротко замкнуты на экран. Ширина W полоскового проводника в общем случае может изменяться вдоль его длины. Обычно она изменяется скачком. Скачок ширины W уединенного МПР приводит к скачку волнового сопротивления Z участка МПЛ. Микрополосковые резонаторы, имеющие скачки волнового сопротивления, называют нерегулярными. Напротив, волновое сопротивление регулярного МПР постоянно по всей длине его полоскового проводника. Так как на разомкнутых концах полоскового проводника образуются узлы тока, а на короткозамкнутых концах – узлы напряжения, то длина регулярного МПР с обоими разомкнутыми концами

$$l = n\lambda_g/2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.1)$$

а длина регулярного МПР с одним разомкнутым концом и одним короткозамкнутым концом

$$l = n\lambda_g/4 \quad (n = 1, 3, 5, \dots), \quad (6.2)$$

где λ_g – длина волны в МПЛ на резонансной частоте. Электрические длины θ этих резонаторов на резонансной частоте кратны* соответственно π и $\pi/2$. Поэтому МПР с обоими разомкнутыми концами называют полуволновым, а МПР с одним разомкнутым и одним короткозамкнутым концом – четвертьволновым. Заметим, что суммарная электрическая длина составляющих отрезков нерегулярного МПР уже не кратна π и $\pi/2$.

Микрополосковые резонаторы в фильтрах СВЧ обычно включают по схеме четырехполюсника. Точки входа и выхода МПР могут быть выбраны в любой точке полоскового проводника. Часто эти точки выбирают на концах проводника.

Получим уравнение для резонансных частот резонатора СВЧ. Рассмотрим входную комплексную проводимость $Y_{вх}(\omega)$ резонатора с разомкну-

* Фактор кратности n тот же, что и для формул (6.1) и (6.2).

тым выходом ($Y_{\text{вых}} = 0$). Очевидно, что частоты ω_n , на которых $Y_{\text{вх}}(\omega)$ обращается в нуль, являются частотами свободных колебаний уединенного резонатора. Последние, в свою очередь, совпадают с резонансными частотами вынужденных колебаний. В отсутствие потерь комплексная проводимость резонатора СВЧ, как и LC -контура, является чисто мнимой величиной. Поэтому уравнение для определения резонансных частот резонатора СВЧ можно записать в виде

$$B(\omega_n) = 0, \quad (6.3)$$

где $B(\omega) \equiv -\text{Im } Y_{\text{вх}}(\omega)$ – реактивная проводимость на входе резонатора СВЧ при разомкнутом выходе.

Получим формулы для реактивных проводимостей $B(\omega)$ некоторых МПР. Начнем с регулярного полуволнового МПР, изображенного на рис. 6.1. Его входом и выходом являются концы полоскового проводника с электрической длиной θ и волновым сопротивлением Z . Матрица передачи $[A]$ такого четырехполюсника выражается формулой (4.5). Согласно (4.3), комплексная проводимость на входе четырехполюсника при разомкнутом выходе связана с элементами A и C его матрицы передачи $[A]$ формулой

$$Y_{\text{вх}} = C/A. \quad (6.4)$$

Подставляя (4.5) в (6.4), получаем комплексную проводимость

$$Y_{\text{вх}} = -iY \text{tg } \theta, \quad (6.5)$$

а с ней и реактивную проводимость

$$B(\omega) = Y \text{tg } \theta, \quad (6.6)$$

где $Y = Z^{-1}$ – волновая проводимость отрезка МПЛ, образующего резонатор.

Из формул (6.3) и (6.6) получаем подтверждение того, что на резонансной частоте электрическая длина θ регулярного полуволнового МПР кратна π .

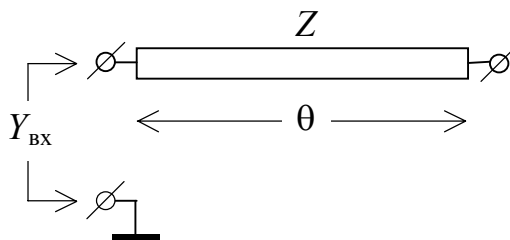


Рис. 6.1. Схема регулярного полуволнового МПР

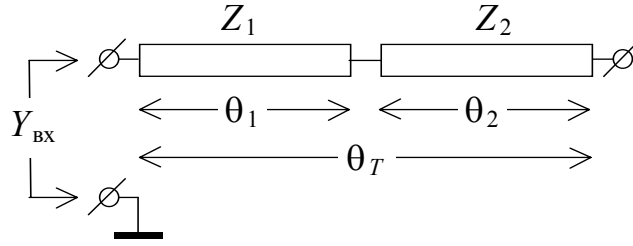


Рис. 6.2. Схема нерегулярного полуволнового МПР

Используя для реактивной проводимости $B(\omega)$ выражение (6.6), вычисляем по формуле (3.17) крутизну реактивной проводимости на частоте n -го резонанса

$$b = Yn\pi/2. \quad (6.7)$$

Здесь при дифференцировании $B(\omega)$ по ω учтено, что θ пропорционально ω .

Перейдем теперь к нерегулярному полуволновому МПР, получающему каскадным соединением двух отрезков МПЛ с волновыми сопротивлениями Z_1, Z_2 и электрическими длинами θ_1, θ_2 (см. рис. 6.2). Суммарная электрическая длина такого резонатора $\theta_T = \theta_1 + \theta_2$. По формулам (4.2) и (4.5) вычисляем их матрицу передачи:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - Z_1 Y_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -i(Z_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + Z_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2) \\ -i(Y_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + Y_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2) & \cos\theta_1 \cos\theta_2 - Y_1 Z_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Подставляя элементы A и C матрицы (6.8) в выражение (6.4) и выделяя в нем мнимую часть, получаем

$$B(\omega) = Y_1 \frac{(Y_1 - Y_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + (Y_1 + Y_2) \sin\theta_T}{(Y_1 - Y_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (Y_1 + Y_2) \cos\theta_T}. \quad (6.9)$$

В частном случае $\theta_1 = \theta_2$ из формул (6.9), (6.3) и (3.17) находим, что на частоте n -го резонанса суммарная электрическая длина проводников

$$\theta_T = n\pi, \quad (6.10)$$

а крутизна реактивной проводимости на входе отрезка МПЛ с волновым сопротивлением Z_1

$$b = \frac{n\pi}{2} Y_1 \frac{1 + Y_1/Y_2}{1 - (-1)^n + (1 + (-1)^n) Y_1/Y_2}. \quad (6.11)$$

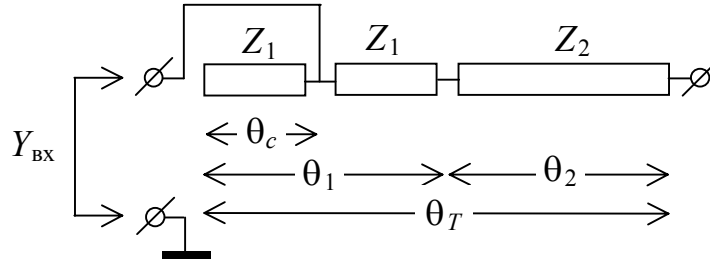


Рис. 6.3. Схема кондуктивного подключения нерегулярного МПП

Рассмотрим теперь случай, когда точка входа МПП смещена от конца полоскового проводника с волновым сопротивлением Z_1 на расстояние $\theta_c < \theta_1$, как показано на рис. 6.3. Такой способ подключения МПП называют кондуктивным или автотрансформаторным.

Реактивная проводимость на входе МПП складывается из реактивных проводимостей двух частей резонатора, на которые точка кондуктивного подключения делит его. Суммируя выражения (6.6) и (6.9), в которые предварительно внесены соответствующие уточнения для электрических длин, получаем

$$B(\omega) = Y_1 \frac{(Y_1 - Y_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + (Y_1 + Y_2) \sin \theta_T}{2 \cos \theta_c [Y_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_c) - Y_2 \sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_c)]}. \quad (6.12)$$

Сравнивая числители выражений (6.9) и (6.12), замечаем, что кондуктивное подключение не влияет на резонансные частоты МПП. Они по-прежнему являются корнями уравнения

$$(Y_1 - Y_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + (Y_1 + Y_2) \sin \theta_T = 0. \quad (6.13)$$

Дифференцируя (6.12) в соответствии с формулой (3.17) и учитывая (6.13), получаем значение параметра крутизны реактанса:

$$b = Y_1 \frac{(Y_1 - Y_2) (\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (Y_1 + Y_2) \theta_T \cos \theta_T}{4 \cos \theta_c [Y_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_c) - Y_2 \sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_c)]}. \quad (6.14)$$

Подробнее остановимся на симметричной конструкции нерегулярного полуволнового МПП, изображенной на рис. 6.4. Резонатор такой конструкции называют резонатором со скачком волнового сопротивления (СВС). Резонатор с СВС получается каскадным соединением двух нерегулярных полуволновых МПП, изображенных на рис. 6.2, один из которых предварительно повернут на 180° или зеркально отображен относительно поперечной плоскости.

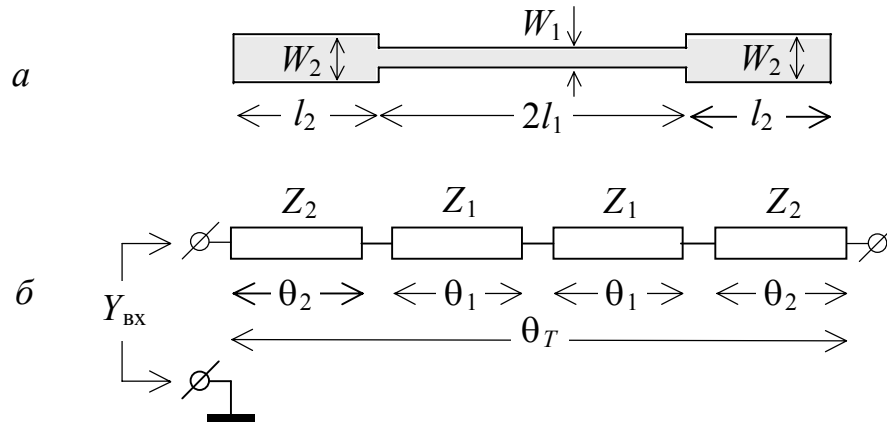


Рис. 6.4. Симметричный нерегулярный полуволновый МПР:
а – рисунок полоскового проводника; б – схема

Матрицу передачи такого МПР можно рассчитать, перемножая матрицу передачи левой половины резонатора, получающуюся из (6.8) заменой индексов $1 \rightleftharpoons 2$, на матрицу передачи правой половины резонатора, выражаемую формулой (6.8). Подставляя элементы A и C полученной матрицы в формулу (6.4) и выделяя в ней мнимую часть, находим реактивную проводимость на входе МПР

$$B = Y_2 \frac{2(K \operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)(K - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2)}{K(1 - \operatorname{tg}^2 \theta_1)(1 - \operatorname{tg}^2 \theta_2) - 2(K^2 + 1) \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}, \quad (6.15)$$

где K – параметр СВС, определяемый отношением

$$K = Z_2 / Z_1. \quad (6.16)$$

Приравнявая нулю выражения в обеих круглых скобках числителя в формуле (6.15), получаем, согласно (6.3), два независимых уравнения для определения резонансных частот

$$K - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 = 0, \quad (6.17)$$

$$K \operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 = 0. \quad (6.18)$$

Уравнение (6.17) задает частоты ω_n всех нечетных резонансов, в том числе и первого ($n = 1, 3, 5, \dots$). Уравнение (6.18) задает частоты всех четных резонансов ($n = 2, 4, 6, \dots$).

Полосы пропускания в фильтрах СВЧ образуются на резонансных частотах. Обычно первую полосу пропускания фильтра делают рабочей (основной). Через нее проходит выделяемый сигнал. Все остальные полосы пропус-

кания оказываются паразитными. Через них проходят помехи и шумы. Часто бывает важно как можно дальше отодвинуть от рабочей полосы ближайшую к ней паразитную полосу пропускания.

Найдем зависимость суммарной электрической длины $\theta_T = 2\theta_1 + 2\theta_2$ на частоте первого резонанса от θ_1 . Для этого уравнение (6.17) перепишем в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_T}{2} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + K/\operatorname{tg} \theta_1}{1 - K} \quad (K \neq 1). \quad (6.19)$$

На рис. 6.5 по формуле (6.19) построены зависимости суммарной электрической длины θ_T симметричного нерегулярного МПР от относительной электрической длины его внутреннего участка. Видно, что уменьшение K при $0 < 2\theta_1/\theta_T < 1$ приводит к уменьшению θ_T , а увеличение K – к увеличению θ_T . Так как волновое сопротивление любой МПЛ увеличивается с уменьшением ширины ее полоскового проводника, уменьшение ширины центрального участка МПР приводит к уменьшению отношения K . Поэтому уменьшение ширины центрального участка полоскового проводника в МПР с СВС приводит к уменьшению его электрической длины ($\theta_T < \pi$), а увеличение ширины – к увеличению электрической длины ($\theta_T > \pi$).

Уменьшение суммарной электрической длины θ_T нерегулярного МПР при фиксированной резонансной частоте ω_1 означает уменьшение его суммарной геометрической длины $l_T = 2l_1 + 2l_2$, а уменьшение θ_T при фиксированной длине l_T означает понижение резонансной частоты ω_1 .

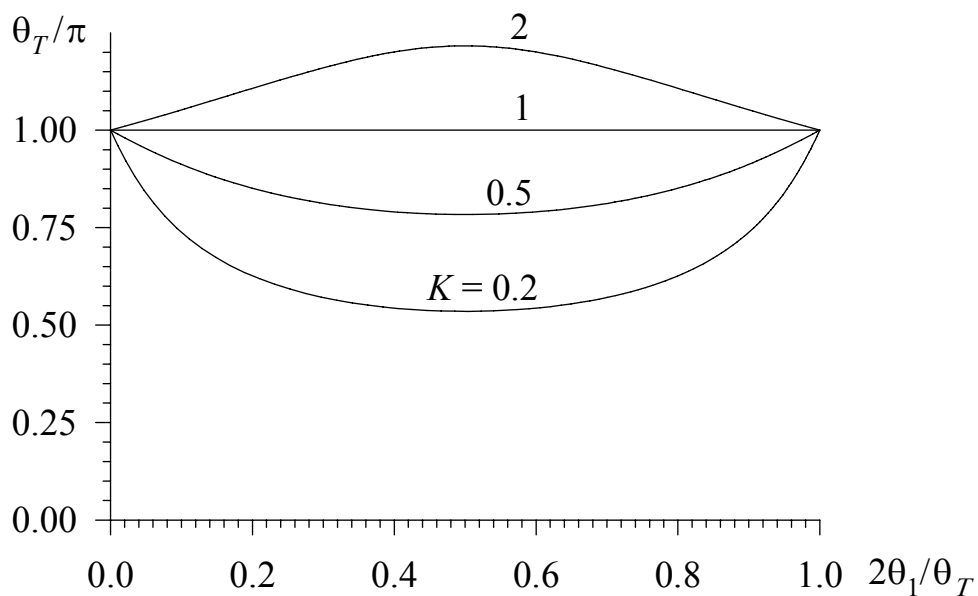


Рис. 6.5. Зависимости суммарной электрической длины нерегулярного полуволнового МПР от длины его внутреннего участка

Наоборот, увеличение θ_T означает увеличение длины l_T или повышение частоты ω_1 .

Найдем минимум функции $\theta_T(\theta_1)$ при $K < 1$ и максимум при $K > 1$. Дифференцируя правую и левую части уравнения (6.19) по θ_1 , получаем

$$[\operatorname{tg}^2 \theta_1 - K] / [(1 - K) \sin^2 \theta_1] = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (6.19), находим, что в точке экстремума

$$\theta_1 = \theta_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{K}, \quad \theta_T = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{K}. \quad (6.20)$$

На рис. 6.6 по формулам (6.17) и (6.18) построены зависимости $\theta_T(\lg K)$ на резонансных частотах при различных значениях $2\theta_1/\theta_T$. Очевидно, что при фиксированной длине резонатора l_T аналогичные зависимости имеют резонансные частоты ω_n .

Как уже отмечалось, для увеличения ширины высокочастотной полосы заграждения часто бывает важно обеспечить максимальное отношение резонансных частот ω_2/ω_1 . Расчет показывает, что это отношение экстремально, когда электрическая длина внутреннего участка МПР составляет $1/3$ от суммарной электрической длины резонатора, то есть при $2\theta_1/\theta_T = 1/3$. Этот случай иллюстрирует график на рис. 6.6, б.

Вычислим теперь параметр крутизны реактивной проводимости резонатора с СВС на частоте первого резонанса. Дифференцируя (6.15) согласно формуле (3.17) и учитывая (6.17), получаем

$$b = Y_2 \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right). \quad (6.21)$$

Результаты, приведенные в этом разделе, требуют следующего уточнения. Все расчеты МПР выполнены в одномодовом* приближении, то есть в приближении длинных линий. Это значит, что при расчете резонаторов учитывалась только волна основного типа, которая является единственной волной в МПЛ, осуществляющей перенос энергии. Никакие волны высших типов, которые локализуются вблизи нерегулярностей МПЛ, не учитывались. В микрополосковом резонаторе такими нерегулярностями являются разомкнутые концы полоскового проводника. Локализация на них волн высшего типа проявляется в резком возрастании погонной плотности зарядов.

* Мода – это синоним волны или колебания заданного типа.

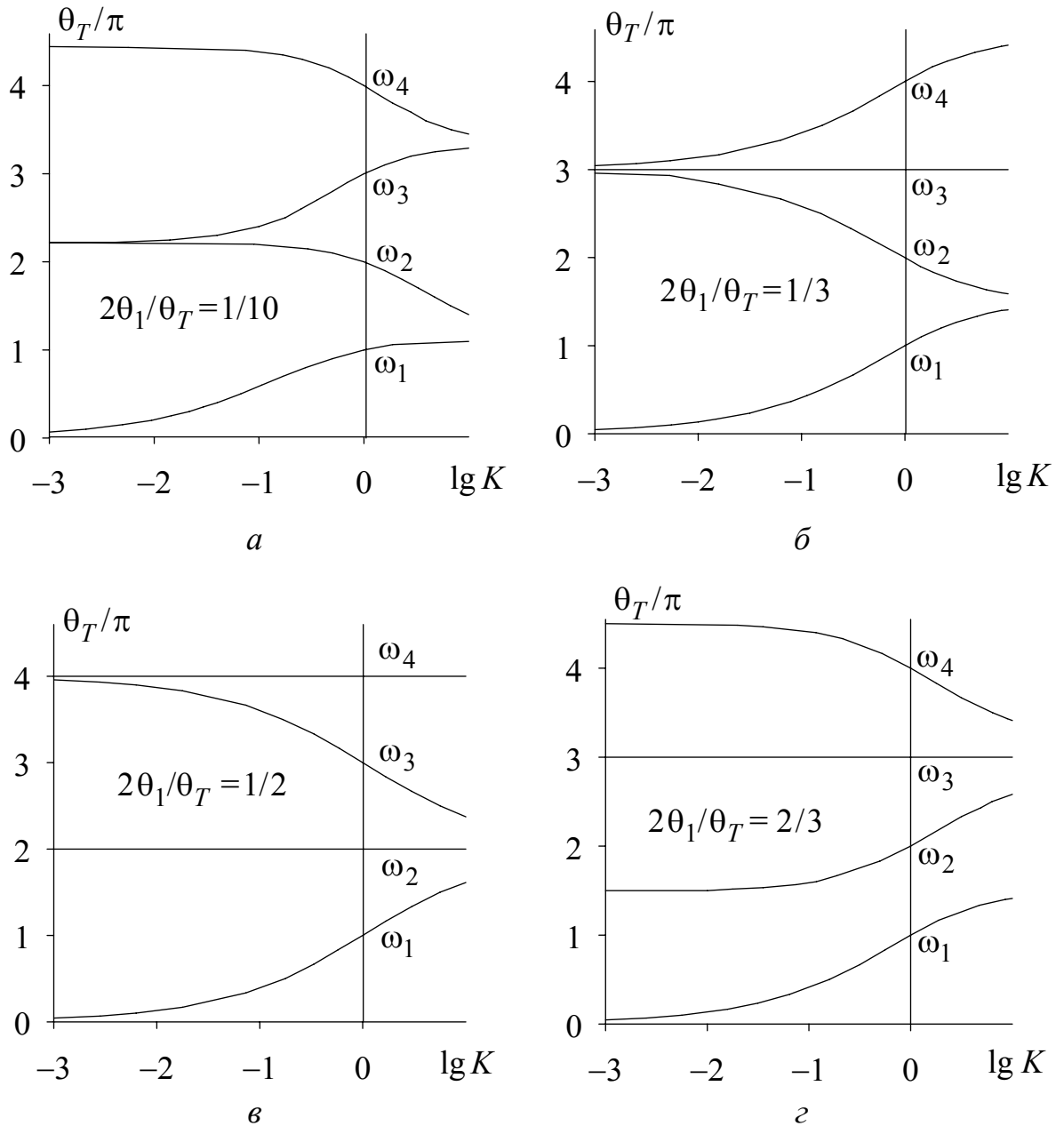


Рис. 6.6. Зависимости электрических длин МПР от параметра СВС при различной длине внутреннего участка

Такое возрастание эквивалентно внесению в схему МПР некоторой точечной концевой емкости C_k дополнительно к погонной емкости C . Величина концевой емкости, пФ, может быть вычислена по приближенной формуле

$$C_k = 1.373 \frac{\varepsilon_{eff} + 0.3}{\varepsilon_{eff} - 0.258} \sqrt{\varepsilon_{eff}} \frac{W/h + 0.264}{W/h + 0.8} \frac{h}{Z}, \quad (6.22)$$

где толщина подложки h и ширина полоскового проводника W выражены в

миллиметрах, а волновое сопротивление Z – в омах. При $2 \leq \varepsilon_r \leq 50$ и $W \geq 0.2$ погрешность этой формулы составляет около 4 %.

Очевидно, что наличие концевых емкостей C_k на концах отрезка МПЛ эквивалентно его удлинению на каждом конце на величину $\Delta l = C_k / C$. Поэтому при расчете МПР в одномодовом приближении влияние волн высшего типа будет учтено, если конечную расчетную длину l полоскового проводника укоротить на величину Δl с каждого конца. Из (6.22) и (2.20)–(2.21) следует, что укорочение может быть вычислено по формуле

$$\Delta l = 0.414 \frac{\varepsilon_{eff} + 0.3}{\varepsilon_{eff} - 0.258} \cdot \frac{W/h + 0.264}{W/h + 0.8} h. \quad (6.23)$$

Рассмотренные здесь нерегулярные МПР содержат кроме разомкнутого конца еще одну нерегулярность – скачок ширины полоскового проводника. На нем также локализуются волны высшего типа. Они обеспечивают непрерывность напряженности электрического и магнитного поля по обе стороны поперечной плоскости, в которой состыковываются две МПЛ. Скачок ширины полоскового проводника также можно описать в рамках приближенной квазистатической модели. Однако эта модель более сложная, так как содержит не только параллельную емкость, но и последовательные индуктивности. Поэтому путем простого укорочения или удлинения резонатора учесть влияние волн высшего типа вблизи скачка ширины полоскового проводника не удастся.

6.2. Фильтры СВЧ и их синтез

Фильтрами СВЧ называют четырехполюсники, осуществляющие передачу колебаний СВЧ от источника (генератора) в согласованную нагрузку в соответствии с заданной частотной характеристикой. Частотная характеристика включает в себя амплитудную и фазовую характеристики. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) описывается функцией затухания $L(\omega)$ и функцией потерь на отражение $L_r(\omega)$ *.

Затухание определяется формулой

$$L = 10 \lg(P_{in}/P_{out}) = -20 \lg |S_{21}|, \quad (6.24)$$

* Индекс r в $L_r(\omega)$ от англ. *return* – возврат, отражение.

где P_{in} и P_{out} – мощности на входе и выходе фильтра*; S – матрица рассеяния фильтра; 1, 2 – номера входного и выходного портов фильтра.

Потери на отражение определяются формулой

$$L_r = 10 \lg(P_{in}/P_r) = -20 \lg|S_{11}|, \quad (6.25)$$

где P_r – отраженная от фильтра мощность.

Величины L и L_r , определяемые формулами (6.24), (6.25), положительны**, если фильтры не содержат усилителей.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) описывается функцией сдвига фазы $\varphi(\omega)$. Сдвиг фазы выражается формулой $\varphi = \varphi_{out} - \varphi_{in} = \arg(S_{21})$, где φ_{in} и φ_{out} – фазы напряжения сигнала на входе и выходе фильтра. С функцией сдвига фазы тесно связано групповое время запаздывания $\tau = d\varphi/d\omega$.

Весь частотный диапазон фильтра СВЧ условно разделяют на полосы пропускания и полосы заграждения, между которыми располагаются переходные области. В полосе пропускания затухание фильтра минимально, а в полосе заграждения – максимально. С точки зрения минимизации фазовых искажений сигнала, групповое время $\tau(\omega)$ должно быть максимально постоянным, то есть должно иметь минимальную неравномерность $\Delta\tau$ в полосе пропускания. Высокое затухание сигнала в полосе заграждения достигается за счет сильного отражения на входе фильтра.

По типу взаимного расположения полос пропускания и заграждения фильтры СВЧ разделяются на фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие фильтры (ППФ), или полосовые фильтры (ПФ), и полосно-заграждающие фильтры (ПЗФ), или режекторные фильтры (РФ).

Синтезом фильтра СВЧ называют проектирование фильтра СВЧ с заданной АЧХ и другими заданными характеристиками. Синтез выполняется в два этапа. На первом этапе осуществляется структурный синтез. Его задачей является выбор элементной базы, состава и структуры устройства СВЧ. Решение этой задачи зависит от накопленного опыта проектировщика. На втором этапе осуществляется параметрический синтез, задачей

* Индекс *in* от *input* – вход, индекс *out* от *output* – выход.

** Иногда величины L и L_r определяют с противоположным знаком.

которого является определение значений параметров конструктивных элементов выбранной структуры, обеспечивающих заданную частотную характеристику.

Параметрический синтез, в свою очередь, бывает оптимизационным и прямым. При оптимизационном синтезе оптимальные значения конструктивных параметров, обеспечивающих заданные АЧХ, находятся последовательными приближениями [14–16]. Сначала, исходя из имеющегося опыта, задаются начальные значения параметров элементов конструкции. Затем на каждой итерации определяется АЧХ, отвечающая текущим значениям конструктивных параметров. Эта АЧХ сравнивается с требуемой АЧХ и по результатам сравнения уточняются текущие значения конструктивных параметров. Итерации прекращаются, когда расхождение текущей и требуемой АЧХ не будет превышать допустимые пределы.

Определение частотных характеристик по заданным значениям конструктивных параметров называют анализом фильтра СВЧ. Анализ может быть выполнен как экспериментально, так и теоретически. Точность теоретического анализа и его продолжительность в значительной мере зависят от выбранной математической модели фильтра СВЧ.

При нахождении поправок к текущим значениям конструктивных параметров используются различные методы оптимизации [6]. Сущность последних заключается в нахождении положения глобального минимума скалярной целевой функции в пространстве всех допустимых значений конструктивных параметров. Целевая функция есть функционал текущей АЧХ, характеризующий степень ее отклонения от заданной АЧХ в контрольных точках. Ее можно задать различными формулами. Однако она должна быть всегда положительной и обращаться в нуль лишь при совпадении текущей и требуемой АЧХ в контрольных точках. Заметим, что как сама возможность достижения глобального минимума целевой функции, так и количество требуемых для этого итераций в значительной степени зависят от того, насколько близки будут начальные значения конструктивных параметров к значениям параметров в точке глобального минимума.

При прямом параметрическом синтезе значения конструктивных параметров фильтров СВЧ вычисляются по формулам, как правило, приближенным. Такие формулы получают сравнением электрических параметров составляющих фильтр СВЧ элементов с эквивалентными схемами на сосредоточенных элементах, то есть на L - и C -элементах. При этом

значения электрических параметров эквивалентных схем получают из фильтров-прототипов на сосредоточенных элементах. Схемы называют эквивалентными, если они имеют одинаковые электрические параметры вблизи рассматриваемой частоты. В данном случае это центральная частота полосы пропускания. Фильтрами-прототипами называют фильтры на сосредоточенных элементах, имеющие АЧХ с заданными параметрами полосы пропускания. Параметром малости приближенных формул прямого синтеза является относительная ширина полосы пропускания. Чем она уже, тем выше точность формул. Как правило, в формулах прямого синтеза не учитывается влияние потерь энергии СВЧ.

Таким образом, прямой параметрический синтез возможен лишь для тех конструкций фильтров СВЧ, для которых получены соответствующие формулы. Этот синтез не требует больших затрат времени. Он также не предполагает высокую квалификацию проектировщика и наличие у него большого опыта. Нередко синтезированные фильтры требуют последующей подстройки.

Оптимизационный параметрический синтез применим к любым конструкциям фильтров СВЧ. В отсутствие высокоинтеллектуальных САПР (узкоспециализированных экспертных систем) он предполагает высокую квалификацию проектировщика и наличие у него большого опыта. Оптимизационный параметрический синтез – это длительный процесс. Он обеспечивает высокую точность, которая при использовании теоретического анализа полностью определяется выбранной математической моделью фильтра СВЧ.

6.3. Фильтр-прототип

Прямой синтез полосно-пропускающего фильтра на связанных резонаторах СВЧ начинается с определения параметров фильтра-прототипа нижних частот. Две возможные схемы такого фильтра приведены на рис. 6.7. Эти схемы дуальны одна другой. На схемах R_0 – входное сопротивление генератора, G_0 – его проводимость, R_{n+1} – сопротивление нагрузки, G_{n+1} – ее проводимость, L_i и C_i – величины индуктивных и емкостных элементов фильтра ($i=1, 2, \dots, n$). Величины g_i поясняются на рисунке. Их использование позволяет описывать обе схемы одновременно.

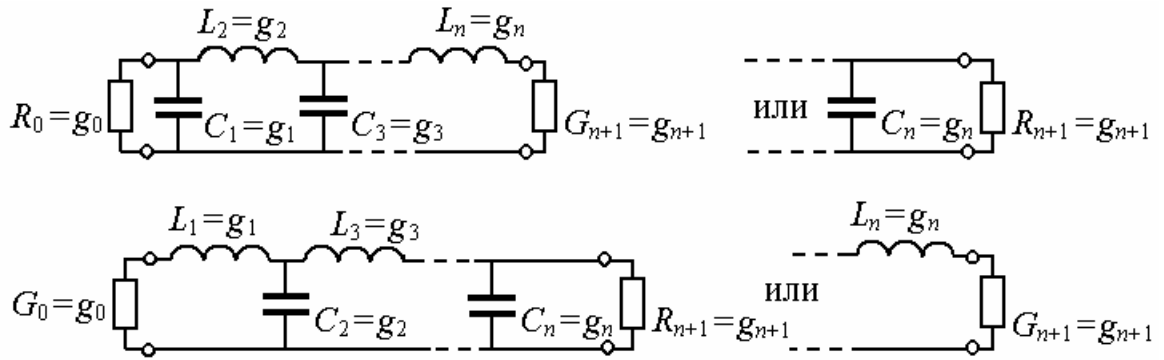


Рис. 6.7. Фильтры-прототипы нижних частот

Функция передачи мощности для схем, приведенных на рис. 6.7, всегда является полиномом степени n относительно квадрата частоты (Ω^2). Конкретный вид полинома зависит от значений параметров g_i . Функцию передачи мощности можно аппроксимировать различными многочленами. Часто выбирают многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x) & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (6.26)$$

которые обеспечивают равноотклоняющуюся функцию передачи в полосе пропускания ($T_n(x) \leq 1$ при $|x| \leq 1$). В этом случае функция затухания фильтра имеет вид

$$L(\Omega) = 10 \lg [1 + \eta T_n^2(\Omega/\Omega_1)], \quad (6.27)$$

где Ω_1 – граничная частота полосы пропускания; η – параметр, связанный с неравномерностью затухания в полосе пропускания ΔL и минимальными потерями на отражение L_r формулой*

$$\eta = 10^{\Delta L/10} - 1 = \frac{1}{10^{L_r/10} - 1}. \quad (6.28)$$

Согласно формулам (6.26)–(6.27) решение обратной задачи о нахождении суммарного числа индуктивных и емкостных элементов по заданному затуханию $L(\Omega)$ имеет вид

* Второе равенство в формуле (6.28) вытекает из предположения об отсутствии поглощения энергии СВЧ в фильтре.

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} \sqrt{[10^{L(\Omega)/10} - 1]/\eta}}{\operatorname{arch}(\Omega/\Omega_1)}. \quad (6.29)$$

Чебышевскую характеристику называют также равноволновой характеристикой. График ее функции затухания представлен на рис. 6.8. Видно, что на границе полосы пропускания Ω_1 затухание L равно ΔL .

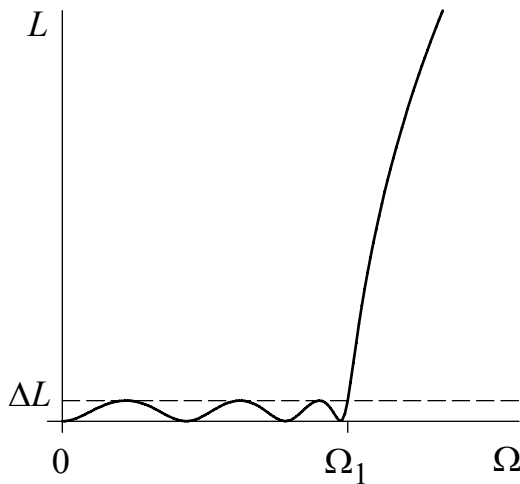


Рис. 6.8. Чебышевская характеристика ($n=7$)

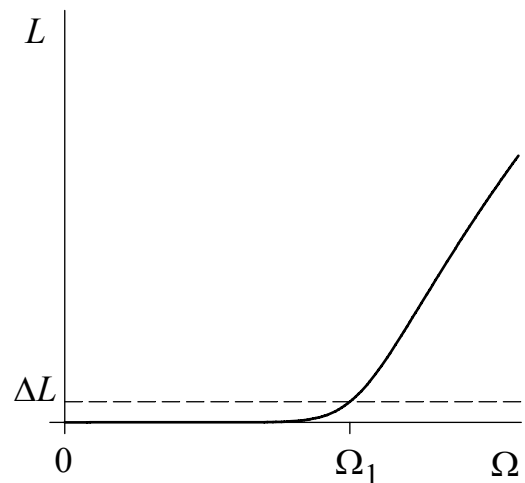


Рис. 6.9. Максимально плоская характеристика ($n=7$)

Обычно рассматривают нормированный фильтр-прототип, в котором

$$g_0 = 1 \text{ Ом}, \quad \Omega_1 = 1 \text{ рад/с}. \quad (6.30)$$

Зная параметры g_i нормированного фильтра, параметры соответствующего ненормированного фильтра можно вычислить по формулам

$$L_i = g_i R_0 / \Omega_1, \quad C_i = g_i / (R_0 \Omega_1). \quad (6.31)$$

Нормированные параметры g_i чебышевского фильтра-прототипа нижних частот вычисляют по формулам

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 2a_1/\gamma; \\ g_k = \frac{4a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n; \quad g_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ \operatorname{cth}^2(\beta/4), & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases} \quad (6.32)$$

Здесь использованы вспомогательные параметры

$$\beta = 2 \operatorname{arth} \sqrt{10^{-\Delta L/10}} = 2 \operatorname{arth} \sqrt{1 - 10^{-L_r/10}}, \quad \gamma = \operatorname{sh} \left(\frac{\beta}{2n} \right), \quad (6.33)$$

$$a_k = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad b_k = \gamma^2 + \sin^2(k\pi/n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Предельным случаем чебышевской характеристики является максимально плоская характеристика. Эту характеристику называют также характеристикой Баттерворта. Ее функция затухания описывается формулой

$$L(\Omega) = 10 \lg [1 + \eta (\Omega/\Omega_1)^{2n}], \quad (6.34)$$

где Ω_1 – граничная частота полосы пропускания; η – параметр, связанный с неравномерностью затухания ΔL и минимальными потерями на отражение L_r в полосе пропускания формулами (6.28). Функция затухания (6.34) в отличие от функции (6.27) не имеет осцилляций. Она монотонно возрастающая. Ее график приведен на рис. 6.9.

Согласно (6.34) решение обратной задачи о нахождении суммарного числа индуктивных и емкостных элементов по заданному затуханию $L(\Omega)$ имеет вид

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{[10^{L(\Omega)/10} - 1]/\eta}}{\lg (\Omega/\Omega_1)}. \quad (6.35)$$

Нормированные параметры g_i баттервортовского фильтра-прототипа нижних частот при $\eta = 1$ вычисляют по формулам

$$g_0 = 1, \quad g_{n+1} = 1, \quad (6.36)$$

$$g_k = 2 \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Любую из двух дуальных схем ФНЧ, приведенных на рис. 6.7, можно преобразовать в соответствующую эквивалентную схему, заменяя в ней все параллельные емкости на последовательные индуктивности либо, наоборот, все последовательные индуктивности на параллельные емкости. Так как замена параллельной емкости на последовательную индуктивность и наоборот сопровождается инверсией комплексного сопротивления ($i\Omega^{-1}C^{-1} \rightleftharpoons -i\Omega L$), для компенсации такой инверсии необходимо включать в схему инверторы сопротивления.

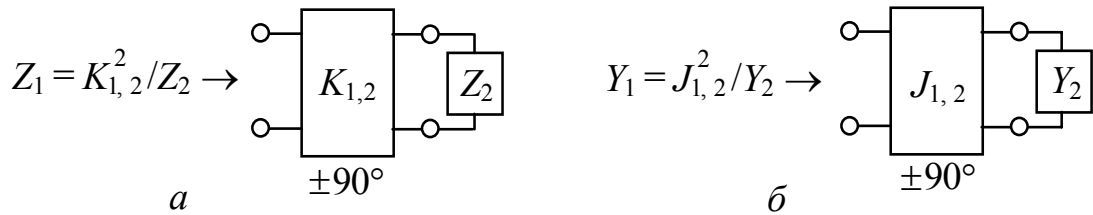


Рис. 6.10. Идеальные инверторы сопротивлений (а) и проводимости (б)

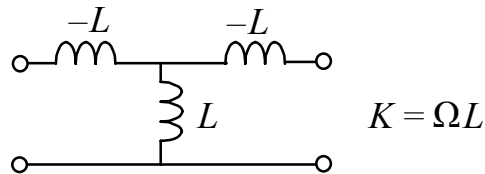


Рис. 6.11. Вариант практической реализации инвертора сопротивлений

Инвертор сопротивления – это четырехполюсник, который ведет себя на всех частотах подобно четвертьволновому ($\theta = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$) отрезку линии с волновым сопротивлением K . Поэтому, если инвертор сопротивления нагружен на одном входе на сопротивление Z_2 , то его сопротивление на другом входе будет $Z_1 = K^2/Z_2$ (см. рис. 6.10, а). Аналогично работает инвертор проводимости (см. рис. 6.10, б). В соответствии с формулой (4.5), инвертор сопротивления (проводимости) при $\theta = -\pi/2$ имеет матрицу передачи

$$[A_{inv}] = \begin{bmatrix} 0 & iK \\ iK^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & iJ^{-1} \\ iJ & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Существует несколько схем практической реализации инверторов сопротивлений. На рис. 6.11 изображена одна из них. Она содержит три индуктивности, соединенные по T -схеме. Две из этих индуктивностей, расположенные горизонтально, имеют отрицательные значения. На практике отрицательная величина индуктивности реализуется соответствующим уменьшением последовательной индуктивности нагрузки на входе и выходе инвертора.

Схемы ФНЧ, получающиеся заменой в схемах на рис. 6.7 параллельных емкостей на последовательные индуктивности и обратной заменой, изображены на рис. 6.12.

Вводя в схему фильтра инверторы сопротивлений или проводимостей, значения последовательных индуктивностей L_i и параллельных емкостей C_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а также значения сопротивления и проводимости генератора

R_A , G_A и нагрузки R_B , G_B , можно задавать произвольно, если параметры инверторов будут следующими:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{R_A L_1}{g_0 g_1}}, \quad K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L_i L_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}, \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{L_n R_B}{g_n g_{n+1}}},$$

$$J_{01} = \sqrt{\frac{G_A C_1}{g_0 g_1}}, \quad J_{i,i+1} = \sqrt{\frac{C_i C_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}, \quad J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{C_n G_B}{g_n g_{n+1}}}.$$
(6.38)

Докажем справедливость формул для параметра $K_{i,i+1}$. Для этого на схеме ФНЧ, приведенной на рис. 6.12, выделим звено, содержащее две последовательные индуктивности L_i и L_{i+1} , соединенные инвертором сопротивления $K_{i,i+1}$, и изобразим его на рис. 6.13, где также представим соответствующие ему LC -звенья двух дуальных схем, приведенных на рис. 6.7.

Сравним значения входных сопротивлений звеньев, изображенных на рис. 6.13, *а* и *б*. Для определенности будем считать, что правое плечо LC -звена на рис. 6.13, *б* разомкнуто. Тогда дуальное ему LC -звено на рис. 6.13, *в* будет иметь короткозамкнутое правое плечо. А значит, и звено на рис. 6.13, *а*, образованное последовательными индуктивностями и K -инвертором, также будет иметь короткозамкнутое правое плечо.

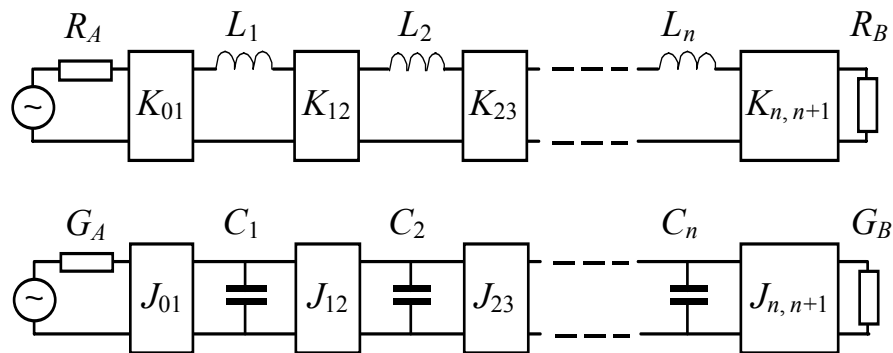


Рис. 6.12. Фильтры-прототипы нижних частот с инверторами сопротивлений

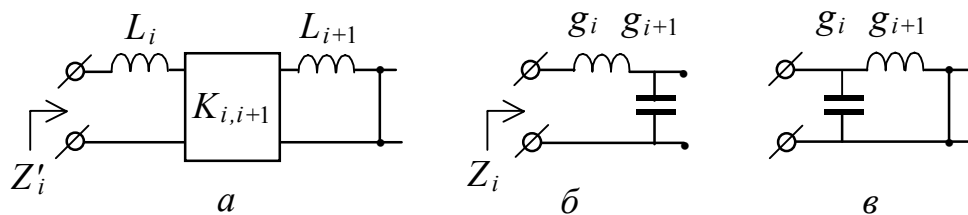


Рис. 6.13. К выводу формул (6.38)

Согласно схемам на рис. 6.13, *a* и *б* для входных сопротивлений имеем

$$Z'_i = -i \Omega L_i + \frac{K_{i,i+1}^2}{-i \Omega L_{i+1}}, \quad (6.39)$$

$$Z_i = -i \Omega g_i + \frac{1}{-i \Omega g_{i+1}}. \quad (6.40)$$

Сопротивления Z'_i и Z_i должны совпадать на любой частоте Ω с точностью до постоянного множителя L_i/g_i , характеризующего изменение уровня сопротивления. Поэтому отношение вторых слагаемых в формулах (6.39), (6.40) должно равняться отношению первых слагаемых. Отсюда получаем значение для параметра $K_{i,i+1}$, выражаемое формулой (6.38). Аналогичным образом получают значения для остальных параметров в формуле (6.38).

Функцию затухания полосно-пропускающего фильтра $L(\omega)$ получают из функции затухания фильтра нижних частот $L(\Omega)$ с помощью какого-либо подходящего частотного преобразования. Чаще всего используют преобразование вида

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{1}{w} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right), \quad (6.41)$$

где

$$w = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \quad (6.42)$$

– относительная ширина полосы пропускания;

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (6.43)$$

– ее центральная частота; ω_1 , ω_2 – граничные частоты полосы пропускания, отвечающие уровню затухания $L(\Omega_1)$. Вид АЧХ, получающейся при использовании преобразования (6.41), приведен на рис. 6.14.

Частотное преобразование (6.41) соответствует преобразованию ФНЧ на рис. 6.7 в ППФ на рис. 6.15, содержащий чередующиеся параллельные и последовательные LC -контур. Причем резонансные частоты всех LC -контуров равны ω_0 .

Применение частотного преобразования (6.41) в отношении схем ФНЧ на рис. 6.10 соответствует их замене на схемы ППФ, приведенные на рис. 6.16 и рис. 6.17.

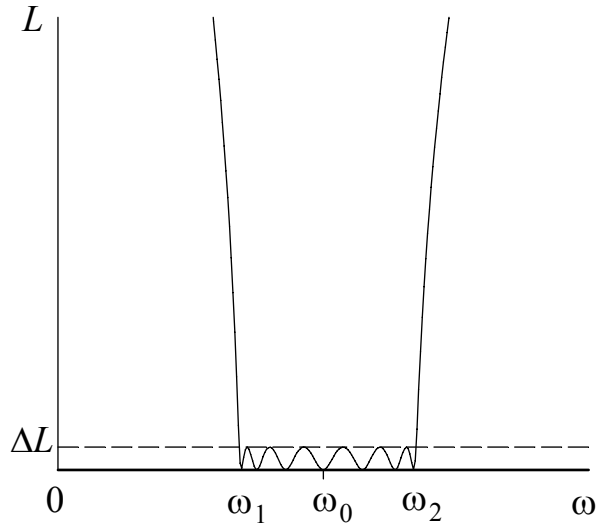


Рис. 6.14. АЧХ полосно-пропускающего фильтра ($n = 7$)

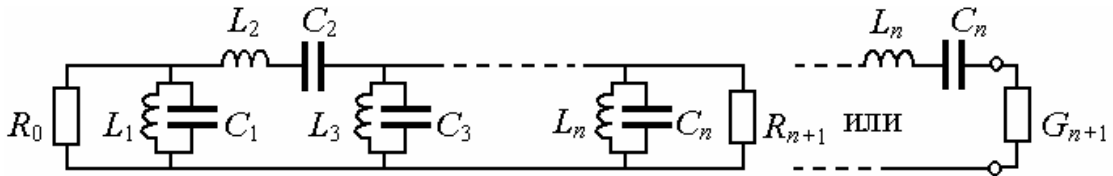


Рис. 6.15 Схема ППФ на параллельных и последовательных LC-контурах

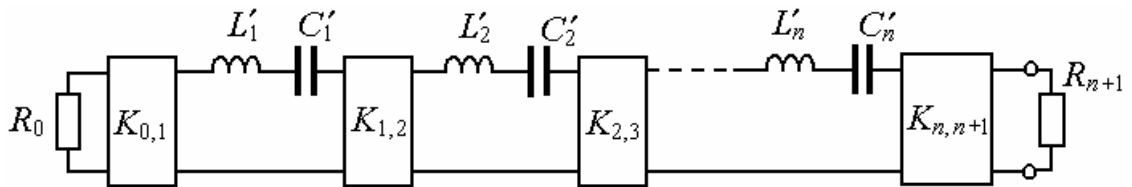


Рис. 6.16. Схема ППФ, содержащего последовательные LC-контуры и инверторы сопротивлений

Выразим параметры L'_i и C'_i на рис. 6.16 через параметры L_i на рис. 6.12. Для этого реактивное сопротивление i -й последовательной индуктивности на рис. 6.12 приравняем с учетом формулы (6.41) реактивному сопротивлению i -го последовательного контура на рис. 6.16:

$$-i\Omega L_i = -i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{\Omega_1}{w} L_i = -i\omega L'_i + \frac{1}{-i\omega C'_i}.$$

Отсюда находим

$$L'_i = \frac{\Omega_1}{\omega_0 w} L_i, \quad C'_i = \frac{w}{\omega_0 \Omega_1 L_i}. \quad (6.44)$$

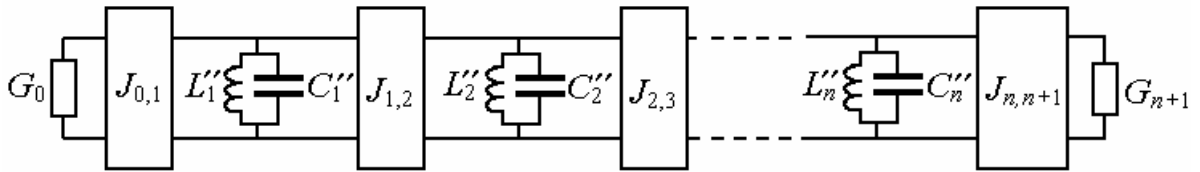


Рис. 6.17. Схема ППФ, содержащего параллельные LC -контуров и инверторы проводимости

Аналогичным образом находим параметры схемы на рис. 6.17:

$$C_i'' = \frac{\Omega_1}{\omega_0 w} C_i, \quad L_i'' = \frac{w}{\omega_0 \Omega_1 C_i}. \quad (6.45)$$

Схемы ППФ на резонаторах СВЧ можно получить из схем на рис. 6.16 и рис. 6.17 заменой последовательных LC -контуров на последовательные резонаторы СВЧ, а параллельных LC -контуров на параллельные резонаторы СВЧ.

Прежде чем осуществить замену LC -контуров, напомним их электрические свойства. Последовательные и параллельные LC -контуров являются двухполюсниками. Комплексное сопротивление Z последовательного контура и комплексная проводимость Y параллельного контура выражаются формулами (3.18) и (3.19).

На резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ реактивное сопротивление $X(\omega)$ последовательного контура и реактивная проводимость $B(\omega)$ параллельного контура обращаются в нуль. Как уже говорилось, поведение реактансов $X(\omega)$ и $B(\omega)$ вблизи резонансной частоты ω_0 характеризуют параметрами крутизны x и b , определяемыми формулами (3.16) и (3.17). Из формул (3.18) и (3.19) следует, что параметры крутизны реактансов контуров

$$x = \sqrt{L/C}, \quad b = \sqrt{C/L}. \quad (6.46)$$

На рис. 6.18 и рис. 6.19 приведены две дуальные схемы ППФ, получающиеся заменой LC -контуров в схемах на рис. 6.16 и рис. 6.17 на резонаторы СВЧ. Очевидно, что новые схемы ППФ по своим частотным характеристикам будут тождественны своим прототипам, если реактансы резонаторов СВЧ совпадут с реактансами соответствующих LC -контуров. Однако из-за различия свойств LC -контуров и резонаторов СВЧ такое совпадение можно обеспечить только в ограниченной полосе частот. Поэтому потребуем совпадение реактансов прежде всего в полосе пропускания, то есть вблизи резонансной частоты ω_0 . Для этого помимо совпадения резонансных частот необходимо обеспечить совпадение параметров крутизны реактансов.

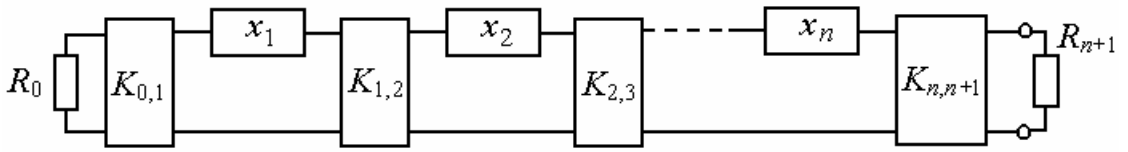


Рис. 6.18. Схема ППФ, содержащего последовательные резонаторы СВЧ и инверторы сопротивлений

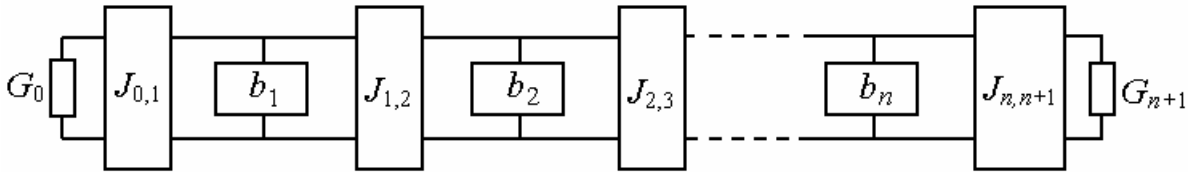


Рис. 6.19. Схема ППФ, содержащего параллельные резонаторы СВЧ и инверторы проводимости

Выразим параметры инверторов $K_{i,i+1}$ и $J_{i,i+1}$ через параметры крутизны реактансов x_i и b_i . Для этого сначала выразим последовательные индуктивности L_i и параллельные емкости C_i через реактансы x_i и b_i . Согласно формулам (6.44)–(6.46) имеем

$$L_i = x_i w / \Omega_1, \quad C_i = b_i w / \Omega_1. \quad (6.47)$$

Подставляя (6.47) в (6.38), получаем

$$\begin{aligned} K_{01} &= \sqrt{\frac{w R_A x_1}{\Omega_1 g_0 g_1}}, \quad K_{i,i+1} = \frac{w}{\Omega_1} \sqrt{\frac{x_i x_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}, \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{w x_n R_B}{\Omega_1 g_n g_{n+1}}}, \\ J_{01} &= \sqrt{\frac{w G_A b_1}{\Omega_1 g_0 g_1}}, \quad J_{i,i+1} = \frac{w}{\Omega_1} \sqrt{\frac{b_i b_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}, \quad J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{w b_n G_B}{\Omega_1 g_n g_{n+1}}}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Напомним, что в случае нормированных параметров g_i граничная частота $\Omega_1 = 1$ (см. формулу (6.30)).

Таким образом, в полосно-пропускающих фильтрах, приведенных на рис. 6.18 и рис. 6.19, все резонаторы СВЧ должны быть настроены на частоту ω_0 , определяемую формулой (6.43). Значения параметров крутизны x_i или b_i , а также параметров R_A , R_B или G_A , G_B могут быть заданы произвольно, руководствуясь только соображениями удобства проектирования. Требуемая форма характеристики достигается за счет определенного выбора параметров инверторов $K_{i,i+1}$ или $J_{i,i+1}$, выражаемого формулами (6.48).

Точность формул (6.48), то есть степень совпадения АЧХ спроектированного фильтра с выбранной аппроксимирующей характеристикой, полностью определяется тем, в сколь широкой полосе частот реактансы резонаторов СВЧ совпадают с реактансами LC -контуров фильтра-прототипа, а параметры инверторов остаются постоянными. Точность формул (6.48) возрастает с уменьшением полосы частот. В некоторых случаях хорошие результаты могут быть получены для $w \leq 0.2$ при использовании полуволновых резонаторов и для $w \leq 0.4$ при использовании четвертьволновых МПР.

Резонаторы СВЧ в схемах ППФ на рис. 6.18 и рис. 6.19 включены как последовательные или параллельные двухполюсники. Реальные же резонаторы СВЧ чаще включают в схему как четырехполюсник, в котором одна пара полюсов является входным портом, а другая пара – выходным. Поэтому требуется уточнить, чем же является реактивная проводимость $B(\omega)$ для параллельного резонатора СВЧ и реактивное сопротивление $X(\omega)$ для последовательного резонатора при включении резонаторов как четырехполюсник. Для этого обратимся к последовательным и параллельным LC -контурам в схемах на рис. 6.16 и рис. 6.17. Изобразим контуры в виде четырехполюсников, как показано на рис. 6.20.

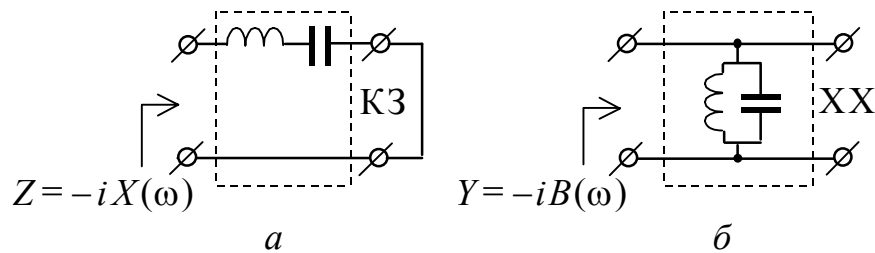


Рис. 6.20. Последовательный (а) и параллельный (б) LC -контур как четырехполюсник

Отождествляя LC -контур с резонатором СВЧ в схемах на рис. 6.20, видим, что реактивное сопротивление $X(\omega)$ для последовательного резонатора СВЧ равно мнимой части его входного сопротивления $Z|_{\text{КЗ}}$ при короткозамкнутом выходе, а реактивная проводимость $B(\omega)$ параллельного резонатора СВЧ равна мнимой части входной проводимости $Y|_{\text{XX}}$ при разомкнутом выходе.

6.4. Микрополосковые фильтры на параллельно связанных резонаторах

Простейший микрополосковый ППФ на параллельно связанных резонаторах представляет собой цепочку из n электромагнитно связанных параллельных отрезков МПЛ, каждый последующий из которых смещен относительно предыдущего на половину своей длины. Вид сверху на полосковые проводники такого фильтра изображен на рис. 6.21.

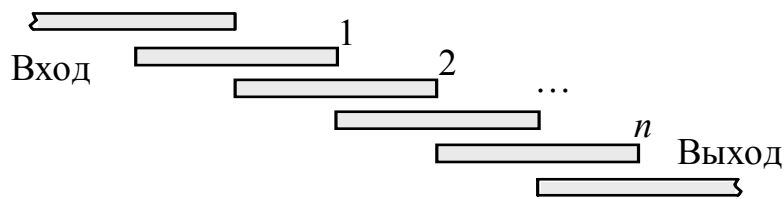


Рис. 6.21. Микрополосковый ППФ с четвертьволновыми связями между МПР

Каждый отрезок МПЛ в фильтре является микрополосковым резонатором. Оба конца полоскового проводника МПР обычно разомкнуты. Его первая резонансная частота ω_1 равна центральной частоте полосы пропускания. Ширина W полосковых проводников в фильтре может скачкообразно изменяться.

Полосно-пропускающий фильтр, конструкция которого изображена на рис. 6.21, впервые была реализована не на микрополосковых, а на симметричных полосковых линиях. Метод конструирования этого фильтра в полосковом исполнении предложил С. Б. Кон. Затем его метод был обобщен другими авторами для микрополоскового исполнения.

Схему рассматриваемого микрополоскового фильтра (МПФ) можно представить в виде каскадного соединения нескольких отрезков пар связанных МПЛ, изображенных на рис. 4.13. Длина этих отрезков равна половине длины резонатора, а их электрическая длина на частоте ω_1 приблизительно равна $\pi/2$. Поэтому связь между соседними резонаторами называют четвертьволновой.

Отрезок i -й пары ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) вблизи частоты ω_1 эквивалентен, как мы увидим ниже, двум отрезкам одиночных МПЛ, соединенным инвертором проводимости с электрической длиной $\theta_{inv} = -90^\circ$ (см. рис. 6.22).

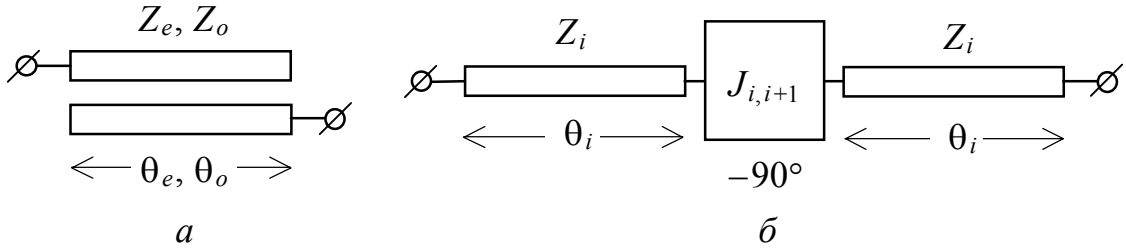


Рис. 6.22. Отрезок пары связанных МПЛ (а) и его эквивалентная схема (б)

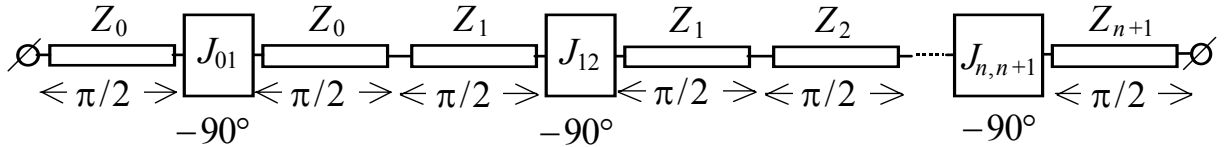


Рис. 6.23. Эквивалентная схема МПФ, изображенного на рис. 6.21

Тогда эквивалентная схема всего МПФ получится каскадным соединением эквивалентных схем отдельных отрезков связанных МПЛ, как показано на рис. 6.23.

Очевидно, что в эквивалентной схеме МПФ любая каскадно-соединенная пара отрезков МПЛ, расположенная между двумя ближайшими инверторами проводимости, является полуволновым резонатором. Поэтому, согласно (6.10), суммарная электрическая длина составного МПР на частоте ω_1 должна равняться π , если предполагать равенство электрических длин составляющих отрезков. Отсюда все отрезки на резонансной частоте должны иметь электрическую длину $\theta_i = \pi/2$.

Установим связь между остальными параметрами двух схем на рис. 6.22. Для этого сначала необходимо записать матрицу передачи эквивалентной схемы. Перемножая матрицы передачи составляющих элементов схемы (4.5) и (6.37), получаем

$$[A_i] = \begin{bmatrix} \left(JZ_i + \frac{1}{JZ_i} \right) \cos \theta_i \sin \theta_i & -i \left(JZ_i^2 \sin^2 \theta_i - \frac{\cos^2 \theta_i}{J} \right) \\ -i \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{JZ_i^2} - J \cos^2 \theta_i \right) & \left(JZ_i + \frac{1}{JZ_i} \right) \cos \theta_i \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

где для краткости у параметра $J_{i,i+1}$ опущены индексы.

Потребуем равенства матриц передачи двух четырехполюсников, изображенных на рис. 6.20, вблизи частоты ω_1 . Элементы этих матриц заданы формулами (4.103) и (6.49). Так как оба четырехполюсника являются сим-

метричными и взаимными, то достаточно потребовать равенства лишь двух из четырех элементов. Приравнявая элементы A и C матриц передачи, получаем

$$\left(JZ_i + \frac{1}{JZ_i} \right) \cos \theta_i \sin \theta_i = \frac{Z_e \operatorname{ctg} \theta_e + Z_o \operatorname{ctg} \theta_o}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o}, \quad (6.50)$$

$$\frac{1}{JZ_i^2} \sin^2 \theta_i - J \cos^2 \theta_i = \frac{2}{Z_e \sin^{-1} \theta_e - Z_o \sin^{-1} \theta_o}. \quad (6.51)$$

Замечаем, что функция в левой части равенства (6.50) обращается в нуль на резонансной частоте, так как электрическая длина $\theta_i = \pi/2$ при $\omega = \omega_1$. Поэтому и функция в правой части равенства должна обращаться в нуль на этой же частоте. Отсюда получаем уравнение для определения резонансных значений электрических длин θ_e и θ_o :

$$\left[Z_e \operatorname{ctg} \theta_e + Z_o \operatorname{ctg} \theta_o \right]_{\omega=\omega_1} = 0. \quad (6.52)$$

Получим теперь условие выполнения равенства (6.50) вблизи частоты ω_1 . Для этого приравняем на частоте ω_1 производные функций в правой и левой части равенства (6.50). Учитывая, что

$$d\theta_i/d\omega = \pi/(2\omega_1), \quad d\theta_e/d\omega = \theta_e/\omega_1, \quad d\theta_o/d\omega = \theta_o/\omega_1, \quad (6.53)$$

получаем

$$\frac{\pi}{2} \left(JZ_i + \frac{1}{JZ_i} \right) \left[\frac{Z_e}{\sin \theta_e} - \frac{Z_o}{\sin \theta_o} \right]_{\omega=\omega_1} = \left[\frac{\theta_e Z_e}{\sin^2 \theta_e} + \frac{\theta_o Z_o}{\sin^2 \theta_o} \right]_{\omega=\omega_1}. \quad (6.54)$$

Функция в левой части равенства (6.51) не обращается в нуль на резонансной частоте. Более того, ее производная равна нулю. Поэтому можно ограничиться требованием выполнения этого равенства лишь на частоте ω_1 . В результате получаем

$$\left[\frac{Z_e}{\sin \theta_e} - \frac{Z_o}{\sin \theta_o} \right]_{\omega=\omega_1} = 2JZ_i^2. \quad (6.55)$$

Уравнения (6.54) и (6.55) можно преобразовать к виду

$$\frac{Z_e}{Z_i} = \left[\frac{\pi(J_{i,i+1}^2 Z_i^2 + 1) + 2J_{i,i+1} Z_i \frac{\theta_o}{\sin \theta_o} \sin \theta_e}{\frac{\theta_o}{\sin \theta_o} + \frac{\theta_e}{\sin \theta_e}} \right]_{\omega=\omega_1}, \quad (6.56)$$

$$\frac{Z_o}{Z_i} = \left[\frac{\pi(J_{i,i+1}^2 Z_i^2 + 1) - 2J_{i,i+1} Z_i \frac{\theta_e}{\sin \theta_e} \sin \theta_o}{\frac{\theta_o}{\sin \theta_o} + \frac{\theta_e}{\sin \theta_e}} \right]_{\omega=\omega_1}. \quad (6.57)$$

Теперь для i -го инвертора проводимости найдем значения его параметра $J_{i,i+1}$. Согласно формуле (6.11) записываем параметры крутизны реактансов резонаторов, связываемых инвертором $J_{i,i+1}$:

$$b_i = \pi \frac{Z_i + Z_{i-1}}{4Z_i^2}, \quad b_{i+1} = \pi \frac{Z_i + Z_{i+1}}{4Z_i^2}. \quad (6.58)$$

Подставляя (6.58) в (6.48) и полагая $\Omega_1 = 1$, получаем формулы для параметров инверторов проводимости

$$\begin{aligned} J_{01} &= G_A \sqrt{\frac{\pi w}{4} \frac{1 + Z_1 G_A}{g_0 g_1}}, \\ J_{i,i+1} &= Y_i \frac{\pi w}{4} \sqrt{\frac{(1 + Z_{i-1} Y_i)(1 + Z_{i+1} Y_i)}{g_i g_{i+1}}}, \\ J_{n,n+1} &= G_B \sqrt{\frac{\pi w}{4} \frac{1 + Z_n G_B}{g_n g_{n+1}}}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Таким образом, нами получены все формулы, необходимые для синтеза полосно-пропускающего МПФ с четвертьволновыми связями между резонаторами. Первоначально эти формулы в упрощенном виде были получены для частного случая, при котором все резонаторы фильтра имеют одинаковые волновые сопротивления:

$$R_A = Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{n-1} = R_B = Z_0. \quad (6.60)$$

В этом случае формулы синтеза несколько упрощаются, но, главное, существенно упрощается сам расчет, так как каждый участок связанных МПЛ рассчитывается независимо от других. Это достигается ценою того, что ширину

полосковых проводников уже нельзя задавать произвольно. Поэтому полосковые проводники обязательно будут иметь скачки ширины (см. рис. 6.24).

Итак, формулы (6.59), (6.56), (6.57) и (6.52) после наложения условий (6.60) принимают вид

$$J_{01} = \frac{Z_0^{-1}}{\sqrt{g_0 g_1}} \sqrt{\frac{\pi w}{2}}, \quad J_{i,i+1} = \frac{Z_0^{-1}}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \frac{\pi w}{2}, \quad J_{n,n+1} = \frac{Z_0^{-1}}{\sqrt{g_n g_{n+1}}} \sqrt{\frac{\pi w}{2}}, \quad (6.61)$$

$$\frac{Z_e}{Z_0} = \left[\frac{\pi(J_{i,i+1}^2 Z_0^2 + 1) + 2J_{i,i+1} Z_0 \frac{\theta_o}{\sin \theta_o} \sin \theta_e}{\frac{\theta_o}{\sin \theta_o} + \frac{\theta_e}{\sin \theta_e}} \right]_{\omega=\omega_1}, \quad (6.62)$$

$$\frac{Z_o}{Z_0} = \left[\frac{\pi(J_{i,i+1}^2 Z_0^2 + 1) - 2J_{i,i+1} Z_0 \frac{\theta_e}{\sin \theta_e} \sin \theta_o}{\frac{\theta_o}{\sin \theta_o} + \frac{\theta_e}{\sin \theta_e}} \right]_{\omega=\omega_1}, \quad (6.63)$$

$$[Z_e \operatorname{ctg} \theta_e + Z_o \operatorname{ctg} \theta_o]_{\omega=\omega_1} = 0. \quad (6.64)$$

Расчет фильтра производится в определенной последовательности. Предполагаются заданными центральная частота полосы пропускания ω_1 , ее относительная ширина w , параметр неравномерности затухания η , волновое сопротивление тракта СВЧ Z_0 , число резонаторов n , толщина подложки h и относительная диэлектрическая проницаемость подложки ε_r . Также предполагается наличие программы по расчету следующих параметров связанных МПЛ: $Z_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $Z_o(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_o(\varepsilon_r, W, S, h)$. Требуется найти размеры полосковых проводников.

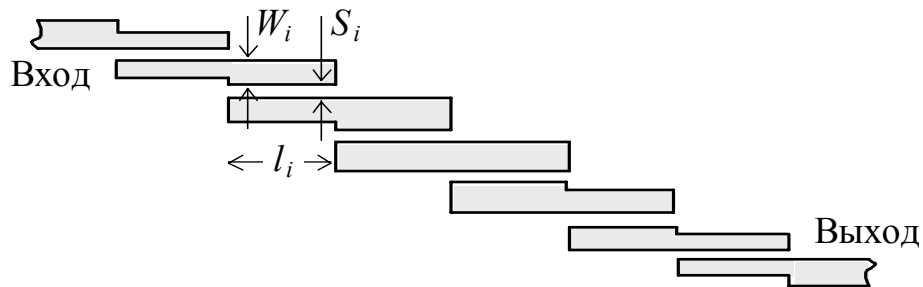


Рис. 6.24. Фильтр на одинаковых регулярных МПЛ с четвертьволновыми связями

Сначала по формулам (6.32), (6.33) или (6.36) вычисляют параметры g_i фильтра-прототипа нижних частот, а по формулам (6.61) находят параметры $J_{i,i+1}$. Затем последовательно для каждого участка связанных МПЛ решают систему нелинейных уравнений (6.62)–(6.64). В результате находят значения ряда параметров, в том числе значения ширины полосковых проводников W_i , зазора между ними S_i , эффективных относительных диэлектрических проницаемостей для четных и нечетных волн ε_e и ε_o . Наконец, по формуле (4.6) вычисляют длину l_i четвертьволнового отрезка связанных МПЛ.

Система уравнений (6.62)–(6.64) решается методом последовательных приближений, то есть последовательными итерациями. Сначала задают начальные значения параметров W_i , S_i , θ_e и θ_o . Например: $W_i = W_0$, $S_i = h$, $\theta_e = \theta_o = \pi/2$, где W_0 – ширина полоскового проводника одиночной МПЛ с волновым сопротивлением Z_0 .

После этого циклически выполняют следующие действия. Для текущих значений W_i и S_i рассчитывают среднее значение волновых сопротивлений $Z_a = (Z_e + Z_o)/2$, их относительную разность $\delta Z = (Z_e - Z_o)/Z_a$ и значения ε_e и ε_o . Затем значения Z_a и δZ сравнивают с соответствующими величинами, вычисленными по формулам (6.62), (6.63), и производят коррекцию параметров W_i и S_i следующим образом.

Если отношение $k_W = Z_a(W_i, S_i)/Z_a(J_{i,i+1}, \theta_e, \theta_o)$ отличается от единицы, то параметру W_i присваивают новое значение $k_W W_i$, так как волновое сопротивление МПЛ при $W_i \geq h$ приблизительно пропорционально W_i^{-1} . Если отношение $k_S = \delta Z(W_i, S_i)/\delta Z(J_{i,i+1}, \theta_e, \theta_o)$ отличается от единицы, то параметру S_i присваивают новое значение $k_S S_i$, так относительная разность волновых сопротивлений при $S_i \geq h$ приблизительно пропорциональна S_i^{-1} . Если была произведена коррекция хотя бы одного из параметров W_i или S_i , то начинается новый цикл. В противном случае при текущих значениях ε_e и ε_o численно решается трансцендентное уравнение (6.64) относительно θ_e и θ_o . Если новые значения θ_e и θ_o отличаются от их прежних значений, то начинается новый цикл. В противном случае система уравнений (6.62)–(6.64) считается решенной.

В случае узкополосных фильтров, когда $\theta_e \approx \pi/2 \approx \theta_o$, вместо системы трех уравнений (6.62)–(6.64) часто решают более простую систему из двух уравнений, имеющую вид

$$\begin{aligned}\frac{Z_e}{Z_0} &\approx 1 + J_{i,i+1}Z_0 + (J_{i,i+1}Z_0)^2, \\ \frac{Z_o}{Z_0} &\approx 1 - J_{i,i+1}Z_0 + (J_{i,i+1}Z_0)^2.\end{aligned}\tag{6.65}$$

При этом длина связанных проводников $l = \lambda_g/4$, где λ_g – длина волны на частоте ω_1 в эквивалентной полосковой линии с относительной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{equ} \approx \left(\frac{Z_e \sqrt{\varepsilon_e} + Z_o \sqrt{\varepsilon_o}}{Z_e + Z_o} \right)^2.\tag{6.66}$$

Отметим, что синтез фильтра на МПР с четвертьволновыми связями возможен и без наложения условий (6.60). Вместо них можно, в частности, наложить условие постоянства ширины W_i для всех полосковых проводников. В этом случае параметры Z_i следует рассматривать как функции аргументов W_i и S_i , а систему уравнений (6.59), (6.56), (6.57) и (6.52) решать совместно для всех участков связанных МПЛ.

Рассмотрим теперь фильтр, показанный на рис. 6.25, у которого входной и выходной резонаторы имеют кондуктивную связь с внешним трактом СВЧ. Ранее, то есть при четвертьволновой электромагнитной связи (рис. 6.24), параметры крутизны b_1 и b_n входного и выходного резонаторов были связаны с параметрами J_{01} и $J_{n,n+1}$ конечных инверторов формулами (6.48). Очевидно, что конечные инверторы в схеме на рис. 6.19, обеспечивающие требуемую связь фильтра по входу и выходу, не будут инвертировать волновые проводимости G_A и G_B внешнего тракта СВЧ, если параметры инверторов $J_{01} = G_A$ и $J_{n,n+1} = G_B$ (см. формулу на рис. 6.10, б). В этом случае конечные инверторы можно просто исключить. Тогда схема на рис. 6.24 превратится в схему на рис. 6.25. Поэтому схемы на рис. 6.24 и рис. 6.25 будут эквивалентны, если

$$b_1 = G_A g_0 g_1 / w, \quad b_n = G_B g_n g_{n+1} / w.\tag{6.67}$$

Расстояние l_c , отделяющее точку кондуктивного подключения от конца полоскового проводника (см. рис. 6.25), находят следующим образом. Сначала по формуле (6.67) вычисляют параметр крутизны реактанса. Затем решают уравнение (6.14). Его корнем при заданной резонансной частоте является l_c .

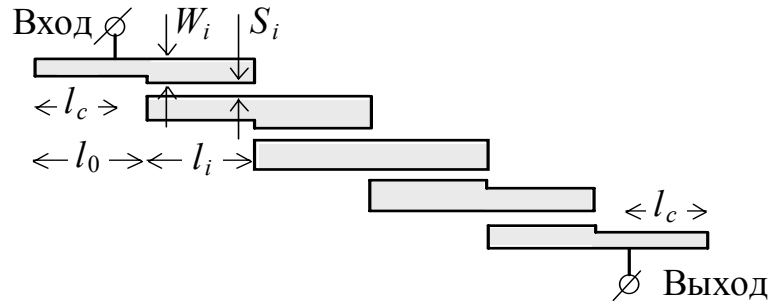


Рис. 6.25. Кондуктивное подключение МПФ на одинаковых регулярных МПР с четвертьволновыми связями

В случае одинаковых регулярных резонаторов, то есть при выполнении условий (6.60), формула (6.14) на частоте первого резонанса принимает простой вид

$$b = \frac{\pi Y_0}{2 \cos^2 \theta_c}. \quad (6.68)$$

Поэтому длина l_c может быть вычислена по формуле

$$l_c = l_0 \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\pi w / (2g_0 g_1)}, \quad (6.69)$$

где l_0 – длина четвертьволновой ступени оконечного резонатора, не взаимодействующей с соседним МПР.

6.5. Микрополосковые фильтры с укороченными связями

Простейший полосно-пропускающий фильтр на параллельно связанных МПР с укороченными связями изображен на рис. 6.26. В этом фильтре длина области связи между двумя соседними резонаторами меньше половины длины резонатора. Ширина полосковых проводников может изменяться скачком.

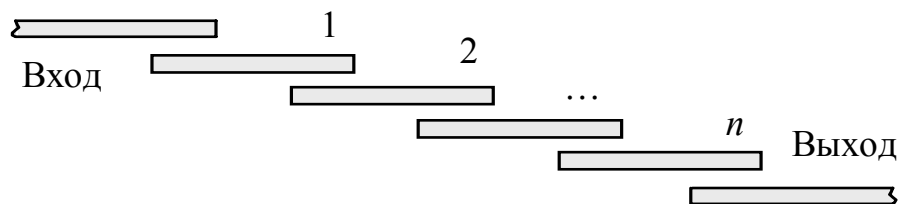


Рис. 6.26. Микрополосковый ППФ с укороченными связями между МПР

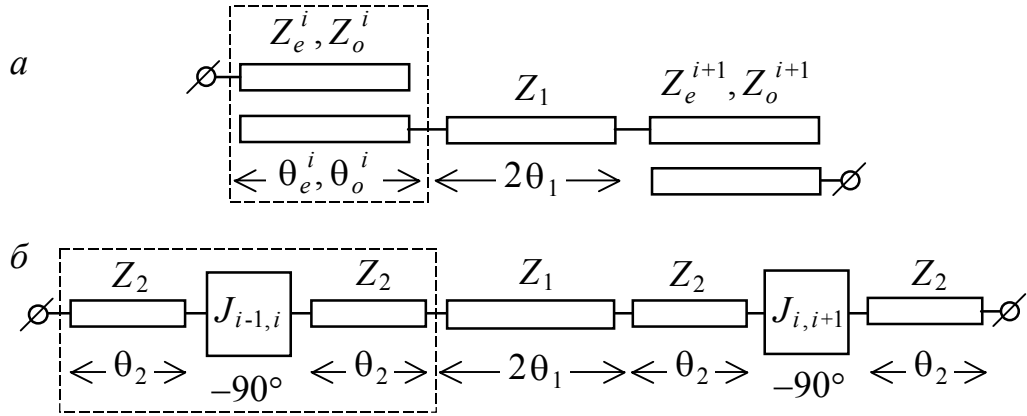


Рис. 6.27. Электрическая схема i -го звена фильтра (а) и ее эквивалентная схема (б)

Ограничимся рассмотрением симметричного фильтра с одинаковыми резонаторами. Электрическая схема i -го звена такого фильтра и ее эквивалентная схема изображены на рис. 6.27.

Три каскадно соединенных отрезка МПЛ на рис. 6.27, б, расположенные между инверторами проводимости с параметрами $J_{i-1,i}$ и $J_{i,i+1}$, образуют полуволновый резонатор с СВС, свойства которого уже были рассмотрены. Найдем значения параметров $J_{i,i+1}$. Будем считать, что волновые проводимости внешнего тракта СВЧ удовлетворяют условиям

$$G_A = G_B = Y_2. \quad (6.70)$$

Подставляя (6.21) в (6.48), получаем

$$J_{01} = Y_2 \sqrt{w \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right)} / \sqrt{g_0 g_1},$$

$$J_{i,i+1} = Y_2 w \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right) / \sqrt{g_i g_{i+1}}, \quad (6.71)$$

$$J_{n,n+1} = Y_2 \sqrt{w \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right)} / \sqrt{g_n g_{n+1}}.$$

Если же условия (6.70) не выполняются, то необходимо будет принять дополнительные меры по согласованию МПФ с трактом СВЧ. Такое согласование можно осуществить с помощью входного и выходного трансформаторов, выполненных в виде четвертьволновых отрезков МПЛ с волновыми проводимостями $\sqrt{G_A Y_2}$ и $\sqrt{G_B Y_2}$ (см. рис. 6.28).

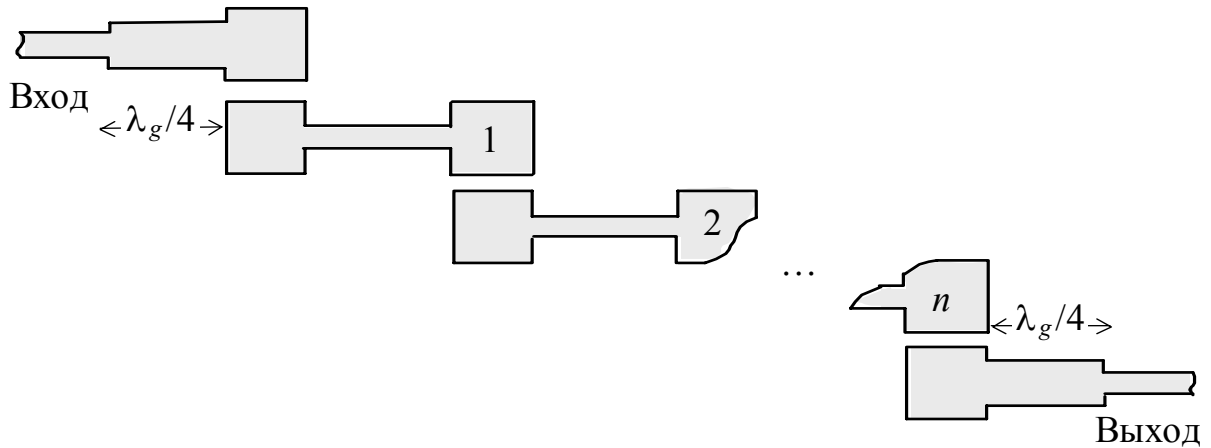


Рис. 6.28. Фильтр на одинаковых нерегулярных МПР с укороченными связями и оконечными трансформаторами

Выразим волновые сопротивления Z_e , Z_o для четных и нечетных мод через параметры инверторов $J_{i,i+1}$. Для этого для двух фрагментов схем, обведенных штриховыми контурами на рис. 6.25, получим равенства, обеспечивающие их эквивалентность вблизи резонансной частоты ω_1 . Ранее такие равенства были получены для частного случая $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$. Снова потребуем равенства матриц передачи для двух эквивалентных схем. Приравнявая элементы A матриц (6.49) и (4.103) на частоте ω_1 , а затем элементы C этих же матриц, приходим к равенствам (6.50) и (6.51), где теперь $\theta_i = \theta_2$, а $Z_i = Z_2$. Решая полученные равенства, находим волновые сопротивления

$$Z_e = \frac{2Z_2 \sin \theta_e}{\cos \theta_e + \cos \theta_o} \frac{[JZ_2 + 1/(JZ_2)] \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos \theta_o}{\sin^2 \theta_2 / (JZ_2) - JZ_2 \cos^2 \theta_2}, \quad (6.72)$$

$$Z_o = \frac{2Z_2 \sin \theta_o}{\cos \theta_e + \cos \theta_o} \frac{[JZ_2 + 1/(JZ_2)] \cos \theta_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_e}{\sin^2 \theta_2 / (JZ_2) - JZ_2 \cos^2 \theta_2}. \quad (6.73)$$

Система уравнений (6.72) и (6.73) позволяет, используя программу для расчета функций $Z_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $Z_o(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_o(\varepsilon_r, W, S, h)$, вычислить ширину W и зазор S для проводников связанных МПЛ и одновременно вычислить эффективные относительные диэлектрические проницаемости ε_e , ε_o .

Получим теперь уравнение, связывающее электрические длины θ_e и θ_o с электрической длиной θ_2 отрезков эквивалентной схемы на рис. 6.27, б. Ранее, когда θ_i , то есть θ_2 , равнялось $\pi/2$, такое уравнение являлось отражением того факта, что матрица (6.49) имеет элемент $A = 0$. Теперь матричный

элемент A отличен от нуля, так как $\theta_2 < \pi/2$. Однако элемент A можно снова обратить в нуль, если к фрагментам эквивалентных схем на рис. 6.27, обведенным штриховыми контурами, добавить слева и справа отрезки линий, электрическая длина которых дополняет θ_2 до $\pi/2$. Получающиеся эквивалентные схемы изображены на рис. 6.29.

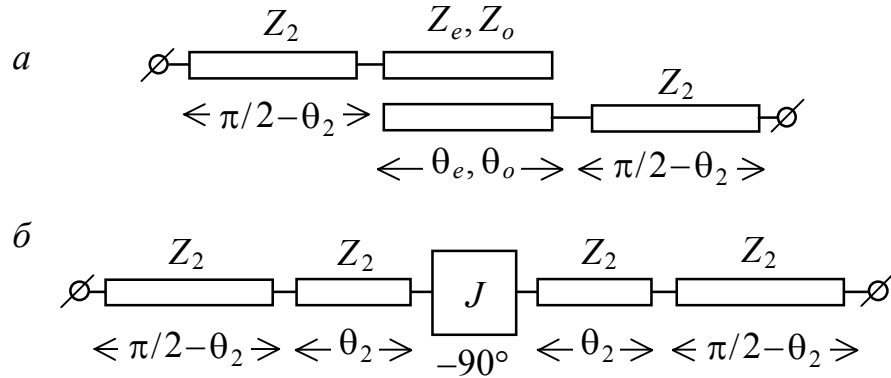


Рис. 6.29. Пара связанных МПЛ (а) и ее эквивалентная схема (б)

В соответствии с формулой (6.49) матрица передачи эквивалентной схемы на рис. 6.29, б имеет элемент $A = 0$. Поэтому и матрица передачи исходной схемы, изображенной на рис. 6.29, а, должна иметь элемент $A = 0$. Последнее равенство не является независимым. Оно является тождеством, вытекающим из уравнений (6.72) и (6.73). Однако это равенство должно выполняться не только на резонансной частоте ω_1 , но и вблизи нее. Поэтому, приравнявая производные $dA/d\omega$ для эквивалентных схем на рис. 6.29, получаем независимое уравнение

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\theta_e Z_e}{\sin \theta_e} \sin \theta_o + (\pi - 2\theta_2) \left(\frac{Z_e^2 + Z_o^2}{4Z_2} + Z_2 \right) \sin \theta_e \sin \theta_o + \right. \\
 & \left. + \frac{\theta_o Z_o}{\sin \theta_o} \sin \theta_e - (\pi - 2\theta_2) \frac{Z_e Z_o}{2Z_2} (1 + \cos \theta_e \cos \theta_o) \right] \cos 2\theta_2 - \\
 & - \left[\frac{(\pi - 2\theta_2) (Z_e \cos \theta_e \sin \theta_o + Z_o \cos \theta_o \sin \theta_e) +}{2Z_2} \frac{Z_e Z_o}{\sin \theta_e \sin \theta_o} (\cos \theta_e + \cos \theta_o) \right] \sin 2\theta_2 + \\
 & + \frac{\pi}{2} \left(JZ_2 + \frac{1}{JZ_2} \right) (Z_e \sin \theta_o - Z_o \sin \theta_e) = 0.
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

Уравнение (6.74) при заданных значениях Z_e , Z_o , ε_e , ε_o , Z_2 и θ_2 позволяет вычислить электрические длины θ_e и θ_o вместе с диэлектрической проницаемостью ε_2 , отвечающей отрезкам с волновым сопротивлением Z_2 и электрической длиной θ_2 , а значит, вычислить и их длину l_2 .

Расчет фильтра на одинаковых нерегулярных МПР с укороченными связями (см. рис. 6.28) производится в следующем порядке. Предполагаются заданными центральная частота полосы пропускания ω_1 , ее относительная ширина w , параметр неравномерности затухания η , волновое сопротивление тракта СВЧ Z_0 , волновое сопротивление крайних участков резонаторов Z_2 , параметр СВС K , отношение электрических длин θ_1/θ_2 , число резонаторов n , толщина подложки h и относительная диэлектрическая проницаемость подложки ε_r . Также предполагается наличие программы по расчету следующих параметров одиночных и связанных МПЛ: $Z_1(\varepsilon_r, W, h)$, $\varepsilon_1(\varepsilon_r, W, h)$, $Z_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $Z_o(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_e(\varepsilon_r, W, S, h)$, $\varepsilon_o(\varepsilon_r, W, S, h)$. Требуется найти размеры W , S и l для всех полосковых проводников.

Сначала по формуле (6.17) вычисляют электрические длины θ_1 и θ_2 , по формуле (6.16) – волновое сопротивление внутреннего участка резонатора Z_1 , а по формулам (6.32), (6.33) или (6.36) – параметры низкочастотного прототипа g_i . Затем по формулам (6.71) вычисляют параметры инверторов проводимости $J_{i,i+1}$, а по найденным значениям Z_1 и θ_1 определяют W_1 и l_1 полоскового проводника внутреннего участка резонаторов. После этого в отдельности для каждой секции связанных проводников методом последовательных итераций решают систему уравнений (6.72)–(6.74). При этом по формулам (6.72), (6.73) определяют W_2 и S_2 связанных полосковых проводников и значения ε_e и ε_o , а по формуле (6.74) находят ε_2 . Последняя величина позволяет вычислить длину проводников l_2 .

Конструкция фильтра, изображенная на рис. 6.28, содержит два оконечных четвертьволновых трансформатора. Конечно же, эти трансформаторы увеличивают габариты МПФ. Однако они могут быть исключены из конструкции, если их функции возложить на оконечные резонаторы. Два варианта МПФ, выполненных на нерегулярных МПР и не имеющих оконечных трансформаторов, изображены на рис. 6.30 и рис. 6.31.

В фильтре на рис. 6.30 оконечные резонаторы эквивалентны каскадному соединению двух четвертьволновых отрезков линии передачи. Волновое

сопротивление одного из них равно волновому сопротивлению тракта СВЧ Z_0 , второго – волновому сопротивлению Z_2 крайних участков внутренних МПР. Эти отрезки электромагнитно связаны соответственно с проводником внешнего тракта СВЧ длиной θ'_2 и с крайним участком соседнего МПР длиной θ_2 .

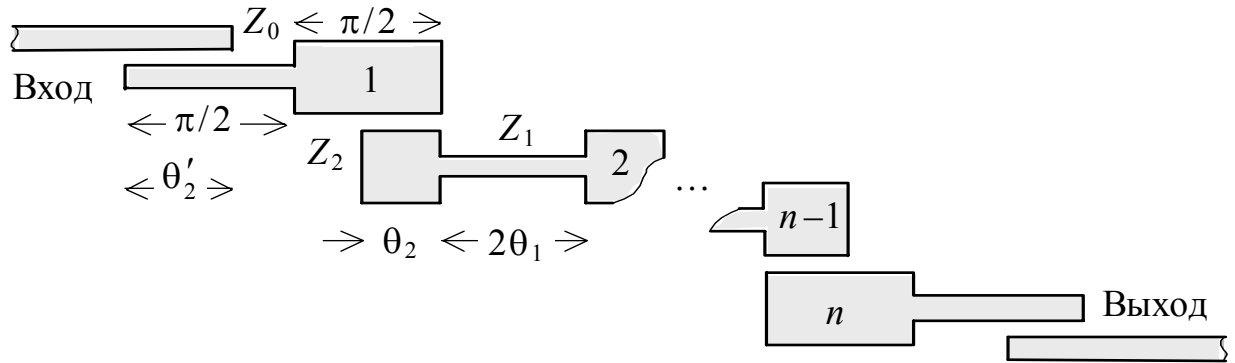


Рис. 6.30. Фильтр на одинаковых внутренних нерегулярных МПР с укороченными связями и трансформирующими оконечными МПР

Согласно формуле (6.11) параметры крутизны реактансов оконечных МПР со стороны концов проводников с волновыми сопротивлениями Z_0 и Z_2 соответственно

$$\begin{aligned} b' &= Y_0 \pi (1 + Y_0/Y_2)/4, \\ b &= Y_2 \pi (1 + Y_2/Y_0)/4. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Подставляя (6.75) и (6.21) в формулы (6.48), получаем значения инверторов проводимости

$$J_{01} = J_{n, n+1} = \frac{Y_0}{2} \sqrt{w\pi \frac{1 + Y_0/Y_2}{g_0 g_1}}, \quad (6.76)$$

$$J_{12} = J_{n-1, n} = \frac{Y_2}{2} w \sqrt{\pi \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right) \frac{1 + Y_2/Y_0}{g_1 g_2}}, \quad (6.77)$$

$$J_{i, i+1} = Y_2 w \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right) / \sqrt{g_i g_{i+1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n-2). \quad (6.78)$$

Производя в формулах (6.72)–(6.74) замену $\theta_2 \rightarrow \theta'_2$, $Z_2 \rightarrow Z_0$, получаем систему уравнений

$$Z_e = \frac{2Z_0 \sin \theta_e}{\cos \theta_e + \cos \theta_o} \frac{\left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) \cos \theta'_2 \sin \theta'_2 + \cos \theta_o}{\frac{1}{JZ_0} \sin^2 \theta'_2 - JZ_0 \cos^2 \theta'_2},$$

$$Z_o = \frac{2Z_0 \sin \theta_o}{\cos \theta_e + \cos \theta_o} \frac{\left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_2} \right) \cos \theta'_2 \sin \theta'_2 - \cos \theta_e}{\frac{1}{JZ_0} \sin^2 \theta'_2 - JZ_0 \cos^2 \theta'_2}, \quad (6.79)$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\theta_e Z_e}{\sin \theta_e} \sin \theta_o + (\pi - 2\theta'_2) \left(\frac{Z_e^2 + Z_o^2}{4Z_0} + Z_0 \right) \sin \theta_e \sin \theta_o + \\ & + \frac{\theta_o Z_o}{\sin \theta_o} \sin \theta_e - (\pi - 2\theta'_2) \frac{Z_e Z_o}{2Z_0} (1 + \cos \theta_e \cos \theta_o) \end{aligned} \right] \cos 2\theta'_2 -$$

$$- \left[\begin{aligned} & (\pi - 2\theta'_2) (Z_e \cos \theta_e \sin \theta_o + Z_o \cos \theta_o \sin \theta_e) + \\ & + \frac{Z_e Z_o}{2Z_0} \frac{\theta_e \sin \theta_o + \theta_o \sin \theta_e}{\sin \theta_e \sin \theta_o} (\cos \theta_e + \cos \theta_o) \end{aligned} \right] \sin 2\theta'_2 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) (Z_e \sin \theta_o - Z_o \sin \theta_e) = 0,$$

позволяющую по значению параметров J_{01} и $J_{n,n+1}$, задаваемому формулой (6.76), вычислить размеры оконечной пары связанных проводников. Что же касается размеров остальных пар связанных проводников, то они по-прежнему являются решениями системы уравнений (6.72)–(6.74) при значениях параметров $J_{i,i+1}$, заданных формулами (6.77) и (6.78).

Рассмотрим теперь конструкцию МПФ, изображенную на рис. 6.31. В этой конструкции оконечные МПР регулярны. Трансформация волнового сопротивления здесь обеспечивается кондуктивным подключением оконечных резонаторов к входной и выходной линии передачи. Поэтому оконечные инверторы с параметрами J_{01} и $J_{n,n+1}$ отсутствуют. Решая систему уравнений (6.67), (6.68), в которой была предварительно сделана замена $G_A \rightarrow Y_0$, $G_B \rightarrow Y_0$, $Y_0 \rightarrow Y_2$, находим расстояние

$$l_c = \frac{l}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\pi Z_0 w}{2Z_2 g_0 g_1}}, \quad (6.80)$$

отделяющее точку кондуктивного подключения от конца проводника, где l – длина оконечного регулярного полуволнового МПР с волновым сопротивлением Z_2 .

Найдем параметры остальных инверторов. Согласно (6.7) оконечные МПР имеют параметры крутизны реактансов

$$b_1 = b_n = Y_2 \pi / 2. \quad (6.81)$$

Подставляя выражения (6.81) и (6.21) в формулы (6.48), получаем

$$J_{12} = J_{n-1, n} = Y_2 w \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right)} / \sqrt{g_1 g_2}, \quad (6.82)$$

$$J_{i, i+1} = Y_2 w \left(\theta_2 + \theta_1 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1} \right) / \sqrt{g_i g_{i+1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n-2).$$

Размеры полосковых проводников связанных участков МПФ, обеспечивающие заданные формулами (6.82) значения параметров $J_{i, i+1}$, по-прежнему являются решениями системы уравнений (6.72)–(6.74).

Отметим, что конструкция фильтра, изображенная на рис. 6.31, обладает преимуществами перед остальными конструкциями, рассмотренными выше. Во-первых, эта конструкция обладает минимальными размерами. С одной стороны, кроме резонаторов она не содержит никаких трансформаторов. С другой стороны, ее внутренние МПР миниатюрны из-за наличия скачка волнового сопротивления.

Во-вторых, наличие СВС у внутренних МПР позволяет максимально отодвинуть от основной полосы пропускания ближайшую к ней паразитную полосу пропускания.

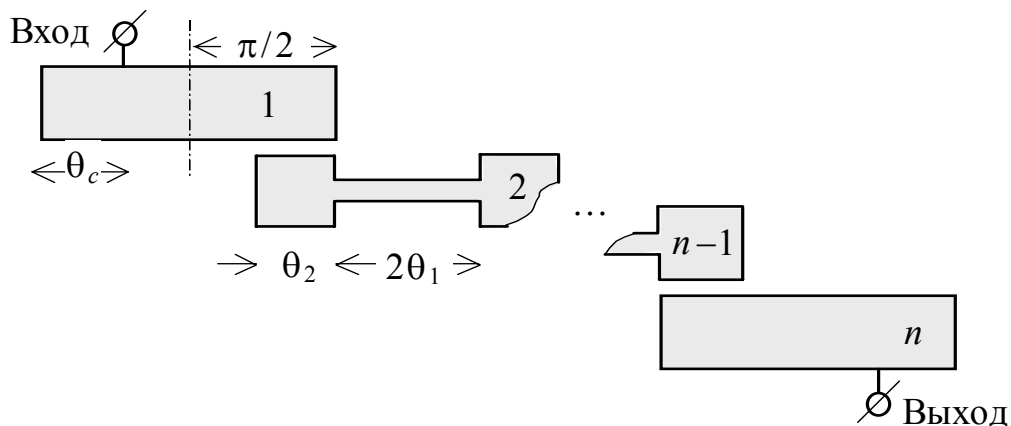


Рис. 6.31. Фильтр на одинаковых внутренних нерегулярных МПР и регулярных оконечных МПР с кондуктивной связью

В-третьих, наличие регулярных оконечных резонаторов значительно повышает затухание в паразитных полосах пропускания из-за несовпадения частот высших резонансов оконечных и внутренних МПР.

В-четвертых, кондуктивное подключение оконечных МПР приводит к появлению дополнительного полюса затухания в высокочастотной полосе заграждения из-за образования разомкнутого шлейфа длиной l_c . На частоте полюса затухания, когда $l_c = \lambda_g/4$, этот шлейф обеспечивает короткое замыкание фильтра на его входе и выходе.

В-пятых, умеренная величина скачка ширины полоскового проводника у внутренних резонаторов не только не снижает, но и несколько повышает их собственную добротность. Повышение собственной добротности происходит как за счет снижения потерь на излучение из-за уменьшения длины резонатора, если он не экранирован, так и за счет выравнивания плотности продольного тока на верхней и нижней поверхности узкого участка полоскового проводника и уменьшения поперечных токов.

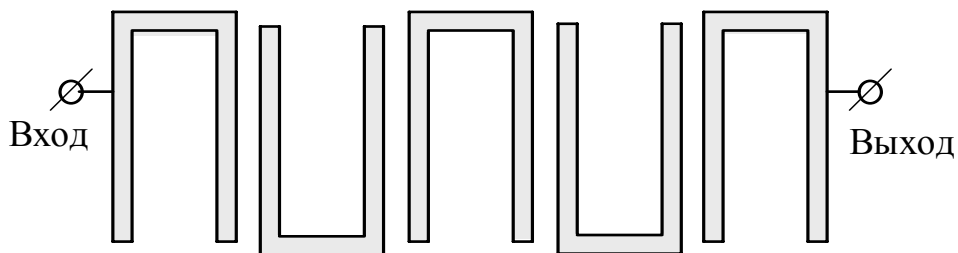


Рис. 6.32. Фильтр на встречно направленных П-образных микрополосковых резонаторах

Заметим, что рассмотренный в этом параграфе метод синтеза фильтра на параллельно связанных МПР с укороченными связями можно в некоторых случаях использовать и для синтеза так называемого МПФ на встречно направленных П-образных резонаторах (см. рис. 6.32). Для уменьшения габаритов фильтра полосковые проводники его резонаторов свернуты в форме буквы П. Этот МПФ называют также фильтром на шпильных резонаторах. Очевидно, что рассмотренный метод синтеза может быть применен в случае, когда в свернутых резонаторах расстояние между параллельными участками полоскового проводника велико и можно пренебречь дальними связями в фильтре.

6.6. Пример расчета фильтра

Выполним расчет пятизвенного полосно-пропускающего фильтра на нерегулярных микрополосковых резонаторах с кондуктивным подключением. Полосковые проводники такого МПФ изображены на рис. 6.33. Пусть требуется синтезировать фильтр с чебышевской характеристикой затухания, который будет использоваться в тракте СВЧ с волновым сопротивлением $Z_0 = 50$ Ом. Его полоса пропускания задана граничными частотами $f_1 = 2$ ГГц и $f_2 = 2.2$ ГГц по уровню затухания $L_p = 1$ дБ. При этом минимальное затухание отраженной волны на центральном участке полосы пропускания должно быть $L_r = 15$ дБ. Расчет произведем для незранированного МПФ, выполненного на подложке из поликора толщиной $h = 1$ мм. Считаем, что поликор имеет относительную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_r = 9.8$.

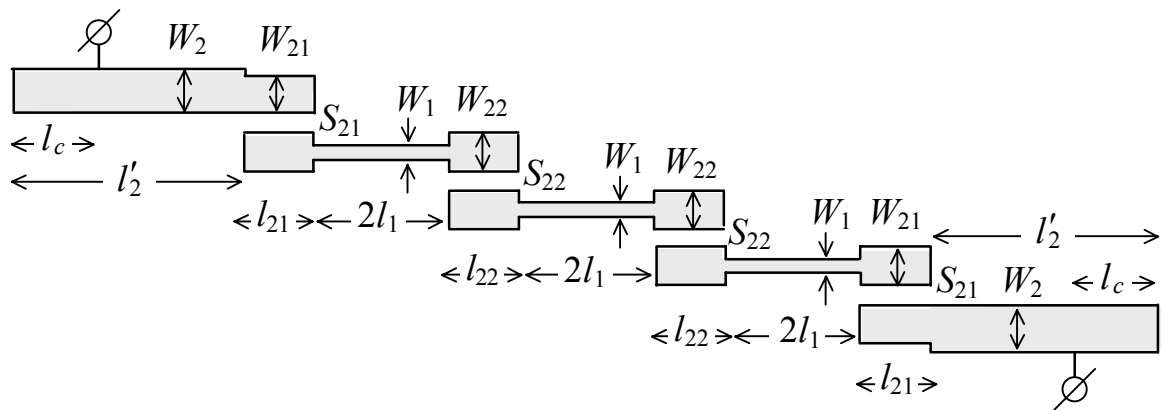


Рис. 6.33. Синтезируемый микрополосковый фильтр

Расчет будем производить на компьютере в вычислительной среде *MathCAD*. Запишем все необходимые формулы. Начнем с вычисления центральной частоты f_0 и относительной ширины полосы пропускания w .

Как следует из выражений (6.26)–(6.28) и (6.41)–(6.43), они могут быть вычислены по формулам

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}, \quad (6.83)$$

$$w = \frac{f_2 - f_1}{\sqrt{f_1 f_2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{n} \operatorname{arch} \sqrt{[10^{L_p/10} - 1][10^{L_r/10} - 1]} \right)}. \quad (6.84)$$

Получаем $f_0 = 2.098$ ГГц, $w = 0.0901$.

Затем по формулам (6.32)–(6.33) вычисляем значения параметров фильтра-прототипа нижних частот: $g_0=1$, $g_1=1.232$, $g_2=1.359$, $g_3=2.060$, $g_4=1.359$, $g_5=1.232$, $g_6=1$.

Приступим теперь к расчету размеров полосковых проводников. Для этого потребуется какая-либо компьютерная программа, позволяющая производить анализ и синтез одиночных и связанных микрополосковых линий. Студенты КГТУ могут воспользоваться программой *Microstrips*, созданной для этих целей автором и находящейся на сервере КГТУ. Эта программа выполняет расчет в квазистатическом приближении.

Ширину проводников одиночных отрезков МПЛ зададим произвольно. Положим $W_1=0.5$ мм, а $W_2=3$ мм. Находим, что ширине W_1 отвечают волновое сопротивление $Z_1=66.55$ Ом и относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1=6.329$, а ширине W_2 отвечают $Z_2=25.72$ Ом и $\varepsilon'_2=7.509$. Далее по формуле (6.16) получаем, что коэффициент, характеризующий скачок волнового сопротивления, $K=0.3865$.

Будем рассматривать нерегулярные резонаторы, у которых $\theta_2/\theta_1=2$. Решая уравнение (6.17) для найденного K , получаем, что на частоте f_0 электрические длины $\theta_1=0.3826$ и $\theta_2=0.7652$. Отсюда, согласно (4.6), длина проводников одиночных МПЛ составляет $2l_1=6.918$ мм.

Длина l'_2 есть длина одиночного участка регулярного резонатора. Так как суммарная электрическая длина регулярного резонатора равна π , а длина его связанного участка равна θ_2 , то электрическая длина одиночного участка есть $\pi-\theta_2$. Отсюда, согласно (4.6), получаем $l'_2=19.726$ мм. Аналогично вычисляем длину полуволнового отрезка $l=26.078$ мм. Подставляя эту длину в формулу (6.80), находим расстояние $l_c=8.954$ мм, отделяющее точку кондуктивного подключения регулярного МПР от его конца.

Определим теперь параметры проводников связанных МПЛ. Начнем с расчета параметров W_{21} , S_{21} и l_{21} . Сначала по формуле (6.82) вычисляем параметр $J_{12}=3.894 \cdot 10^{-3}$ Ом⁻¹. Затем, используя программу *Microstrips*, решаем систему уравнений (6.72)–(6.74). При этом учитываем, что электрические длины связаны формулами

$$\theta_e = \theta_2 \sqrt{\varepsilon_e/\varepsilon_2}, \quad \theta_o = \theta_2 \sqrt{\varepsilon_o/\varepsilon_2}. \quad (6.85)$$

Систему уравнений решаем методом последовательных приближений в следующем порядке. В качестве начальных значений задаем $\theta_e=\theta_2$ и $\theta_o=\theta_2$.

По формулам (6.72)–(6.73) вычисляем приближенные значения Z_e и Z_o . Эти значения вводим в программу *Microstrips*. Выполнив в ней синтез, находим приближенные размеры проводников, а главное – приближенные значения ϵ_e и ϵ_o . Затем приближенные значения ϵ_e и ϵ_o подставляем в уравнения (6.85), (6.72)–(6.74) и находим уточненные значения Z_e, Z_o, ϵ_2 . Значения Z_e и Z_o снова вводим в программу *Microstrips*. Находим уточненные размеры проводников и уточненные значения ϵ_e и ϵ_o . Последние две операции следует повторять до тех пор, пока все электрические параметры не перестанут изменяться. В данном случае потребуется всего три итерации. В итоге находим $\epsilon_2=7.441$, $\epsilon_e=8.101$, $\epsilon_o=6.395$, $Z_e=30.94$ Ом, $Z_o=21.07$ Ом. Этим электрическим параметрам и параметру θ_2 отвечают размеры $W_{21}=2.816$ мм, $S_{21}=0.322$ мм и $l_{21}=6.381$ мм.

Аналогичным образом вычисляем параметры остальной пары связанных проводников. Получаем: $J_{23}=2.758 \cdot 10^{-3}$ Ом⁻¹, $\epsilon_2=7.458$, $\epsilon_e=8.132$, $\epsilon_o=6.528$, $Z_e=29.56$ Ом, $Z_o=22.06$ Ом. Этим электрическим параметрам отвечают размеры $W_{22}=2.906$ мм, $S_{22}=0.545$ мм и $l_{22}=6.374$ мм.

Остается теперь вычислить длину Δl , на которую следует укоротить крайние участки всех резонаторов для учета влияния концевых емкостей C_k . Подставляя в (6.23) отвечающие ширине W_2 значения Z_2 и ϵ'_2 , находим длину $\Delta l=0.506$ мм.

Контрольные вопросы

38. Как изменятся резонансные частоты регулярного микрополоскового резонатора при увеличении ширины его полоскового проводника по всей длине?

39. Назовите две причины, которые приводят к нарушению эквидистантности спектра частот регулярного микрополоскового резонатора.

40. Как можно подстраивать (повышать и понижать) первую резонансную частоту микрополоскового резонатора одним уменьшением ширины полоскового проводника на некоторых его участках?

41. При какой относительной длине внутреннего высокоомного участка нерегулярный полуволновый микрополосковый резонатор имеет минимальную электрическую длину?

42. При какой относительной длине внутреннего высокоомного участка нерегулярного полуволнового микрополоскового резонатора вторая резонансная частота максимально удалена от первой?

43. Как ведут себя реактансы резонаторов последовательного и параллельного типов вблизи резонансной частоты?

44. Зависят ли затухание, потери на отражение и сдвиг фазы во взаимных и в симметричных фильтрах СВЧ от направления падающей волны?

45. Является ли инвертор сопротивления взаимным и симметричным четырехполюсником?

46. Как нормируют параметры фильтра-прототипа нижних частот?

47. Почему полосковые проводники резонаторов при прямом синтезе микрополосковых фильтров обычно имеют скачок ширины?

48. Какие препятствия стоят на пути разработки прямого метода параметрического синтеза микрополосковых фильтров с удлиненными связями, в том числе и фильтров решетчатого типа?

7. КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ

7.1. Коэффициент связи резонаторов СВЧ

Выше мы рассмотрели прямой метод синтеза фильтров СВЧ, в котором используются эквивалентные схемы с инверторами сопротивлений (см. рис. 6.18 и рис. 6.19). Согласно этому методу фильтр СВЧ будет иметь требуемую АЧХ вблизи полосы пропускания, если все резонаторы фильтра (с учетом их связей) будут настроены на центральную частоту полосы пропускания, а значения инверторов сопротивлений будут удовлетворять формулам (6.48).

Однако такой прямой метод синтеза фильтров СВЧ допускает и другую формулировку. Начнем с того, что формулы (6.48) перепишем в виде

$$\frac{K_{01}^2}{R_A x_1} = \frac{w}{\Omega_1 g_0 g_1}, \quad \frac{K_{i,i+1}}{\sqrt{x_i x_{i+1}}} = \frac{w}{\Omega_1 \sqrt{g_i g_{i+1}}}, \quad \frac{K_{n,n+1}^2}{R_B x_n} = \frac{w}{\Omega_1 g_n g_{n+1}}, \quad (7.1)$$

$$\frac{J_{01}^2}{G_A b_1} = \frac{w}{\Omega_1 g_0 g_1}, \quad \frac{J_{i,i+1}}{\sqrt{b_i b_{i+1}}} = \frac{w}{\Omega_1 \sqrt{g_i g_{i+1}}}, \quad \frac{J_{n,n+1}^2}{G_B b_n} = \frac{w}{\Omega_1 g_n g_{n+1}}.$$

Установим физический смысл величин, расположенных в левых частях уравнений в формуле (7.1). Инвертор сопротивления K_{01} , согласно схеме на рис. 6.18, является нагрузкой для последовательного резонатора x_1 . Входное сопротивление инвертора со стороны резонатора равно отношению K_{01}^2/R_A . Эта величина является сопротивлением нагрузки резонатора. Поэтому, согласно формуле (3.14), отношение $K_{01}^2/(R_A x_1)$ есть обратная величина внешней добротности последовательного резонатора, то есть

$$K_{01}^2/(R_A x_1) = Q_A^{-1}. \quad (7.2)$$

Аналогичным образом получаем

$$K_{n,n+1}^2/(R_B x_n) = Q_B^{-1}. \quad (7.3)$$

Для схемы фильтра СВЧ с параллельными резонаторами (рис. 6.19), используя формулу (3.15), находим

$$J_{01}^2/(G_A b_1) = Q_A^{-1}, \quad J_{n,n+1}^2/(G_B b_n) = Q_B^{-1}. \quad (7.4)$$

Рассмотрим теперь положительную величину

$$|k_{i,i+1}^L| = K_{i,i+1} / \sqrt{x_i x_{i+1}}. \quad (7.5)$$

Выясним ее физический смысл. Для этого обратимся к схеме фильтра с последовательными резонаторами, изображенной на рис. 6.18. Вычислим $|k_{i,i+1}^L|$ для частного случая, когда резонаторы СВЧ являются последовательными контурами с параметрами C_i и L_i , настроенными на частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{L_i C_i}$, а инверторы сопротивлений выполнены из индуктивностей по Т-схеме (см. рис. 6.11) с параметрами $K_{i,i+1} = \omega_0 |L_{i,i+1}^m|$. Здесь пара вертикальных скобок, обозначающая абсолютную величину, говорит о том, что $L_{i,i+1}^m$ может принимать отрицательные значения. Фрагмент схемы фильтра для такого частного случая приведен на рис. 7.1.

Фрагмент схемы на рис. 7.1 содержит два резонатора x_i и x_{i+1} , соединенные инвертором сопротивления $K_{i,i+1}$. Очевидно, что он эквивалентен двум колебательным контурам, охваченным индуктивной связью. Их схема изображена на рис. 7.2.

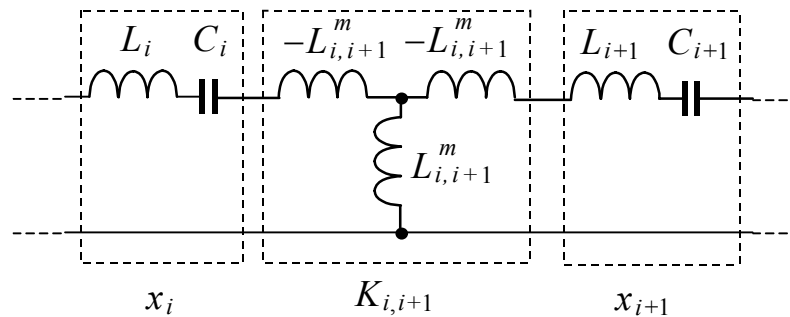


Рис. 7.1. Фрагмент схемы фильтра с последовательными контурами и инверторами сопротивлений, выполненными из индуктивностей

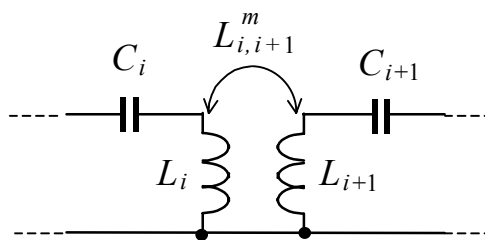


Рис. 7.2. Последовательные контуры с внутренней индуктивной связью

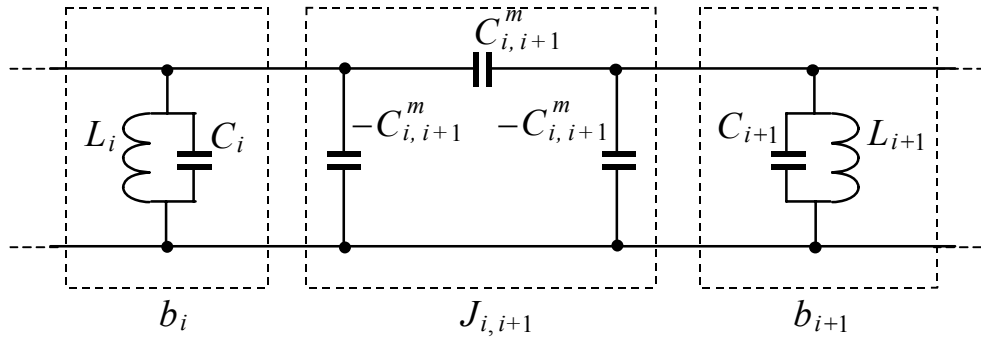


Рис. 7.3. Фрагмент схемы фильтра с параллельными контурами и инверторами проводимостей, выполненными из емкостей

Согласно формуле (6.46) параметры крутизны реактивных сопротивлений последовательных контуров $x_i = \omega_0 L_i$. Подставляя это выражение в (7.5) и учитывая, что $K_{i,i+1} = \omega_0 |L_{i,i+1}^m|$, получаем

$$|k_{i,i+1}^L| = |L_{i,i+1}^m| / \sqrt{L_i L_{i+1}}. \quad (7.6)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (7.6), хорошо известно в теории связанных контуров. Оно задает значение коэффициента связи контуров с внутренней индуктивной связью (рис. 7.2) на их общей резонансной частоте ω_0 . Поэтому величину $k_{i,i+1}^L$, определяемую формулой (7.5) для фильтра с последовательными резонаторами, будем называть коэффициентом индуктивной связи i -го и $i+1$ -го резонатора.

Рассмотрим, наконец, положительную величину

$$|k_{i,i+1}^C| = J_{i,i+1} / \sqrt{b_i b_{i+1}}. \quad (7.7)$$

Для выяснения ее физического смысла обратимся к схеме фильтра с параллельными резонаторами, изображенной на рис. 6.19.

Вычислим $|k_{i,i+1}^C|$ для частного случая, когда резонаторы СВЧ являются параллельными контурами с параметрами C_i и L_i , настроенными на частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{L_i C_i}$, а инверторы проводимостей выполнены из емкостей по П-схеме с параметрами $J_{i,i+1} = \omega_0 |C_{i,i+1}^m|$. Фрагмент схемы фильтра для такого частного случая приведен на рис. 7.3.

Согласно формуле (6.46) параметры крутизны реактивных проводимостей параллельных колебательных контуров $b_i = \omega_0 C_i$. Отсюда находим, что

величина $|k_{i,i+1}^C|$, определяемая формулой (7.7), принимает значение

$$|k_{i,i+1}^C| = \left| C_{i,i+1}^m \right| / \sqrt{C_i C_{i+1}}. \quad (7.8)$$

Фрагмент схемы фильтра на рис. 7.3 эквивалентен двум связанным параллельным колебательным контурам с параметрами $C'_{i+1} = C_{i+1} - C_{i,i+1}^m$ и $C'_i = C_i - C_{i,i+1}^m$, представленным на рис. 7.4.

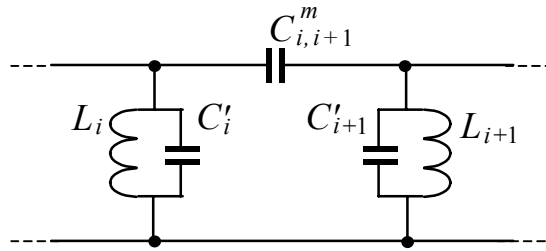


Рис. 7.4. Параллельные контуры с внешней емкостной связью

Выразим емкости в формуле (7.8) через параметры эквивалентных контуров

$$|k_{i,i+1}^C| = \left| C_{i,i+1}^m \right| / \sqrt{(C'_i + C_{i,i+1}^m)(C'_{i+1} + C_{i,i+1}^m)}. \quad (7.9)$$

Выражение, расположенное в правой части равенства (7.9), хорошо известно в теории связанных контуров. Оно называется коэффициентом связи колебательных контуров с внешней емкостной связью (рис. 7.4). Поэтому величину $k_{i,i+1}^C$, определяемую формулой (7.8) для фильтра с параллельными резонаторами, будем называть коэффициентом емкостной связи i -го и $i+1$ -го резонаторов.

Теперь любую из двух строк группы формул (7.1) можно записать одной общей строкой формул

$$Q_A^{-1} = \frac{w}{\Omega_1 g_0 g_1}, \quad |k_{i,i+1}| = \frac{w}{\Omega_1 \sqrt{g_i g_{i+1}}}, \quad Q_B^{-1} = \frac{w}{\Omega_1 g_n g_{n+1}}, \quad (7.10)$$

если ввести коэффициент связи $k_{i,i+1}$, характеризующий взаимодействие i -го резонатора с $i+1$ -м резонатором, который равен коэффициенту $k_{i,i+1}^L$ в случае последовательных резонаторов с индуктивной связью и коэффициенту $k_{i,i+1}^C$ в случае параллельных резонаторов с емкостной связью.

Таким образом, синтезируемый фильтр СВЧ будет иметь требуемую полосу пропускания с относительной шириной w , если коэффициенты связи

$k_{i,i+1}$ и внешние добротности Q_A и Q_B его резонаторов СВЧ будут удовлетворять формулам (7.10). При этом, естественно, резонансные частоты всех резонаторов должны быть настроены на центральную частоту требуемой полосы пропускания.

Из формул (7.10), в частности, следует важный вывод о том, что пропорциональное увеличение коэффициентов связи и обратных добротностей резонаторов приводит к пропорциональному увеличению полосы пропускания. При этом необходимо помнить, что формулы (7.10) приближенные и их точность может снижаться с увеличением относительной ширины полосы пропускания.

7.2. Формула сложения коэффициентов индуктивной и емкостной связи

Формулы (7.10) получены нами для двух частных случаев. В одном случае между резонаторами СВЧ существует только индуктивная связь, коэффициент $k_{i,i+1}^L$ которой определяется формулой (7.5). В другом случае между резонаторами СВЧ существует только емкостная связь, коэффициент $k_{i,i+1}^C$ которой определяется формулой (7.7). Однако индуктивная и емкостная связи между резонаторами СВЧ могут существовать и одновременно. Такую связь называют комбинированной. Ее можно характеризовать своим коэффициентом $k_{i,i+1}$, который будем называть коэффициентом связи. Его величину определим так, чтобы формулы (7.10) оставались справедливыми после замены индуктивной или емкостной связи на комбинированную связь.

Получим формулу для расчета коэффициента связи $k_{i,i+1}$ для случая комбинированной связи по известным значениям коэффициента индуктивной связи $k_{i,i+1}^L$ и коэффициента емкостной связи $k_{i,i+1}^C$. Для этого рассмотрим уединенную пару связанных резонаторов. Для краткости индексы i и $i+1$ будем опускать. Тогда индексы L и C у коэффициентов связи можно писать как нижние индексы.

Как уже отмечалось, относительная ширина полосы пропускания фильтра w пропорциональна коэффициентам связи резонаторов. Ширина w , в свою очередь, пропорциональна расщеплению резонансных частот связанных колебаний уединенных резонаторов ω_+ и ω_- ($\omega_+ > \omega_-$). Поэтому между коэффициентом связи k и отношением частот ω_+/ω_- должна существовать однозначная зависимость, не зависящая от типа резонаторов.

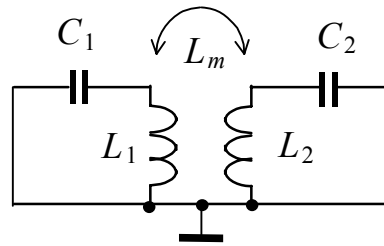


Рис. 7.5. Колебательные контуры с индуктивной связью

Для нахождения этой зависимости рассмотрим связанные колебательные контуры. Начнем со случая индуктивной связи контуров (см. рис. 7.5). Будем считать, что, как и в фильтре, контуры в отсутствие связи имеют вырожденные резонансные частоты, то есть

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = \omega_0^{-2}. \quad (7.11)$$

При наличии индуктивной связи резонансные частоты связанных колебаний

$$\omega_{\pm}^{-2} = \omega_0^{-2} \left[1 \mp |L_m| / \sqrt{L_1 L_2} \right]. \quad (7.12)$$

Здесь пара вертикальных скобок указывает на абсолютную величину числа. Их наличие означает, что коэффициент взаимной индукции L_m может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из формул (7.12) и (7.6) находим искомое выражение для коэффициента индуктивной связи

$$|k_L| = (\omega_+^2 - \omega_-^2) / (\omega_+^2 + \omega_-^2). \quad (7.13)$$

Видно, что при слабой индуктивной связи $k_L \approx (\omega_+ - \omega_-) / \omega_0$.

Рассмотрим теперь емкостную связь контуров (см. рис. 7.6). Вместо условия (7.11) будем предполагать выполнение обобщенного условия

$$L_1(C_1 + C_m) = L_2(C_2 + C_m) = \omega_0^{-2}. \quad (7.14)$$

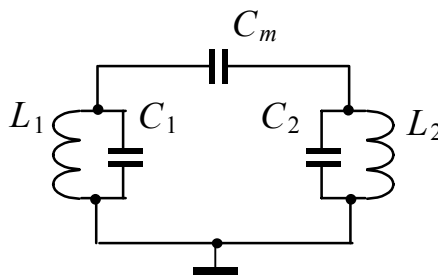


Рис. 7.6. Колебательные контуры с емкостной связью

В этом случае резонансные частоты связанных колебаний выражаются формулой

$$\omega_{\pm}^{-2} = \omega_0^{-2} \left[1 \mp |C_m| / \sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)} \right]. \quad (7.15)$$

В этой формуле наличие пары вертикальных скобок не является обязательным, так как величина C_m не может быть отрицательной. Тем не менее скобки мы оставляем для упрощения последующих выкладок.

Из формул (7.15) и (7.8) получаем следующее выражение для коэффициента емкостной связи

$$|k_C| = (\omega_+^2 - \omega_-^2) / (\omega_+^2 + \omega_-^2). \quad (7.16)$$

Сравнивая формулы (7.13) и (7.16), убеждаемся, что коэффициент связи контуров однозначно выражается через резонансные частоты связанных колебаний, независимо от типа связи. Поэтому абсолютную величину коэффициента связи резонаторов СВЧ при любом типе связи, включая и комбинированную связь, определим формулой

$$|k| = (\omega_+^2 - \omega_-^2) / (\omega_+^2 + \omega_-^2). \quad (7.17)$$

Рассмотрим, наконец, контуры с комбинированной связью (рис. 7.7). По-прежнему будем предполагать выполнение условия (7.14), которое является условием равенства резонансных частот отдельных резонаторов ω_1 и ω_2 . В рассматриваемом случае резонансные частоты связанных колебаний

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^{-2} = \omega_0^{-2} & \left[1 - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} \right] \mp \\ & \mp \omega_0^{-2} \left| \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \right|. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Эта формула согласуется с формулами (7.12) и (7.15). Подставляя (7.18) в (7.17), получаем

$$|k| = \frac{\left| \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \right|}{1 - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}}}. \quad (7.19)$$

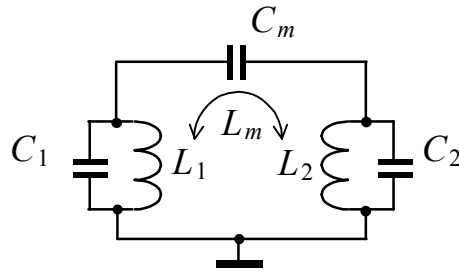


Рис. 7.7. Колебательные контуры с комбинированной связью

Видно, что при комбинированной связи $|k|$ зависит не только от абсолютных величин коэффициентов k_L и k_C , но и от их знаков. Действительно, при одинаковых знаках L_m и C_m индуктивная и емкостная связи в колебательных контурах вычитаются одна из другой, а при противоположных знаках – складываются. Поэтому при комбинированной связи контуров важно знать еще и знаки коэффициентов k_L и k_C , а точнее – знак отношения k_L/k_C . Последнее уточнение означает, что знак одного из коэффициентов можно определить произвольно, а знак другого – с учетом формулы (7.19).

Одним из возможных вариантов задать знаки коэффициентов связи и при этом обеспечить выполнение всех ранее приведенных формул является следующий. Коэффициент связи резонаторов СВЧ, имеющих одинаковые резонансные частоты ($\omega_1 = \omega_2$), определим для любого типа связи формулой

$$k = (\omega_o^2 - \omega_e^2) / (\omega_o^2 + \omega_e^2), \quad (7.20)$$

где ω_e , ω_o – частоты четных и нечетных связанных колебаний. В общем случае деление связанных колебаний на четные и нечетные является условным. Поэтому условным будет и знак коэффициента связи. Однако знак отношения коэффициентов будет абсолютным. В частном случае, когда резонаторы СВЧ являются колебательными контурами, четными колебаниями будем называть колебания, при которых напряжения на емкостях C_1 и C_2 относительно земли имеют одинаковые знаки. В этом случае формула (7.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_{e,o}^{-2} = \omega_0^{-2} & \left[1 - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} \right] \pm \\ & \pm \omega_0^{-2} \left[\frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} - \frac{C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \right]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

где верхний знак (+) в двойном символе \pm отвечает первому индексу частоты (e), а нижний знак (–) — второму индексу (o).

Подставляя (7.21) в (7.20) и полагая $C_m=0$, получаем формулу для коэффициента индуктивной связи контуров

$$k_L = L_m / \sqrt{L_1 L_2}, \quad (7.22)$$

согласующуюся с известной формулой (7.6). Видно, что знак k_L совпадает со знаком L_m .

Подставляя (7.21) в (7.20) и полагая $L_m=0$, получаем формулу для коэффициента емкостной связи контуров

$$k_C = -C_m / \sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}, \quad (7.23)$$

согласующуюся с известной формулой (7.9). Видно, что знак k_C при $C_m > 0$ всегда отрицателен.

Наконец, подставляя (7.21) в (7.20) и учитывая (7.22) и (7.23), получаем искомую формулу сложения коэффициентов индуктивной и емкостной связи резонаторов СВЧ

$$k = (k_L + k_C) / (1 + k_L k_C). \quad (7.24)$$

Как мы увидим ниже, формулу (7.24), в отличие от исходных формул (7.20), (7.22) и (7.23), можно использовать не только на резонансной, но и на произвольной частоте.

7.3. Симметричная пара регулярных МПР, связанных по всей длине. Резонансная частота

Рассмотрим резонансное взаимодействие двух одинаковых регулярных микрополосковых резонаторов. Начнем со случая, когда длина области связи $l_{св}$ равна длине полосковых проводников l (см. рис. 7.8).

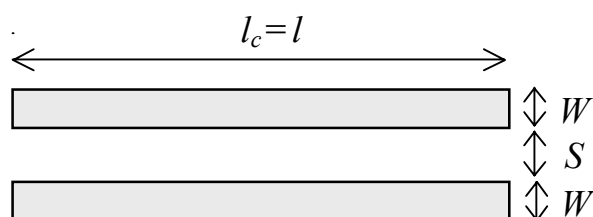


Рис. 7.8. Симметричная пара регулярных МПР, связанных по всей длине

В этом случае резонансные частоты связанных колебаний МПР удовлетворяют условиям

$$\theta_e = n\pi, \quad \theta_o = n\pi, \quad (7.25)$$

где $\theta_e = \omega_e \sqrt{\varepsilon_e} l / c$ и $\theta_o = \omega_o \sqrt{\varepsilon_o} l / c$ – электрические длины резонаторов для четных и нечетных колебаний соответственно. Учитывая условия (7.25), формулу (7.20) можно записать в виде

$$k = (\varepsilon_e - \varepsilon_o) / (\varepsilon_e + \varepsilon_o). \quad (7.26)$$

Формула (7.26) выражает коэффициент связи МПР через электрические параметры связанных микрополосковых линий. Так как в связанных МПЛ всегда* $\varepsilon_e \geq \varepsilon_o$, то из (7.26) следует, что коэффициент k не может быть отрицательным. Для резонаторов, являющихся отрезками связанных полосковых и других однородных линий передачи, коэффициент k обращается в нуль.

При описании симметричных пар связанных линий передачи часто используют коэффициенты индуктивной и емкостной связи, определяемые формулами

$$K_L = L_m / L_1, \quad K_C = C_m / (C_1 + C_m), \quad (7.27)$$

где L_1, C_1 – погонные индуктивность и емкость проводников относительно экрана; L_m, C_m – погонные взаимные индуктивность и емкость проводников.

Используя формулы (2.27)–(2.28), определение (7.27) можно переписать в виде

$$K_L = \frac{Z_e \sqrt{\varepsilon_e} - Z_o \sqrt{\varepsilon_o}}{Z_e \sqrt{\varepsilon_e} + Z_o \sqrt{\varepsilon_o}}, \quad K_C = \frac{Z_e \sqrt{\varepsilon_o} - Z_o \sqrt{\varepsilon_e}}{Z_e \sqrt{\varepsilon_o} + Z_o \sqrt{\varepsilon_e}}. \quad (7.28)$$

Установим связь коэффициентов K_L и K_C с коэффициентами k_L и k_C . Для этого подставим выражения (7.28) в формулу (7.26). Получаем

$$k = (K_L - K_C) / (1 - K_L K_C). \quad (7.29)$$

Эта формула аналогична формуле (7.24). Из нее следует, что для микрополосковых резонаторов, взаимодействующих по всей длине, коэффициенты индуктивной и емкостной связи выражаются формулами

$$k_L = K_L, \quad k_C = -K_C. \quad (7.30)$$

* См. примечание на с. 17.

Из формул (7.29) и (7.26) также следует, что при $\varepsilon_e = \varepsilon_0$ имеет место равенство

$$K_L = K_C. \quad (7.31)$$

Связанные линии передачи, для которых нарушается равенство (7.31), называют линиями передачи с неуравновешенными связями. К их числу относятся и связанные микрополосковые линии кроме случая, когда высота верхнего экрана над полосковыми проводниками h_a равна толщине подложки h .

Исследуем зависимости коэффициентов K_L , K_C и k от конструктивных параметров. На рис. 7.9 по формулам (7.28) и (7.26) построены зависимости этих коэффициентов от диэлектрической проницаемости подложки для двух значений зазора S между полосковыми проводниками. Видно, что коэффициент индуктивной связи K_L не зависит от ε_r . Коэффициент емкостной связи K_C является монотонно убывающей функцией, асимптотически приближающейся к константе при больших значениях ε_r . Напротив, коэффициент связи k является монотонно возрастающей функцией, асимптотически приближающейся к константе.

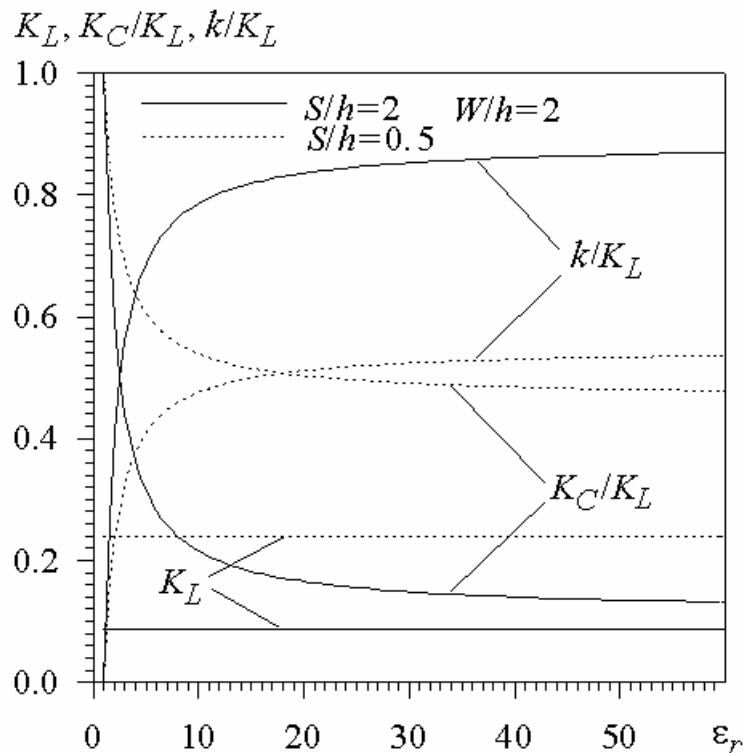


Рис. 7.9. Зависимости коэффициентов связи от диэлектрической проницаемости подложки

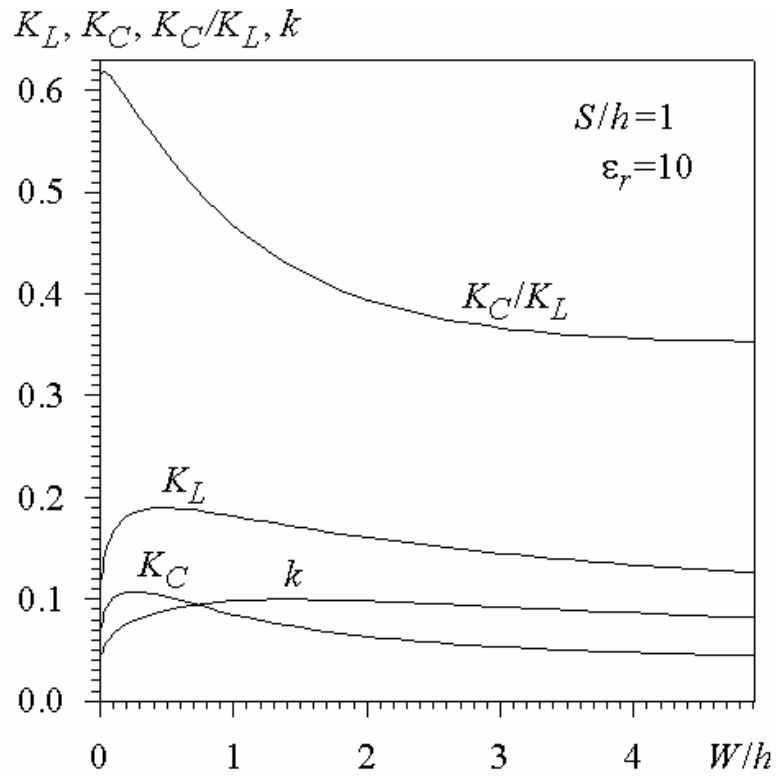


Рис. 7.10. Зависимости коэффициентов связи от ширины полосковых проводников

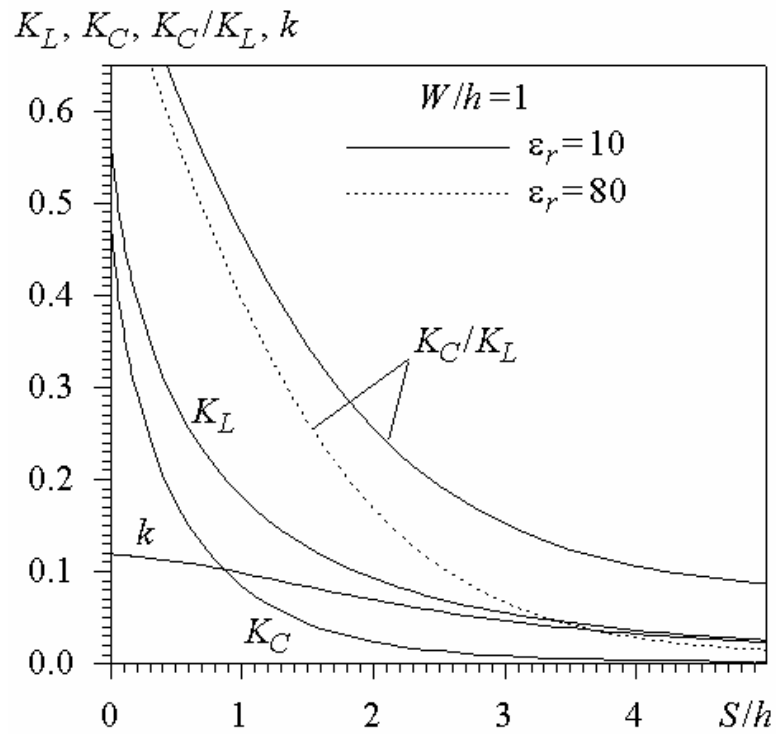


Рис. 7.11. Зависимости коэффициентов связи от зазора между полосковыми проводниками

На рис. 7.10 построены зависимости коэффициентов связи от ширины полосковых проводников. Видно, что коэффициенты K_L , K_C и k имеют по одному максимуму. Что же касается отношения K_C/K_L , то оно убывает с увеличением W/h , асимптотически приближаясь к константе.

На рис. 7.11 построены зависимости коэффициентов связи от величины зазора между полосковыми проводниками. Видно, что все коэффициенты монотонно убывают с увеличением S/h . При этом коэффициент емкостной связи K_C убывает быстрее коэффициента индуктивной связи K_L . Причем с увеличением диэлектрической проницаемости подложки убывание отношения K_C/K_L происходит сильнее.

7.4. Симметричная пара регулярных МПР с произвольной длиной области связи. Резонансная частота

Рассмотрим теперь резонансное взаимодействие двух одинаковых регулярных микрополосковых резонаторов при произвольной длине области l_c (см. рис. 7.12).

Введем относительную длину области связи

$$x = l_c/l. \quad (7.32)$$

Резонансные частоты таких резонаторов удовлетворяют уравнению

$$4Z_1[Z_1 \sin \theta_e \sin \theta_o + \operatorname{tg} \theta_1 (Z_e \sin \theta_o \cos \theta_e + Z_o \sin \theta_e \cos \theta_o)] + \operatorname{tg}^2 \theta_1 [2Z_e Z_o (1 + \cos \theta_e \cos \theta_o) - (Z_e^2 + Z_o^2) \sin \theta_e \sin \theta_o] = 0, \quad (7.33)$$

где $\theta_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e} l_c / c$, $\theta_o = \omega \sqrt{\varepsilon_o} l_c / c$ – электрические длины области связи на частоте ω для четных и нечетных волн соответственно; $\theta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1} l_1 / c$ – электрическая длина одиночных несвязанных участков.

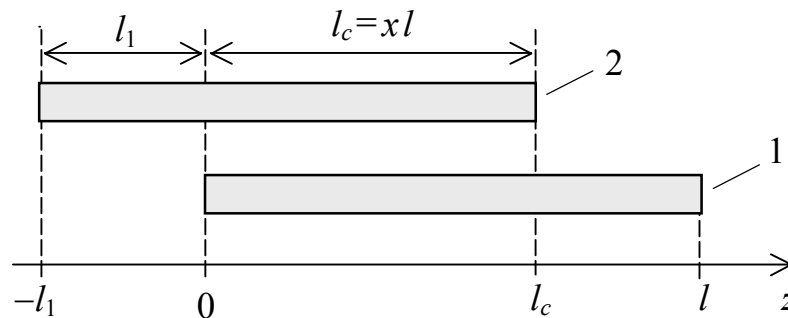


Рис. 7.12. Симметричная пара регулярных МПР с произвольной длиной области связи

Уравнение (7.33) может быть получено путем вычисления $ABCD$ -матрицы соответствующего составного четырехполосника с помощью формул (6.3) и (6.4). Частным случаем уравнения (7.33) при $l_c = l$ являются уравнения (7.25). В случае $l_c = 0$ из (7.33) следует, что частоты четных и нечетных колебаний вырождены и удовлетворяют условию $\theta_1 = \pi n$.

На рис. 7.13 по формуле (7.20) построены зависимости коэффициента связи МПР на частоте полуволновых колебаний ($n=1$) от относительной длины области связи для нескольких значений диэлектрической проницаемости подложки. Частоты полуволновых четных и нечетных связанных колебаний находились численным решением уравнения (7.33).

Видно, что все кривые пересекаются в одной точке. Координата этой точки $x_c = 0.646$ является корнем уравнения

$$\pi x_c + \operatorname{tg}(\pi x_c) = 0. \quad (7.34)$$

Пересечение кривых $k(x)$ в одной точке говорит о том, что при $x = x_c$ коэффициент связи резонаторов не зависит от диэлектрической проницаемости подложки. Очевидно, что это возможно только в том случае, когда коэффициент емкостной связи резонаторов $k_C|_{x=x_c} = 0$. Другими словами, при $x = x_c$ связь между резонаторами становится чисто индуктивной.

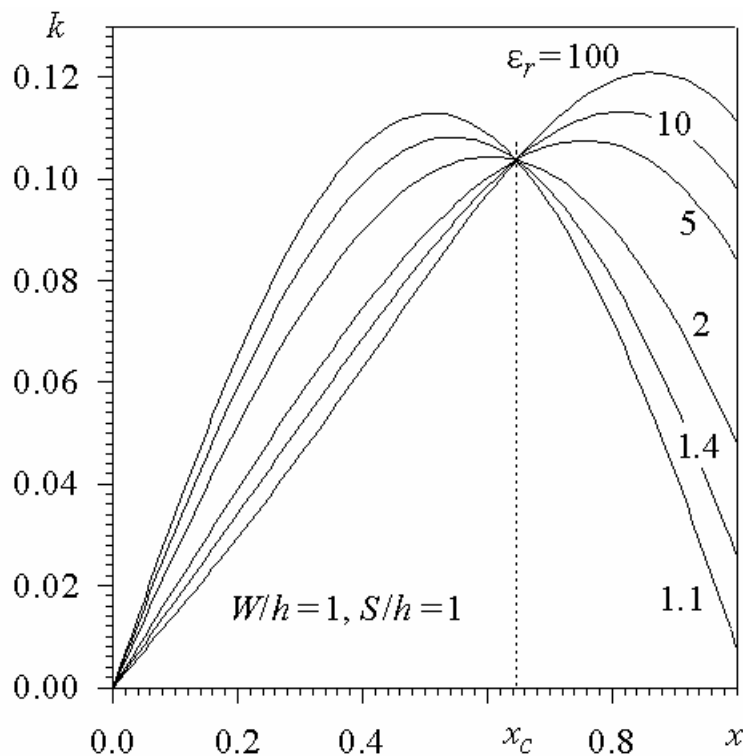


Рис. 7.13. Зависимость коэффициента связи от относительной длины области связи ($n=1$)

Для начала получим простые приближенные аналитические выражения для функций $k_L(x)$ и $k_C(x)$, полагая, что эти функции пропорциональны соответственно энергиям индуктивного и емкостного взаимодействий

$$W_{12L}(x) = L_m \int_0^{xl} i_1(z) i_2(z) dz, \quad W_{12C}(x) = -C_m \int_0^{xl} u_1(z) u_2(z) dz. \quad (7.35)$$

Распределение токов и напряжений вдоль проводников обоих резонаторов на частоте полуволнового резонанса ($n=1$) аппроксимируем функциями

$$\begin{aligned} i_1(z) &= I_1 \sin(\pi z/l), & i_2(z) &= I_2 \sin[\pi(z/l + 1 - x)], \\ u_1(z) &= U_1 \cos(\pi z/l), & u_2(z) &= U_2 \cos[\pi(z/l + 1 - x)]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

После выполнения интегрирования в (7.35) получаем

$$\begin{aligned} k_L(x) &\approx K_L \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - x \cos(\pi x) \right], \\ k_C(x) &\approx K_C \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + x \cos(\pi x) \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Коэффициенты пропорциональности в (7.37) выбраны из условия, чтобы при $x=1$ эти формулы переходили в формулы (7.30). Видим, что из второй строки формулы (7.37) получается уравнение (7.34) для определения x_c .

На рис. 7.14 приведены зависимости $k_L(x)$ и $k_C(x)$, построенные по формулам (7.37). Видно, что на частоте полуволнового резонанса коэффициент индуктивной связи $k_L(x)$ всегда положителен, а коэффициент емкостной связи $k_C(x)$ положителен только при $x < x_c$.

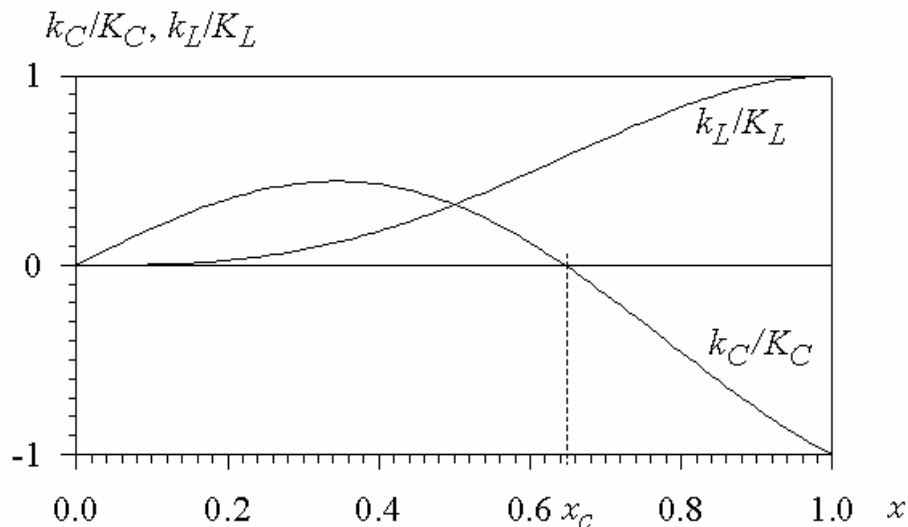


Рис. 7.14. Зависимости коэффициентов индуктивной и емкостной связи от относительной длины области связи ($n=1$)

Вычислив по формулам (7.37) коэффициенты $k_L(x)$ и $k_C(x)$, можно найти коэффициент связи $k(x)$, не прибегая к формуле (7.20) и не решая трансцендентного уравнения (7.33). Его можно вычислить по формуле (7.24). Правомерность использования формулы (7.24) при любых значениях x , а не только при $x=1$ подтверждается численными расчетами для конкретных случаев.

Расчетные кривые, представленные на рис. 7.15, являются одним из таких доказательств. Они показывают зависимости относительной погрешности расчета $k(x)$ по формулам (7.37) и (7.24) от длины области связи для трех значений ε_r . Величина Δk вычислялась как разность приближенного и точного значения $k(x)$, рассчитанного по формулам (7.20) и (7.33). Видно, что во всем диапазоне значений x относительная погрешность $\Delta k/k$ составляет порядка 1%. С одной стороны, это говорит о высокой точности приближенных формул (7.37), а с другой – о правомерности использования формулы (7.24) при $x \neq 1$.

Аналогичным образом могут быть получены формулы для коэффициентов индуктивной и емкостной связи на частотах высших мод колебаний. На частоте одноволновых колебаний ($n=2$) эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} k_L &\approx -K_L \left[\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - x \cos(2\pi x) \right], \\ k_C &\approx -K_C \left[\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) + x \cos(2\pi x) \right]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Забегаая вперед, заметим, что приближенные формулы (7.37) и (7.38) становятся точными в пределе $K_L, K_C \rightarrow 0$.

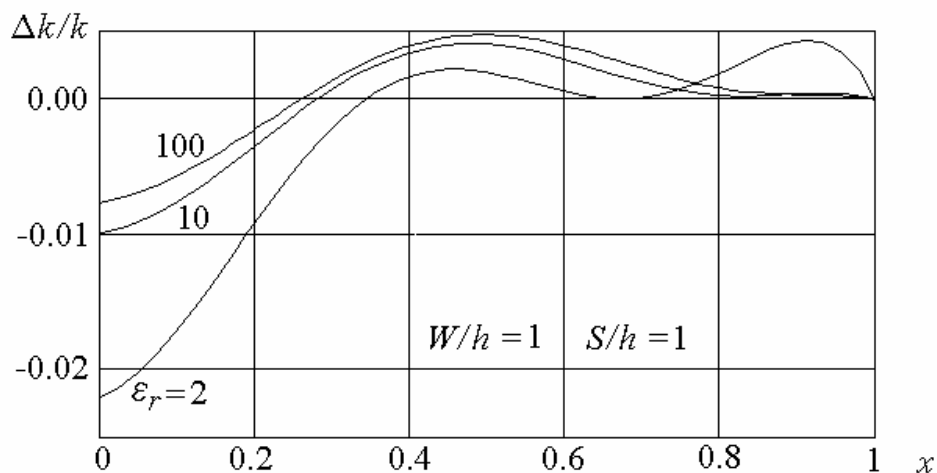


Рис. 7.15. Относительная погрешность расчета коэффициента связи по формулам (7.37) и (7.24) на частоте полуволнового резонанса ($n=1$)

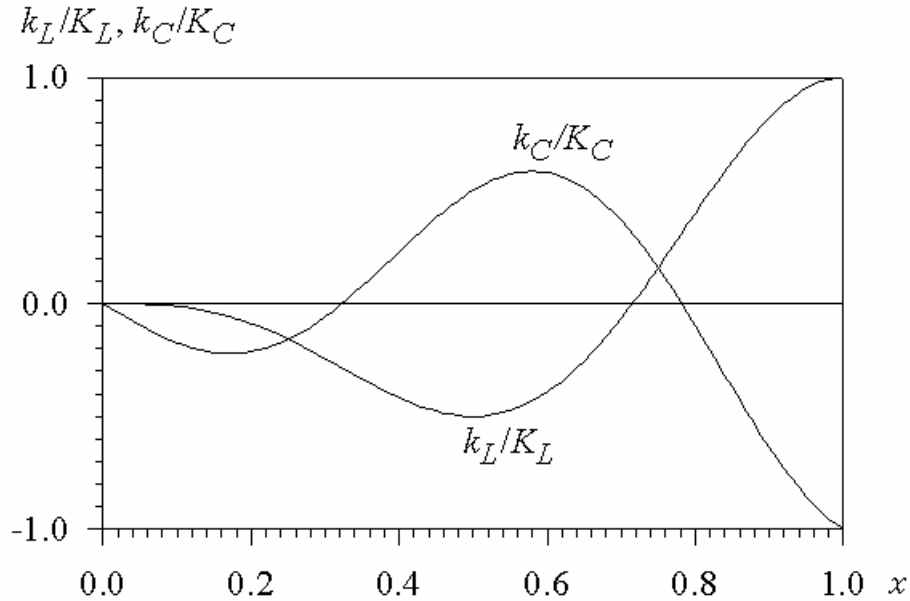


Рис. 7.16. Зависимости коэффициентов индуктивной и емкостной связи от относительной длины области связи ($n=2$)

Коэффициент связи $k(x)$ для одноволновых колебаний может быть по-прежнему вычислен по формуле (7.24).

На рис. 7.16 для второй моды колебаний ($n=2$) построены нормированные зависимости коэффициентов индуктивной и емкостной связи от длины области связи. Эти зависимости существенно отличаются от соответствующих кривых, построенных для первой моды колебаний (см. рис. 7.14). Коэффициент $k_L(x)$ меняет свой знак в точке $x=0.715$, а коэффициент $k_C(x)$ меняет свой знак дважды. Минимум коэффициента $k_L(x)$ располагается в точке $x=0.5$ а его величина $k_{L\min} = -0.5K_L$. Первый минимум коэффициента $k_C(x)$ располагается в точке $x=0.165$, имея величину $k_{C\min1} = -0.22K_C$. Вторым минимумом располагается в точке $x=1$, имея величину $k_{C\min2} = -K_C$. Максимум коэффициента $k_C(x)$ расположен в точке $x=0.58$, а его величина $k_{C\max} = 0.59K_C$.

На рис. 7.17 для нескольких значений ε_r построены зависимости коэффициента связи резонаторов от относительной длины их области связи на частоте одноволнового резонанса. Видно, что кривые на этом рисунке существенно отличаются от соответствующих кривых для первой моды колебаний (см. рис. 7.13). Во-первых, коэффициент $k(x)$ для второй моды колебаний может быть, в зависимости от смещения резонаторов, как положительным, так и отрицательным. Во-вторых, существует не один, а два значения x , при которых коэффициент связи не зависит от ε_r . Это точки

$x_{c1} = 0.323$ и $x_{c2} = 0.782$. В них коэффициент $k_C = 0$. В-третьих, для каждого ε_r существует такое значение $x = x_k$, при котором $k = 0$. Причем с увеличением ε_r от 1 до ∞ значение x_k изменяется от 0.50 до 0.75. При длине области связи $x = x_k$ емкостное взаимодействие полностью компенсируется индуктивным. Следует отметить, что величина x_k зависит не только от ε_r , но и от W , S и h .

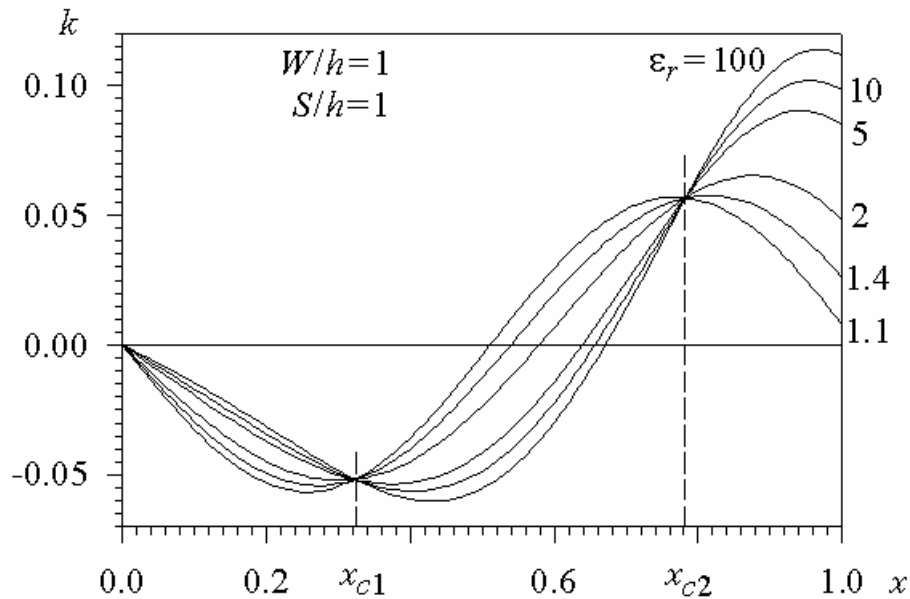


Рис. 7.17. Зависимость коэффициента связи от относительной длины области связи ($n=2$)

При рассмотрении высших мод колебаний ($n > 1$) в связанных микрополосковых резонаторах следует помнить, что квазистатическое приближение дает хороший результат только когда поперечные размеры резонаторов W , S , h значительно меньше длины волны в резонаторе λ_g .

Таким образом, коэффициент связи k для симметричной пары параллельно связанных микрополосковых резонаторов характеризует степень расщепления резонансных частот четных ω_e и нечетных ω_o связанных колебаний, описываемую формулой (7.20). Это расщепление вызывается как индуктивным, так и емкостным взаимодействиями резонаторов. Степень индуктивного взаимодействия резонаторов характеризуется коэффициентом k_L , емкостного – коэффициентом k_C . Эти коэффициенты могут быть вычислены по приближенным формулам (7.37), (7.38). Коэффициент k является «суммой» коэффициентов k_L и k_C , причем суммирование производится по формуле (7.24).

7.5. Связанные контуры. Энергия и коэффициенты связи

Определения коэффициента связи резонаторов СВЧ, приведенные выше, не удобны для практического применения. Так, использование формул (7.5) и (7.7) для связанных резонаторов требует предварительного нахождения параметров эквивалентной схемы. Кроме того, эти формулы и формула (7.20) задают значение коэффициента связи k лишь на резонансной частоте, в то время как связь между резонаторами фильтра существует на всех частотах ω , где коэффициент прохождения мощности СВЧ отличен от нуля.

Используя энергетический подход, сформулируем физическое определение коэффициента связи резонаторов, позволяющее исследовать частотную зависимость $k(\omega)$. Для этого рассмотрим пару связанных колебательных контуров, включенную между генератором и нагрузкой (см. рис. 7.18).

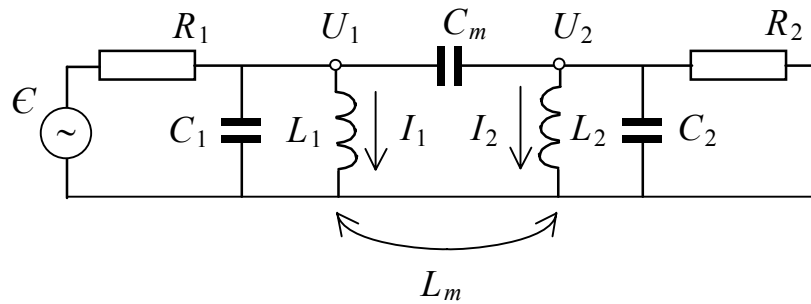


Рис. 7.18. Связанные колебательные контуры, включенные между генератором и нагрузкой

Пусть ЭДС генератора изменяется по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t)$. Тогда комплексные напряжения и токи в индуктивностях контуров будут удовлетворять уравнениям

$$U_1 = -i\omega(L_1 I_1 + L_m I_2), \quad (7.39)$$

$$U_2 = -i\omega(L_2 I_2 + L_m I_1), \quad (7.40)$$

$$U_1 - U_2 = \frac{i}{\omega C_m} [I_2 - i\omega C_2 U_2 + \frac{U_2}{R_2}]. \quad (7.41)$$

Из уравнений (7.39)–(7.41) находим коэффициент передачи по напряжению из первого контура во второй:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{L_m/L_1 - [L_2 - L_m^2/L_1] C_m \omega^2}{1 - [C_2 + C_m + i/(\omega R_2)][L_2 - L_m^2/L_1] \omega^2}. \quad (7.42)$$

Видно, что коэффициент передачи обращается в нуль на частоте

$$\omega_p = \sqrt{L_m / [(L_1 L_2 - L_m^2) C_m]} \quad (7.43)$$

и имеет максимум модуля вблизи резонансной частоты второго контура

$$\omega_2 = 1 / \sqrt{L_2 (C_2 + C_m) [1 - L_m^2 / (L_1 L_2)]}. \quad (7.44)$$

Замечаем, что на резонансной частоте ω_2 коэффициент передачи является мнимым числом:

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_2} = iR_2 \frac{(C_2 + C_m)L_m/L_1 - C_m}{\sqrt{L_2 [1 - L_m^2 / (L_1 L_2)] [C_2 + C_m]}}. \quad (7.45)$$

Очевидно, что резонансная частота первого контура

$$\omega_1 = 1 / \sqrt{L_1 (C_1 + C_m) [1 - L_m^2 / (L_1 L_2)]}. \quad (7.46)$$

Запишем выражение для электромагнитной энергии, запасаемой всеми элементами связанных контуров. Начнем с энергии электрического поля:

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C_1 \operatorname{Re}^2(U_1) + \frac{1}{2} C_2 \operatorname{Re}^2(U_2) + \frac{1}{2} C_m \operatorname{Re}^2(U_1 - U_2). \quad (7.47)$$

Выделяя для комплексных напряжений $U_1(t)$, $U_2(t)$ амплитуды $|U_1|$, $|U_2|$ и начальные фазы $\varphi_1 = \arg(U_1)|_{t=0}$, $\varphi_2 = \arg(U_2)|_{t=0}$, выражение (7.47) записываем в виде

$$W_C(t) = \bar{W}_C + \tilde{W}_C(t),$$

где

$$\bar{W}_C = \frac{1}{4} (C_1 + C_m) |U_1|^2 + \frac{1}{4} (C_2 + C_m) |U_2|^2 - \frac{1}{2} C_m |U_1| |U_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (7.48)$$

– постоянная составляющая энергии электрического поля, которую будем называть усредненной по времени энергией;

$$\begin{aligned} \tilde{W}_C(t) = & \frac{1}{4} (C_1 + C_m) |U_1|^2 \cos 2(\omega t - \varphi_1) + \frac{1}{4} (C_2 + C_m) |U_2|^2 \cos 2(\omega t - \varphi_2) - \\ & - \frac{1}{2} C_m |U_1| |U_2| \cos(2\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (7.49)$$

– переменная составляющая энергии электрического поля, которую будем называть колеблющейся энергией.

Усредненная энергия \bar{W}_C , согласно (7.48),

$$\bar{W}_C = \bar{W}_{11C} + \bar{W}_{22C} + \bar{W}_{12C},$$

где

$$\bar{W}_{11C} = \frac{1}{4}(C_1 + C_m)|U_1|^2, \quad \bar{W}_{22C} = \frac{1}{4}(C_2 + C_m)|U_2|^2 \quad (7.50)$$

– усредненные энергии электрического поля, запасаемые первым и вторым контуром в отдельности;

$$\bar{W}_{12C} = -\frac{1}{2}C_m \operatorname{Re}(U_1^* U_2) \quad (7.51)$$

– усредненная энергия электрического поля, запасаемая первым и вторым контуром совместно.

Напротив, колеблющаяся энергия \tilde{W}_C , согласно (7.49),

$$\tilde{W}_C(t) = \tilde{W}_{11C}(t) + \tilde{W}_{22C}(t) + \tilde{W}_{12C}(t),$$

где

$$\tilde{W}_{11C}(t) = \frac{1}{4}(C_1 + C_m) \operatorname{Re}(U_1^2), \quad \tilde{W}_{22C}(t) = \frac{1}{4}(C_2 + C_m) \operatorname{Re}(U_2^2) \quad (7.52)$$

– колеблющиеся энергии электрического поля, запасаемые первым и вторым контуром в отдельности;

$$\tilde{W}_{12C}(t) = -\frac{1}{2}C_m \operatorname{Re}(U_1 U_2) \quad (7.53)$$

– колеблющаяся энергия электрического поля, запасаемая первым и вторым контуром совместно.

Запишем теперь энергию магнитного поля, запасаемую всеми элементами связанных контуров:

$$W_L(t) = \frac{1}{2}L_1 \operatorname{Re}^2(I_1) + \frac{1}{2}L_2 \operatorname{Re}^2(I_2) + L_m \operatorname{Re}(I_1) \operatorname{Re}(I_2). \quad (7.54)$$

Выделяя амплитуды токов $|I_1|$, $|I_2|$ и их начальные фазы ψ_1 , ψ_2 , запишем выражение (7.54) в виде

$$W_L(t) = \bar{W}_L + \tilde{W}_L(t),$$

где

$$\bar{W}_L = \frac{1}{4}L_1 |I_1|^2 + \frac{1}{4}L_2 |I_2|^2 + \frac{1}{2}L_m |I_1| |I_2| \cos(\psi_1 - \psi_2) \quad (7.55)$$

– усредненная энергия магнитного поля;

$$\begin{aligned} \tilde{W}_L(t) = & \frac{1}{4}L_1|I_1|^2 \cos 2(\omega t - \psi_1) + \frac{1}{4}L_2|I_2|^2 \cos 2(\omega t - \psi_2) + \\ & + \frac{1}{2}L_m|I_1||I_2| \cos (2\omega t - \psi_1 - \psi_2) \end{aligned} \quad (7.56)$$

– колеблющаяся энергия магнитного поля.

В формулах (7.55)–(7.56), в отличие от формул (7.48) и (7.49), ни одно из слагаемых нельзя отождествлять с энергией, запасаемой каким-либо определенным контуром, так как ток в одном из контуров может быть связан с колебанием в другом контуре. Последнее утверждение становится очевидным, если рассматривать колебания на частоте $\omega = \omega_p$, когда $U_2 = 0$ при $U_1 \neq 0$. Действительно, в этом случае колебания во втором контуре отсутствуют ($U_2 = 0$), а ток I_2 , согласно (7.41), отличен от нуля. Это означает, что колебания в первом контуре простираются лишь на один из элементов второго контура (L_2), а не на весь второй контур в целом.

Таким образом, ток I_2 во втором контуре может быть связан как с колебанием во втором контуре, так и с колебанием в первом контуре. Аналогичная неопределенность имеет место и для тока I_1 .

Эту неопределенность можно устранить, если учитывать реальную взаимосвязь между токами и напряжениями, выражаемую общими формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= i_{11}U_1 + i_{12}U_2, \\ I_2 &= i_{21}U_1 + i_{22}U_2. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Подставляя (7.57) в (7.55), получаем

$$\bar{W}_L = \bar{W}_{11L} + \bar{W}_{22L} + \bar{W}_{12L},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W}_{11L} &= \frac{1}{4} [L_1|i_{11}|^2 + L_2|i_{21}|^2 + 2L_m \operatorname{Re}(i_{11}^*i_{21})] |U_1|^2, \\ \bar{W}_{22L} &= \frac{1}{4} [L_1|i_{12}|^2 + L_2|i_{22}|^2 + 2L_m \operatorname{Re}(i_{12}^*i_{22})] |U_2|^2 \end{aligned} \quad (7.58)$$

– усредненные энергии магнитного поля, запасаемые первым и вторым контуром в отдельности;

$$\bar{W}_{12L} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left([L_1 i_{11}^* i_{12} + L_2 i_{21}^* i_{22} + L_m (i_{11}^* i_{22} + i_{21}^* i_{12})] U_1^* U_2 \right) \quad (7.59)$$

– усредненная энергия магнитного поля, запасаемая первым и вторым контуром совместно.

Теперь подставим (7.57) в (7.56). Получаем

$$\tilde{W}_L(t) = \tilde{W}_{11L}(t) + \tilde{W}_{22L}(t) + \tilde{W}_{12L}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{11L}(t) &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left([L_1 i_{11}^2 + L_2 i_{21}^2 + 2L_m i_{11} i_{21}] U_1^2 \right), \\ \tilde{W}_{22L}(t) &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left([L_1 i_{12}^2 + L_2 i_{22}^2 + 2L_m i_{12} i_{22}] U_2^2 \right) \end{aligned} \quad (7.60)$$

– колеблющиеся энергии магнитного поля, запасаемые первым и вторым контуром в отдельности;

$$\tilde{W}_{12L}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left([L_1 i_{11} i_{12} + L_2 i_{21} i_{22} + L_m (i_{11} i_{22} + i_{12} i_{21})] U_1 U_2 \right) \quad (7.61)$$

– колеблющаяся энергия магнитного поля, запасаемая первым и вторым контуром совместно.

Из уравнений (7.39)–(7.40) находим коэффициенты

$$\begin{aligned} i_{11} &= \frac{i L_2 / \omega}{L_1 L_2 - L_m^2}, & i_{12} &= \frac{-i L_m / \omega}{L_1 L_2 - L_m^2}, \\ i_{21} &= \frac{-i L_m / \omega}{L_1 L_2 - L_m^2}, & i_{22} &= \frac{i L_1 / \omega}{L_1 L_2 - L_m^2}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Подставляя (7.62) в (7.61), получаем

$$\tilde{W}_{12L}(t) = \frac{L_m}{2\omega^2 (L_1 L_2 - L_m^2)} \operatorname{Re} (U_1 U_2). \quad (7.63)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re} (U_1 U_2) = |U_1| |U_2| \cos (2\omega t - \varphi_1 - \varphi_2),$$

из формул (7.53) и (7.63) находим амплитуды* колеблющихся энергий электрического и магнитного поля, запасаемых контурами совместно:

$$\dot{W}_{12C} = -\frac{1}{2} C_m |U_1| |U_2|, \quad \dot{W}_{12L} = \frac{L_m}{2\omega^2 (L_1 L_2 - L_m^2)} |U_1| |U_2|. \quad (7.64)$$

* Амплитуды обеих колеблющихся энергий допускают совместное изменение их знаков, так как амплитудой синусоиды $\operatorname{Re}(U_1 U_2)$ можно считать как $|U_1 U_2|$, так и $-|U_1 U_2|$.

Теперь подставим (7.62) в (7.58). Получаем

$$\bar{W}_{11L} = \frac{L_2}{4\omega^2(L_1L_2 - L_m^2)} |U_1|^2, \quad \bar{W}_{22L} = \frac{L_1}{4\omega^2(L_1L_2 - L_m^2)} |U_2|^2. \quad (7.65)$$

Очевидно, что усредненная энергия электрического поля \bar{W}_{12C} , запасаемая контурами совместно, есть энергия емкостной связи контуров, а усредненная энергия магнитного поля \bar{W}_{12L} есть энергия индуктивной связи контуров.

Можно предположить, что коэффициенты связи k_C и k_L пропорциональны энергиям \bar{W}_{12C} и \bar{W}_{12L} . Подобное предположение уже делалось при выводе формул (7.37), где оно достаточно хорошо оправдалось. Однако это не вполне верно. Действительно, если бы коэффициенты k_C и k_L были пропорциональны усредненным энергиям \bar{W}_{12C} и \bar{W}_{12L} , то на резонансной частоте $\omega = \omega_2$ эти коэффициенты, согласно формулам (7.53), (7.63), (7.45) и (7.39)–(7.40), обращались бы в нуль, а не принимали значения, выражаемые формулами (7.22) и (7.23). Поэтому будем искать взаимосвязь коэффициентов k_C и k_L не с усредненными энергиями \bar{W}_{12C} и \bar{W}_{12L} , а с амплитудами \dot{W}_{12C} и \dot{W}_{12L} колеблющихся энергий, которые не обнуляются на резонансной частоте.

Используя формулы (7.50), (7.64), (7.65), приходим к равенствам

$$\frac{\dot{W}_{12C}}{\sqrt{(\bar{W}_{11L} + \bar{W}_{11C})(\bar{W}_{22L} + \bar{W}_{22C})}} = \frac{-C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \times \frac{2}{\sqrt{(1 + \omega_1^2 \omega^{-2})(1 + \omega_2^2 \omega^{-2})}}, \quad (7.66)$$

$$\frac{\dot{W}_{12L}}{\sqrt{(\bar{W}_{11L} + \bar{W}_{11C})(\bar{W}_{22L} + \bar{W}_{22C})}} = \frac{L_m}{\sqrt{L_1L_2}} \frac{2}{\sqrt{(1 + \omega_1^{-2} \omega^2)(1 + \omega_2^{-2} \omega^2)}}. \quad (7.67)$$

Видно, что при выполнении условий двойного резонанса $\omega = \omega_1 = \omega_2$ правые стороны равенств (7.66) и (7.67) совпадают соответственно с правыми сторонами формул (7.22) и (7.23). Поэтому коэффициенты индуктивной и емкостной связи любых резонаторов СВЧ и контуров определяем формулами

$$k_L = \frac{\dot{W}_{12L}}{\sqrt{(\bar{W}_{11L} + \bar{W}_{11C})(\bar{W}_{22L} + \bar{W}_{22C})}}, \quad (7.68)$$

$$k_C = \frac{\dot{W}_{12C}}{\sqrt{(\bar{W}_{11L} + \bar{W}_{11C})(\bar{W}_{22L} + \bar{W}_{22C})}}. \quad (7.69)$$

Из этих определений, в частности, следует, что коэффициенты k_L и k_C для контуров с внутренней индуктивной и внешней емкостной связью могут быть вычислены на произвольной частоте ω по формулам

$$k_L = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} \frac{2}{\sqrt{(1 + \omega^2 \omega_1^{-2})(1 + \omega^2 \omega_2^{-2})}}, \quad (7.70)$$

$$k_C = \frac{-C_m}{\sqrt{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}} \frac{2}{\sqrt{(1 + \omega_1^2 \omega^{-2})(1 + \omega_2^2 \omega^{-2})}}. \quad (7.71)$$

Видно, что при $L_m > 0$ коэффициент k_L всегда положителен. Он убывает с ростом частоты ω . Напротив, коэффициент k_C всегда отрицателен и возрастает по модулю с ростом частоты. Поэтому всегда существует частота взаимной компенсации индуктивной и емкостной связи ω_z , на которой сумма $k_L + k_C$ обращается в нуль, а вместе с ней, согласно (7.24), обращается в нуль и коэффициент k . Не трудно проверить, что частота ω_z строго совпадает с частотой нуля коэффициента передачи напряжения ω_p , значение которой задается формулой (7.43). В зависимости от величины отношения L_m/C_m частота ω_z может быть как выше, так и ниже частот ω_1 и ω_2 .

Таким образом, согласно формулам (7.68)–(7.69) коэффициенты индуктивной связи k_L и емкостной связи k_C есть отношения амплитуд колеблющейся части соответственно магнитной и электрической энергии, запасаемой резонаторами совместно, к среднегеометрической величине усредненных по времени полных энергий, запасаемых каждым резонатором в отдельности. Зная коэффициенты k_L и k_C , по формуле сложения (7.24) можно вычислить коэффициент связи k .

7.6. Энергия связанных МПР

Рассмотрим два параллельных микрополосковых резонатора. Ось координат z направим параллельно резонаторам. В общем случае погонные емкости и индуктивности проводников будут функциями от z . Пусть вход первого резонатора расположен в точке z_1 , а вход второго – в точке z_2 . Будем полагать, что напряжения на проводниках в этих точках принимают значения

$$u_1(z_1) = U_1, \quad u_2(z_2) = U_2. \quad (7.72)$$

Запишем усредненную электрическую и магнитную энергию поля СВЧ связанных резонаторов

$$\bar{W}_C = \frac{1}{4} \int (C_1 + C_m) |u_1|^2 dz + \frac{1}{4} \int (C_2 + C_m) |u_2|^2 dz - \frac{1}{2} \int C_m \operatorname{Re}(u_1^* u_2) dz, \quad (7.73)$$

$$\bar{W}_L = \frac{1}{4} \int L_1 |i_1|^2 dz + \frac{1}{4} \int L_2 |i_2|^2 dz + \frac{1}{2} \int L_m \operatorname{Re}(i_1^* i_2) dz, \quad (7.74)$$

где интегрирование производится по области существования токов и напряжений.

Прежде чем выделять в выражениях (7.73) и (7.74) энергии, запасаемые каждым резонатором в отдельности, и энергии, запасаемые резонаторами совместно, преобразуем формулу (7.74) исходя из следующего. В режиме бегущей волны напряжение на любом из проводников связанных линий пропорционально определенной линейной комбинации токов на обоих проводниках. Поэтому напряжениям u_1 и u_2 , согласно телеграфным уравнениям (2.3), можно сопоставить некие сопряженные токи j_1 и j_2 , которые связаны с токами на проводниках i_1 и i_2 , унитарным преобразованием

$$\begin{aligned} i_1 &= [j_1 - (L_m / L_1) j_2] / \sqrt{1 - L_m^2 / (L_1 L_2)}, \\ i_2 &= [-(L_m / L_2) j_1 + j_2] / \sqrt{1 - L_m^2 / (L_1 L_2)}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Выражение (7.74) после подстановки в него формул (7.75) принимает вид

$$\bar{W}_L = \frac{1}{4} \int L_1 |j_1|^2 dz + \frac{1}{4} \int L_2 |j_2|^2 dz - \frac{1}{2} \int L_m \operatorname{Re}(j_1^* j_2) dz. \quad (7.76)$$

Напряжения и токи на проводниках, в силу линейности задачи о возбуждении колебаний в связанных резонаторах, можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}(z)U_1 + u_{12}(z)U_2, & j_1 &= j_{11}(z)U_1 + j_{12}(z)U_2, \\ u_2 &= u_{21}(z)U_1 + u_{22}(z)U_2, & j_2 &= j_{21}(z)U_1 + j_{22}(z)U_2. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Из (7.72) следует, что

$$u_{11}(z_1) = 1, \quad u_{12}(z_1) = 0, \quad u_{21}(z_2) = 0, \quad u_{22}(z_2) = 1. \quad (7.78)$$

Подставляя (7.77) в (7.73) и (7.76), получаем

$$\bar{W}_C = \bar{W}_{11C} + \bar{W}_{22C} + \bar{W}_{12C},$$

$$\bar{W}_L = \bar{W}_{11L} + \bar{W}_{22L} + \bar{W}_{12L},$$

где искомые энергии

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{11C} &= \frac{1}{4}|U_1|^2 \operatorname{Re} \int [(C_1 + C_m)|u_{11}|^2 + (C_2 + C_m)|u_{21}|^2 - 2C_m u_{11}^* u_{21}] dz, \\
\bar{W}_{22C} &= \frac{1}{4}|U_2|^2 \operatorname{Re} \int [(C_2 + C_m)|u_{22}|^2 + (C_1 + C_m)|u_{12}|^2 - 2C_m u_{12}^* u_{22}] dz, \\
\bar{W}_{12C} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_1^* U_2 \int [(C_1 + C_m)u_{11}^* u_{12} + (C_2 + C_m)u_{21}^* u_{22} - C_m(u_{11}^* u_{22} + u_{21}^* u_{12})] dz), \\
\bar{W}_{11L} &= \frac{1}{4}|U_1|^2 \operatorname{Re} \int [L_1|j_{11}|^2 + L_2|j_{21}|^2 - 2L_m j_{11}^* j_{21}] dz, \\
\bar{W}_{22L} &= \frac{1}{4}|U_2|^2 \operatorname{Re} \int [L_1|j_{12}|^2 + L_2|j_{22}|^2 - 2L_m j_{12}^* j_{22}] dz, \\
\bar{W}_{12L} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_1^* U_2 \int [L_1 j_{11}^* j_{12} + L_2 j_{21}^* j_{22} - L_m(j_{11}^* j_{22} + j_{21}^* j_{12})] dz).
\end{aligned} \tag{7.79}$$

Усредненным энергиям \bar{W}_{12C} , \bar{W}_{12L} соответствуют колеблющиеся энергии

$$\tilde{W}_{12C} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_1 U_2 \int [(C_1 + C_m)u_{11}u_{12} + (C_2 + C_m)u_{21}u_{22} - C_m(u_{11}u_{22} + u_{21}u_{12})] dz), \tag{7.81}$$

$$\tilde{W}_{12L} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_1 U_2 \int [L_1 j_{11}j_{12} + L_2 j_{21}j_{22} - L_m(j_{11}j_{22} + j_{21}j_{12})] dz). \tag{7.82}$$

Для нахождения функций $u_{ij}(z)$ и $j_{ij}(z)$ воспользуемся линейными свойствами связанных колебаний резонаторов. Согласно (7.77) имеем

$$\begin{aligned}
u_{11}(z) &= u_1(z)|_{U_1=1, U_2=0}, & j_{11}(z) &= j_1(z)|_{U_1=1, U_2=0}, \\
u_{12}(z) &= u_1(z)|_{U_1=0, U_2=1}, & j_{12}(z) &= j_1(z)|_{U_1=0, U_2=1}, \\
u_{21}(z) &= u_2(z)|_{U_1=1, U_2=0}, & j_{21}(z) &= j_2(z)|_{U_1=1, U_2=0}, \\
u_{22}(z) &= u_2(z)|_{U_1=0, U_2=1}, & j_{22}(z) &= j_2(z)|_{U_1=0, U_2=1}.
\end{aligned} \tag{7.83}$$

Таким образом, вычислив распределение токов и напряжений на проводниках связанных резонаторов для двух способов их возбуждения ($U_1=1$, $U_2=0$ и $U_1=0$, $U_2=1$), можно по формулам (7.79)–(7.83) рассчитать все энергии, а затем по формулам (7.68)–(7.69) вычислить коэффициенты связи.

7.7. Приближение усредненных волн

Строгий расчет энергий (7.79)–(7.82) с использованием точных функций (7.77) достаточно сложен и требует большого объема кропотливых вычислений. Однако расчет можно значительно упростить и получить относительно компактные формулы, описывающие все основные свойства коэффициентов связи, если использовать приближение усредненных волн.

В приближении усредненных волн все связанные волны в резонаторах аппроксимируют некими усредненными волнами, имеющими отличные от нуля напряжения только на проводнике одного из резонаторов.

Электрические параметры усредненных волн определим следующим образом. Начнем со случая, когда напряжение на входе первого резонатора $U_1 \neq 0$, а напряжение на входе второго резонатора $U_2 = 0$. Тогда на проводнике первого резонатора $u_1(z) \neq 0$ и $j_1(z) \neq 0$. Поэтому следует считать, что на проводнике второго резонатора $u_2(z) = 0$ и $j_2(z) = 0$.

Последние два равенства эквивалентны тому, что проводник второго резонатора заземлен по всей его длине. Отсюда следует, что погонная емкость проводника первого резонатора относительно земли вместе с заземленным проводником второго резонатора равна $C_1 + C_m$, а погонная индуктивность равна L_1 . Этот же результат получается и из формул (7.73), (7.76) после обнуления напряжения и тока на проводнике второго резонатора.

Подставляя в (2.17), (2.18) значения погонных параметров, получаем относительную диэлектрическую проницаемость и волновое сопротивление для усредненной волны в первом резонаторе:*

$$\varepsilon_{1a} = c^2 L_1 (C_1 + C_m), \quad Z_{1a} = \sqrt{L_1 / (C_1 + C_m)}. \quad (7.84)$$

Аналогичным образом можно получить электрические параметры для усредненной волны во втором резонаторе. Они имеют вид

$$\varepsilon_{2a} = c^2 L_2 (C_2 + C_m), \quad Z_{2a} = \sqrt{L_2 / (C_2 + C_m)}. \quad (7.85)$$

Распространение усредненных волн лишь в одном из резонаторов означает, что

$$\begin{aligned} u_{12}(z) &= 0, & j_{12}(z) &= 0, \\ u_{21}(z) &= 0, & j_{21}(z) &= 0. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Подставляя (7.86) в (7.79)–(7.82), получаем выражения для энергий резонаторов в приближении усредненных волн:

$$\bar{W}_{11C} = \frac{1}{4} |U_1|^2 \int (C_1 + C_m) |u_{11}|^2 dz, \quad \bar{W}_{22C} = \frac{1}{4} |U_2|^2 \int (C_2 + C_m) |u_{22}|^2 dz, \quad (7.87)$$

$$\bar{W}_{11L} = \frac{1}{4} |U_1|^2 \int L_1 |j_{11}|^2 dz, \quad \bar{W}_{22L} = \frac{1}{4} |U_2|^2 \operatorname{Re} \int L_2 |j_{22}|^2 dz, \quad (7.88)$$

* Индекс a у параметров ε_{1a} и Z_{1a} от англ. *average* – усредненный.

$$\tilde{W}_{12C} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(U_1 U_2 \int C_m u_{11} u_{22} dz \right), \quad (7.89)$$

$$\tilde{W}_{12L} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(U_1 U_2 \int L_m j_{11} j_{22} dz \right). \quad (7.90)$$

7.8. Симметричная пара регулярных МПР. Произвольная частота

Рассмотрим симметричную пару связанных микрополосковых резонаторов. Начнем со случая, когда резонаторы взаимодействуют по всей длине. Такой случай допускает два симметричных способа кондуктивного подключения резонаторов – смежный и диагональный.

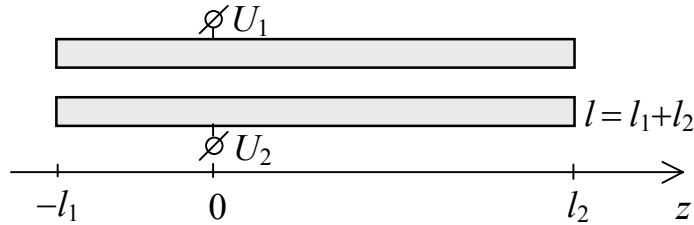


Рис. 7.19. Смежное кондуктивное подключение МПР

Смежный способ кондуктивного подключения резонаторов изображен на рис. 7.19. В приближении усредненных волн распределение напряжений и токов вдоль полосковых проводников имеет вид

$$u_k(z) = \begin{cases} U_k \frac{\cos[\theta_{1a}(z+l_1)/l_1]}{\cos\theta_{1a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq 0, \\ U_k \frac{\cos[\theta_{2a}(z-l_2)/l_2]}{\cos\theta_{2a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_2, \end{cases} \quad (7.91)$$

$$j_k(z) = \begin{cases} iU_k \frac{\sin[\theta_{1a}(z+l_1)/l_1]}{Z_a \cos\theta_{1a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq 0, \\ iU_k \frac{\sin[\theta_{2a}(z-l_2)/l_2]}{Z_a \cos\theta_{2a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_2, \end{cases}$$

где k – номер резонатора, принимающий значения 1 и 2; θ_{1a} , θ_{2a} – электрические длины отрезков l_1 и l_2 для усредненной волны, определяемые формулами

$$\theta_{1a} = \omega \sqrt{\varepsilon_a} l_1 / c, \quad \theta_{2a} = \omega \sqrt{\varepsilon_a} l_2 / c. \quad (7.92)$$

Здесь эффективная диэлектрическая проницаемость ε_a для усредненной волны определена формулой (7.84). Отсюда следует, что она может быть вычислена по формуле

$$\varepsilon_a = \frac{1}{4}(\sqrt{\varepsilon_e} Z_e + \sqrt{\varepsilon_o} Z_o) (\sqrt{\varepsilon_e}/Z_e + \sqrt{\varepsilon_o}/Z_o). \quad (7.93)$$

Подставляя (7.91) в (7.83), находим функции

$$u_{11}(z) = u_{22}(z) = \begin{cases} \frac{\cos[\theta_{1a}(z+l_1)/l_1]}{\cos\theta_{1a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq 0 \\ \frac{\cos[\theta_{2a}(z-l_2)/l_2]}{\cos\theta_{2a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_2, \end{cases} \quad (7.94)$$

$$j_{11}(z) = j_{22}(z) = \begin{cases} i \frac{\sin[\theta_{1a}(z+l_1)/l_1]}{Z_a \cos\theta_{1a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq 0 \\ i \frac{\sin[\theta_{2a}(z-l_2)/l_2]}{Z_a \cos\theta_{2a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_2. \end{cases} \quad (7.95)$$

Интегрируя выражения (7.87)–(7.90) после подстановки в них функций (7.94) и (7.95), находим энергии резонаторов:

$$\bar{W}_{11C} = \frac{1}{8}|U_1|^2 (C_1 + C_m) \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} + \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} + \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right), \quad (7.96)$$

$$\bar{W}_{22C} = \frac{1}{8}|U_2|^2 (C_1 + C_m) \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} + \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} + \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right),$$

$$\bar{W}_{11L} = \frac{1}{8}|U_1|^2 \frac{L_1}{Z_a^2} \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} - \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} - \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right), \quad (7.97)$$

$$\bar{W}_{22L} = \frac{1}{8}|U_2|^2 \frac{L_1}{Z_a^2} \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} - \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} - \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right),$$

$$\dot{W}_{12C} = -\frac{1}{4}|U_1||U_2| C_m \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} + \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} + \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right), \quad (7.98)$$

$$\dot{W}_{12L} = \frac{1}{4}|U_1||U_2| \frac{L_m}{Z_a^2} \left(\frac{l_1}{\cos^2 \theta_{1a}} - \frac{l_1 \operatorname{tg} \theta_{1a}}{\theta_{1a}} + \frac{l_2}{\cos^2 \theta_{2a}} - \frac{l_2 \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{2a}} \right). \quad (7.99)$$

Подставляя выражения (7.96)–(7.99) в определения (7.68)–(7.69) и учитывая (7.84), находим частотно-зависимые коэффициенты связи резонаторов:

$$k_L = K_L \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \theta_{1a} + \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{1a} / \cos^2 \theta_{1a} + \theta_{2a} / \cos^2 \theta_{2a}} \right), \quad (7.100)$$

$$k_C = -K_C \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_{1a} + \operatorname{tg} \theta_{2a}}{\theta_{1a} / \cos^2 \theta_{1a} + \theta_{2a} / \cos^2 \theta_{2a}} \right), \quad (7.101)$$

где K_L и K_C – коэффициенты индуктивной и емкостной связи связанных микрополосковых линий, которые могут быть вычислены по формулам (7.28).

Видно, что на резонансной частоте резонаторов, то есть когда $\theta_{1a} + \theta_{2a} = \pi$, формулы (7.100), (7.101) точно совпадают с известными формулами (7.30).

На рис. 7.20 представлены частотные зависимости коэффициентов связи резонаторов. Здесь же для сравнения приведена частотная зависимость коэффициента прохождения мощности СВЧ $K_{\text{пр}}$. В рассматриваемом случае она описывается формулой

$$K_{\text{пр}} = \frac{(P_e - P_o)^2}{(1 + P_e^2)(1 + P_o^2)}, \quad (7.102)$$

где

$$P_e = (\operatorname{tg} \theta_{1e} + \operatorname{tg} \theta_{2e})Z/Z_e, \quad P_o = (\operatorname{tg} \theta_{1o} + \operatorname{tg} \theta_{2o})Z/Z_o.$$

На рис. 7.20 видно, что при полной длине области связи резонаторов всегда $k_L \geq 0$, а $k_C < 0$. В квазистатическом пределе $k_C = -K_C$, а $k_L = 0$. Последнее равенство есть следствие отсутствия токов на проводниках.

На вставке рис. 7.20 видно и то, что коэффициент связи k и коэффициент прохождения мощности СВЧ $K_{\text{пр}}$ обращаются в нуль на одной и той же частоте. Такое совпадение не случайно. Оно подтверждает правильность частотной зависимости коэффициента связи k .

Частота нуля коэффициента $K_{\text{пр}}$ есть частота нуля полюса затухания ω_p . Ее наличие есть следствие взаимной компенсации индуктивного и емкостного взаимодействий резонаторов. К сожалению, частота нуля коэффициента связи ω_z совпадает с ω_p лишь приблизительно. Отсутствие строгого совпадения связано с использованием приближения усредненных волн.

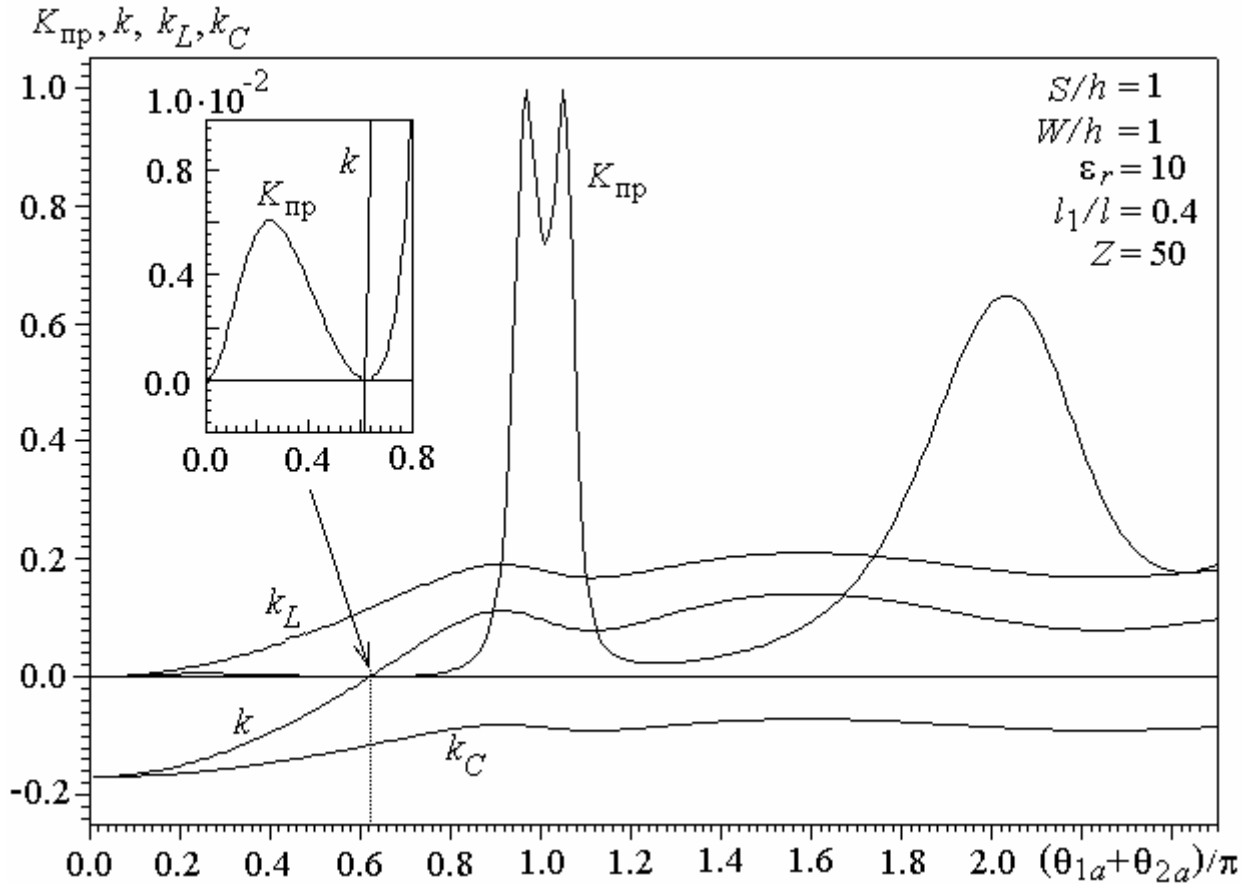


Рис. 7.20. Частотные зависимости коэффициентов связи и коэффициента прохождения мощности СВЧ.

Рассмотрим случай диагонального кондуктивного подключения микрополосковых резонаторов, взаимодействующих по всей длине (рис. 7.21).

При диагональном подключении резонаторов распределение напряжений и токов на первом проводнике ($k=1$) по-прежнему описывается формулами (7.91). На втором проводнике ($k=2$) эти функции имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_2(z) &= \begin{cases} U_2 \frac{\cos[\theta_{2a}(z+l_1)/l_2]}{\cos\theta_{2a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq l_2 - l_1, \\ U_2 \frac{\cos[\theta_{1a}(z-l_2)/l_1]}{\cos\theta_{1a}} & \text{при } l_2 - l_1 \leq z \leq l_2, \end{cases} \\
 j_2(z) &= \begin{cases} iU_2 \frac{\sin[\theta_{2a}(z+l_1)/l_2]}{Z_a \cos\theta_{2a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq l_2 - l_1, \\ iU_2 \frac{\sin[\theta_{1a}(z-l_2)/l_1]}{Z_a \cos\theta_{1a}} & \text{при } l_2 - l_1 \leq z \leq l_2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.103}$$

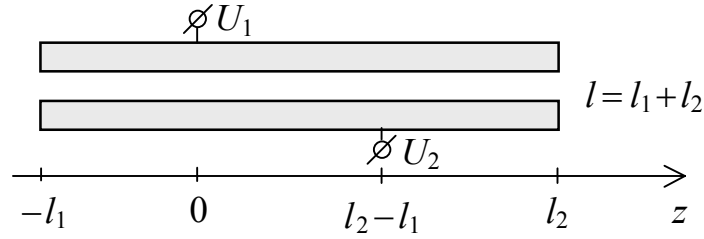


Рис. 7.21. Диагональное кондуктивное подключение МПР

Подставляя (7.103) в (7.83), находим функции

$$u_{22}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\theta_{2a}(x+l_1)/l_2]}{\cos\theta_{2a}} & \text{при } -l_1 \leq x \leq l_2 - l_1, \\ \frac{\cos[\theta_{1a}(x-l_2)/l_1]}{\cos\theta_{1a}} & \text{при } l_2 - l_1 \leq x \leq l_2, \end{cases} \quad (7.104)$$

$$j_{22}(z) = \begin{cases} i \frac{\sin[\theta_{2a}(z+l_1)/l_2]}{Z_a \cos\theta_{2a}} & \text{при } -l_1 \leq z \leq l_2 - l_1, \\ i \frac{\sin[\theta_{1a}(z-l_2)/l_1]}{Z_a \cos\theta_{1a}} & \text{при } l_2 - l_1 \leq z \leq l_2. \end{cases} \quad (7.105)$$

Остальные же функции, $u_{11}(z)$ и $j_{11}(z)$, по-прежнему выражаются формулами (7.94) и (7.95).

Подставим выражения (7.104)–(7.105) и (7.94)–(7.95) в формулы (7.87)–(7.90). После выполнения интегрирования получим, что усредненные энергии \bar{W}_{11C} , \bar{W}_{22C} , \bar{W}_{11L} , \bar{W}_{22L} по-прежнему выражаются формулами (7.96) и (7.97), а амплитуды колеблющихся энергий \check{W}_{12C} , \check{W}_{12L} принимают вид

$$\check{W}_{12C} = \frac{C_m}{2} |U_1| |U_2| \left[\frac{l_1}{\cos\theta_{2a}} \left(\frac{1}{\cos\theta_{1a}} + \frac{\sin\theta_{1a}}{\theta_{1a}} \right) + \frac{l_2 - l_1}{2\cos^2\theta_{2a}} \left(\cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{\sin(\theta_{2a} - \theta_{1a})}{\theta_{2a} - \theta_{1a}} \right) \right], \quad (7.106)$$

$$\check{W}_{12L} = \frac{-L_m}{2Z_a^2} |U_1| |U_2| \left[\frac{l_1}{\cos\theta_{2a}} \left(\frac{1}{\cos\theta_{1a}} - \frac{\sin\theta_{1a}}{\theta_{1a}} \right) + \frac{l_2 - l_1}{2\cos^2\theta_{2a}} \left(\cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - \frac{\sin(\theta_{2a} - \theta_{1a})}{\theta_{2a} - \theta_{1a}} \right) \right]. \quad (7.107)$$

Подставляя выражения (7.96)–(7.97) и (7.106)–(7.107) в определения (7.68)–(7.69), получаем формулы для частотно-зависимых коэффициентов индуктивной и емкостной связи микрополосковых резонаторов с диагональным кондуктивным подключением

$$k_L = K_L \frac{\frac{\sin 2\theta_{1a} - 2\theta_{1a}}{\cos \theta_{1a} \cos \theta_{2a}} + \frac{\sin (\theta_{2a} - \theta_{1a}) - (\theta_{2a} - \theta_{1a}) \cos (\theta_{1a} + \theta_{2a})}{\cos^2 \theta_{2a}}}{\frac{\theta_{1a}}{\cos^2 \theta_{1a}} + \frac{\theta_{2a}}{\cos^2 \theta_{2a}}}, \quad (7.108)$$

$$k_C = K_C \frac{\frac{\sin 2\theta_{1a} + 2\theta_{1a}}{\cos \theta_{1a} \cos \theta_{2a}} + \frac{\sin (\theta_{2a} - \theta_{1a}) + (\theta_{2a} - \theta_{1a}) \cos (\theta_{1a} + \theta_{2a})}{\cos^2 \theta_{2a}}}{\frac{\theta_{1a}}{\cos^2 \theta_{1a}} + \frac{\theta_{2a}}{\cos^2 \theta_{2a}}}. \quad (7.109)$$

На рис. 7.22 по формулам (7.23) и (7.24) построены частотные зависимости коэффициентов связи. Здесь же для сравнения приведена АЧХ этой же пары связанных МПР. Видно, что при диагональном подключении резонаторов все коэффициенты связи являются знакопеременными функциями частоты. По-прежнему наблюдается совпадение частот нулей коэффициента k и частот полюсов затухания. На рисунке две такие частоты выделены вертикальными пунктирными линиями. В отличие от смежного кондуктивного подключения эти частоты расположены выше резонансной частоты полуволновых колебаний ($F_0 = 1$ ГГц), то есть выше первой полосы пропускания.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия двух одинаковых регулярных МПР с диагональным кондуктивным подключением при произвольной длине области связи. Такие резонаторы смещены один относительно другого вдоль оси z на длину l_s , как показано на рис. 7.23. Для упрощения вычислений будем предполагать, что волны на одиночных и связанных проводниках по-прежнему описываются электрическими параметрами ε_a и Z_a .

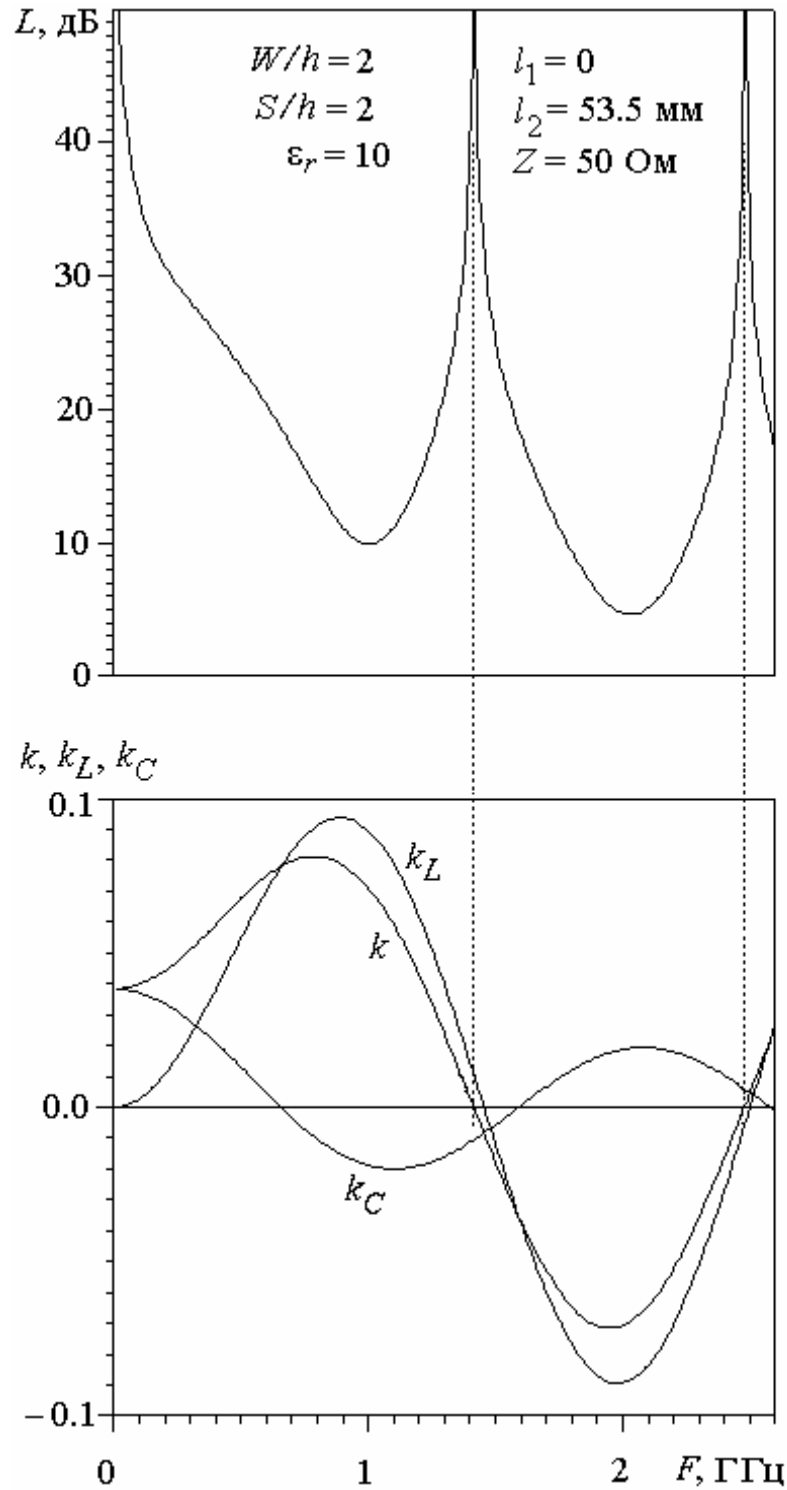


Рис. 7.22. Частотные зависимости затухания и коэффициентов связи МПР при диагональном подключении и максимальной длине области связи

Записывая токи и напряжения на проводниках в приближении усредненных волн и вычисляя соответствующие энергии, по формулам (7.68), (7.69) получаем следующие выражения для коэффициентов связи:

$$k_L = \begin{cases} \frac{K_L}{\Delta} \left[\frac{\sin(2\theta_1 + \theta_s) - \sin\theta_s - 2\theta_1 \cos\theta_s}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta_2 + \theta_1 + \theta_s) - \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_2} \right] & \text{при } l_2 \geq l_s + l_1, \\ \frac{K_L}{\Delta} \left[\frac{\sin(2\theta_2 - \theta_s) - \sin\theta_s - 2(\theta_2 - \theta_s) \cos\theta_s}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} + \frac{(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta - \theta_s) - \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_1} \right] & \text{при } l_s \leq l_2 \leq l_s + l_1, \\ \frac{K_L}{\Delta} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_1 - \theta_s) - (\theta_2 + \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta_2 + \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_1} & \text{при } l_2 \leq l_s, \end{cases} \quad (7.110)$$

$$k_C = \begin{cases} \frac{K_C}{\Delta} \left[\frac{\sin(2\theta_1 + \theta_s) - \sin\theta_s + 2\theta_1 \cos\theta_s}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} + \frac{(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta_2 + \theta_1 + \theta_s) + \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_2} \right] & \text{при } l_2 \geq l_s + l_1, \\ \frac{K_C}{\Delta} \left[\frac{\sin(2\theta_2 - \theta_s) - \sin\theta_s + 2(\theta_2 - \theta_s) \cos\theta_s}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta_2 + \theta_1 - \theta_s) + \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_1} \right] & \text{при } l_s \leq l_2 \leq l_s + l_1, \\ \frac{K_C}{\Delta} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_1 - \theta_s) + (\theta_2 + \theta_1 - \theta_s) \cos(\theta_2 + \theta_1 - \theta_s)}{\cos^2\theta_1} & \text{при } l_2 \leq l_s, \end{cases} \quad (7.111)$$

где $\Delta = \theta_1/\cos^2\theta_1 + \theta_2/\cos^2\theta_2$. Здесь для экономии места индекс a у электрических длин θ_{1a} , θ_{2a} и θ_{sa} опущен.

Легко убедиться, что на резонансной частоте, то есть при $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, формулы (7.110) и (7.111) совпадают с формулами (7.37). Это еще раз подтверждает правильность общих формул (7.68) и (7.69). При максимальной длине области связи, то есть при $l_s = 0$, формулы (7.110) и (7.111) принимают вид формул (7.108), (7.109).

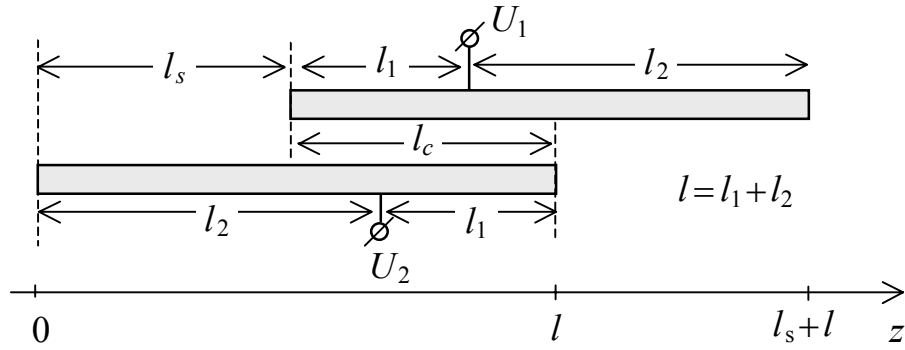


Рис. 7.23. Диагональное кондуктивное подключение МПР с произвольной длиной области связи

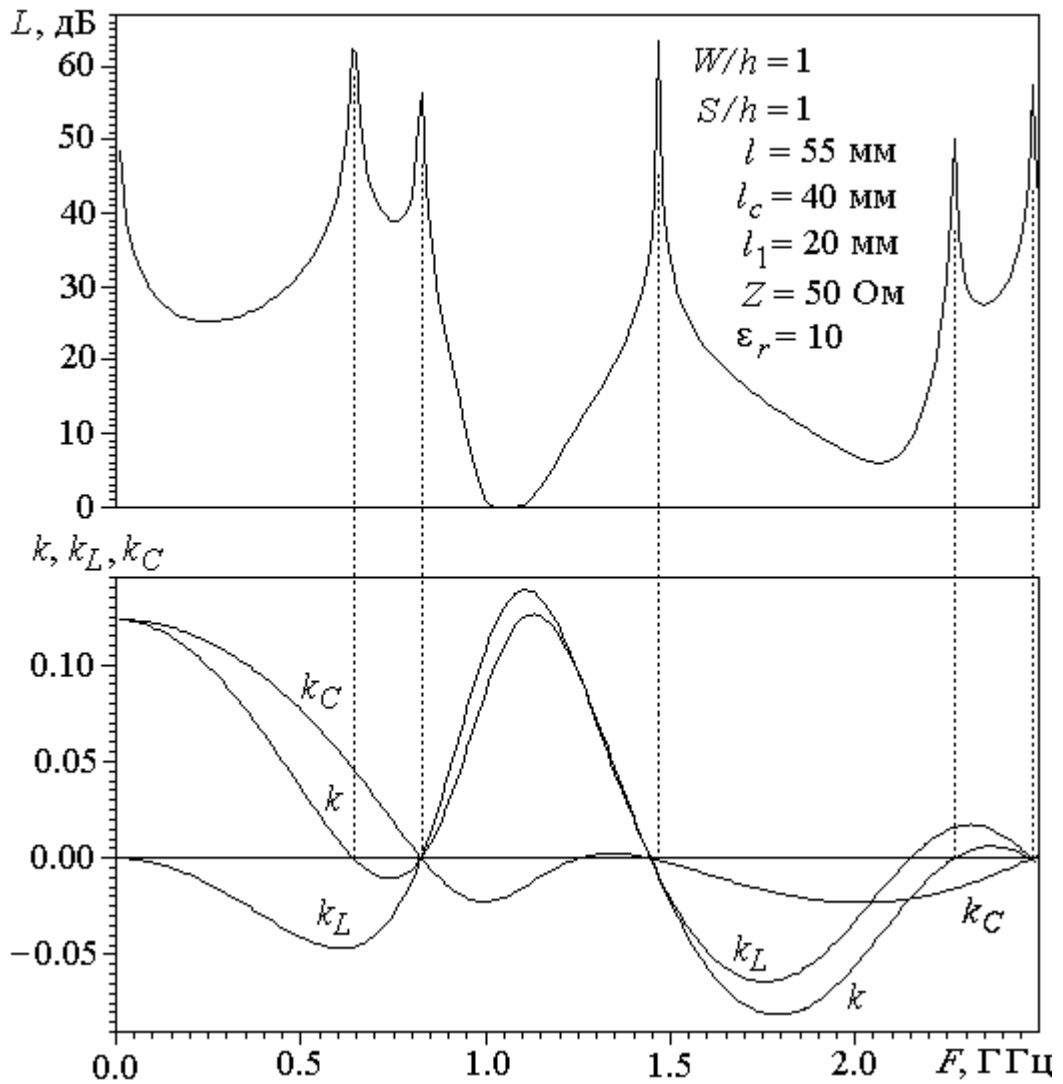


Рис. 7.24. Частотные зависимости затухания и коэффициентов связи МПР при диагональном подключении и произвольной длине области связи

На рис. 7.24 амплитудно-частотная характеристика сопоставляется с частотными зависимостями коэффициентов связи для случая, когда полюсы затухания существуют одновременно как ниже, так и выше первой полосы пропускания связанных резонаторов. По-прежнему наблюдается совпадение частот полюсов функции затухания $L(F)$ с частотами нулей коэффициента связи $k(F)$. Однако заметно, что частота третьего полюса затухания несколько выше частоты соответствующего нуля коэффициента связи. Такое небольшое расхождение частот связано с тем, что при вычислении энергий использовалось приближение усредненных волн.

В зарубежной и отечественной научно-технической литературе широко распространено ошибочное мнение о том, что асимметрия крутизны низкочастотного и высокочастотного склонов полосы пропускания микрополосковых фильтров обусловлена различием фазовых скоростей четных и нечетных волн в связанных МПЛ.

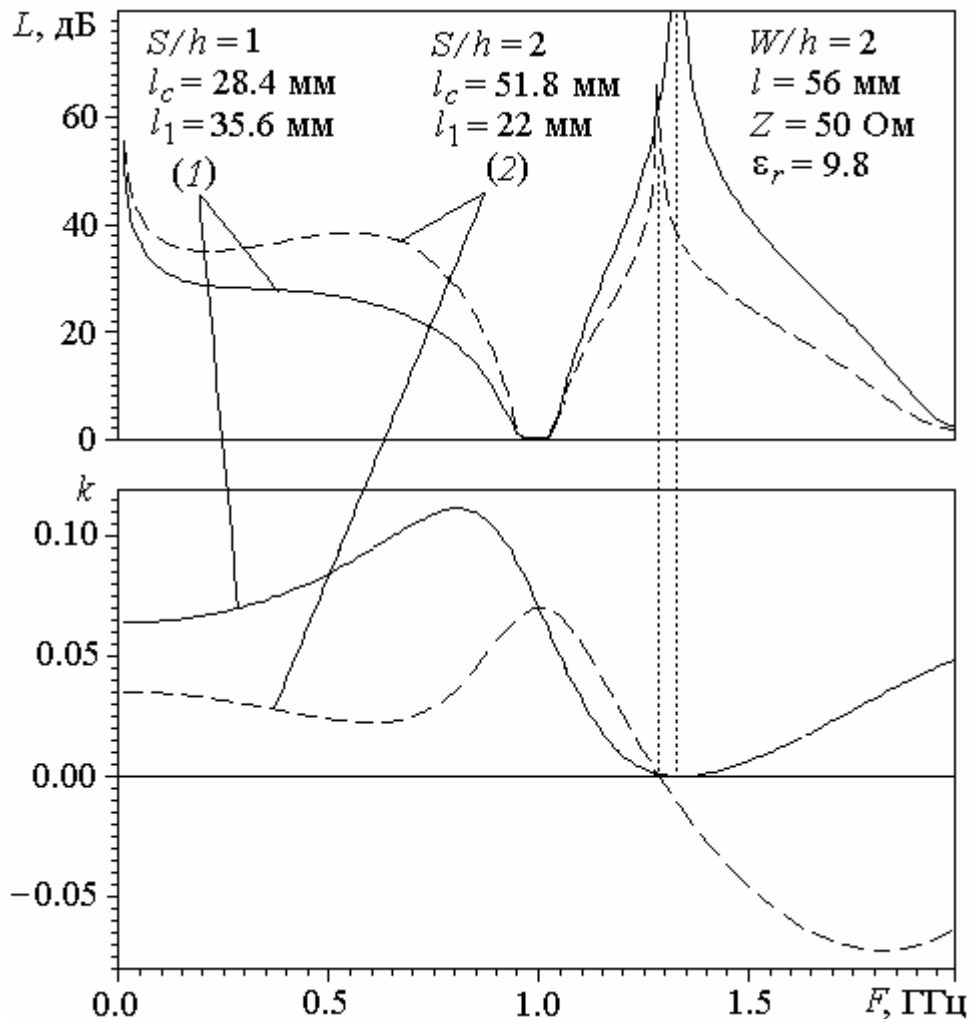


Рис. 7.25. Частотные зависимости затухания и коэффициента связи для двух двухзвенных МПЛ

Полученные формулы (7.110), (7.111) позволяют получить правильный ответ. Истинной причиной асимметрии склонов полосы пропускания является асимметрия частотной зависимости коэффициента связи $k(F)$ относительно центральной частоты пропускания F_0 . Что же касается различия фазовых скоростей, то оно является причиной асимметрии функции $k(F)$, причем только в микрополосковых фильтрах с четвертьволновыми связями.

Наиболее эффективно управлять асимметрией склонов полосы пропускания можно варьированием длины области связи [17]. Такие выводы подтверждают графики на рис. 7.25, где представлены АЧХ и частотная дисперсия коэффициентов связи для двух двухзвенных микрополосковых фильтров. Оба фильтра, (1) и (2), имеют одинаковые полосы пропускания. Их ширина составляет 10 % по уровню 3 дБ, а центральная частота $F_0 = 1$ ГГц. Отличаются фильтры длиной области связи l_c и зазором S между резонаторами.

Видно, что фильтр (1), имеющий четвертьволновую длину области связи ($l_c = l/2$), обладает асимметричной АЧХ с пологим низкочастотным склоном и крутым низкочастотным. Максимум коэффициента связи его резонаторов расположен ниже полосы пропускания. Напротив, фильтр (2), имеющий удлиненную область связи ($l_c > l/2$), обладает практически симметричными склонами полосы пропускания. Максимум коэффициента связи его резонаторов расположен уже в центре полосы пропускания.

7.9. Симметричная пара нерегулярных МПР. Резонансная частота

Рассмотрим особенности взаимодействия нерегулярных микрополосковых резонаторов, содержащих скачок ширины полоскового проводника [18]. Ограничимся рассмотрением резонансного случая. Расчет произведем для симметричной пары полуволновых МПР, связанных по всей длине (рис. 7.26).

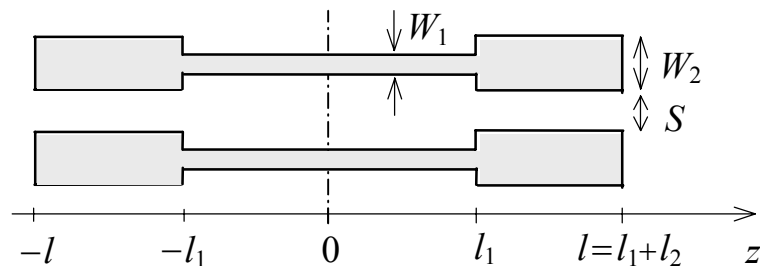


Рис. 7.26. Два нерегулярных микрополосковых резонатора

На резонансной частоте функции распределения токов и напряжений на правой половине резонаторов в приближении усредненных волн имеют вид

$$j_k(z) = \begin{cases} \frac{-i}{Z_{1a}} U_k \frac{\cos[\theta_{1a}z/l_1]}{\sin \theta_{1a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_1, \\ \frac{-i}{Z_{2a}} U_k \frac{\cos[\theta_{2a}(z-l)/l_2 + \pi/2]}{\cos \theta_{2a}} & \text{при } l_1 \leq z \leq l, \end{cases} \quad (7.112)$$

$$u_k(z) = \begin{cases} U_k \frac{\sin[\theta_{1a}z/l_1]}{\sin \theta_{1a}} & \text{при } 0 \leq z \leq l_1, \\ U_k \frac{\sin[\theta_{2a}(z-l)/l_2 + \pi/2]}{\cos \theta_{2a}} & \text{при } l_1 \leq z \leq l, \end{cases}$$

где U_k – амплитуда напряжения k -го резонатора в точке $z=l_1$; Z_{ia} и θ_{ia} – волновое сопротивление и электрическая длина i -го участка резонаторов в приближении усредненных волн ($k, i = 1, 2$). Выражения для функций токов и напряжений на левой половине резонаторов легко получить из симметрии задачи.

Из формулы (7.112) и условия непрерывности тока в точке $z=l_1$ получаем уравнение для резонансной частоты

$$\operatorname{tg} \theta_{2a} \operatorname{tg} \theta_{1a} = Z_{2a}/Z_{1a}.$$

Оно совпадает с известной формулой (6.17).

Подставляя в формулы (7.68), (7.69) выражения для энергий, вычисленные по формулам (7.87)–(7.90) с учетом функций (7.112), получаем коэффициенты индуктивной и емкостной связи нерегулярных МПР:

$$k_L = \frac{K_{L1}L_1l_1[\cos^{-2}\theta_{1a} + \theta_{1a}^{-1} \operatorname{tg} \theta_{1a}] + K_{L2}L_2l_2[\cos^{-2}\theta_{2a} - \theta_{2a}^{-1} \operatorname{tg} \theta_{2a}]}{L_1l_1 \cos^{-2}\theta_{1a} + L_2l_2 \cos^{-2}\theta_{2a}}, \quad (7.113)$$

$$k_C = -\frac{K_{C1}L_1l_1[\cos^{-2}\theta_{1a} - \theta_{1a}^{-1} \operatorname{tg} \theta_{1a}] + K_{C2}L_2l_2[\cos^{-2}\theta_{2a} + \theta_{2a}^{-1} \operatorname{tg} \theta_{2a}]}{L_1l_1 \cos^{-2}\theta_{1a} + L_2l_2 \cos^{-2}\theta_{2a}},$$

где K_{Li} , K_{Ci} – коэффициенты индуктивной и емкостной связи микрополосковых линий на i -м участке резонаторов, определяемые формулами (7.27); L_i – погонная индуктивность проводников на том же участке.

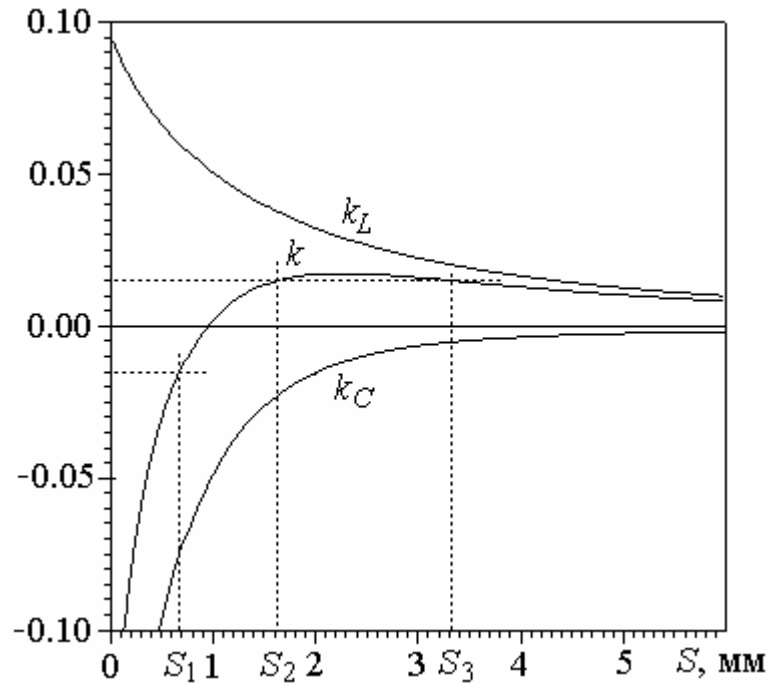


Рис. 7.27. Зависимости коэффициентов связи от зазора между нерегулярными МПР

Видно, что коэффициент k_L всегда положителен, а коэффициент k_C отрицателен. При $l_1=0$ или $l_2=0$ формулы (7.113) совпадают с формулами (7.30) для регулярных МПР.

На рис. 7.27 построены зависимости коэффициентов k , k_L и k_C от величины зазора между проводниками резонаторов. При расчете использовались электрические параметры ε_{ei} , ε_{oi} , Z_{ei} , Z_{oi} связанных МПЛ, вычисленные в квазистатическом приближении. По ним рассчитывались значения остальных требуемых параметров. Расчет производился при $h=1$ мм, $\varepsilon_r=10$, $W_1=0.5$ мм, $W_2=3$ мм, $\theta_{1a}=\theta_{2a}$. При этом отношение l_1/l изменялось в пределах 0.510–0.525.

На рис. 7.27 видно, что коэффициенты k_L и k_C являются монотонными функциями зазора S . Напротив, коэффициент k , являющийся их «суммой», может быть немонотонной функцией, обращающейся в нуль при некотором зазоре. В этой точке имеет место взаимная компенсация индуктивного и емкостного взаимодействий.

Важной особенностью функции $k(S)$ является существование аномальной области значений S , где коэффициент k возрастает по абсолютной величине с увеличением зазора S между резонаторами. Это приводит к тому, что

заданная величина $|k|$ может быть получена при трех различных значениях S . Так, на рис. 7.27 видно, что три значения зазора: $S_1=0.68$ мм, $S_2=1.52$ мм, $S_3=3.32$ мм – обеспечивают одинаковую связь между резонаторами, характеризующую $|k|=0.015$.

Проследим влияние конструктивных параметров на зависимость $k(S)$. На рис. 7.28 видно, что аномальная область, в которой $|k|$ возрастает с увеличением S , появляется только при $\epsilon_r > \epsilon'_r$. Величина ϵ'_r убывает с уменьшением отношения W_2/W_1 . Для случая, приведенного на рис. 7.28, $\epsilon'_r \approx 2$. Максимум $k(S)$ убывает до нуля при уменьшении ϵ_r до ϵ'_r . Графики на рис. 7.29 показывают, что увеличение отношения W_2/W_1 также приводит к уменьшению максимума $k(S)$.

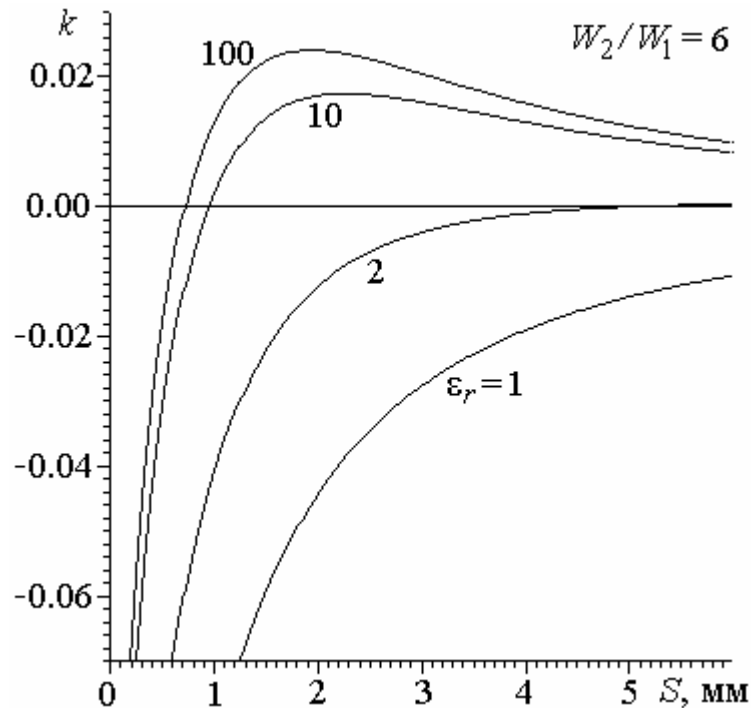


Рис. 7.28. Влияние диэлектрической проницаемости на зависимость коэффициента связи от зазора

Оценим точность приближенных формул (7.113). Для этого по формулам (7.24) и (7.113) вычислим коэффициент связи k и сравним его с точным значением, получаемым из резонансных частот ω_e и ω_o по формуле (7.20). В рассматриваемом случае эти частоты являются корнями уравнений

$$\operatorname{tg} \theta_{e2} \operatorname{tg} \theta_{e1} = Z_{e2}/Z_{e1}, \quad \operatorname{tg} \theta_{o2} \operatorname{tg} \theta_{o1} = Z_{o2}/Z_{o1}. \quad (7.114)$$

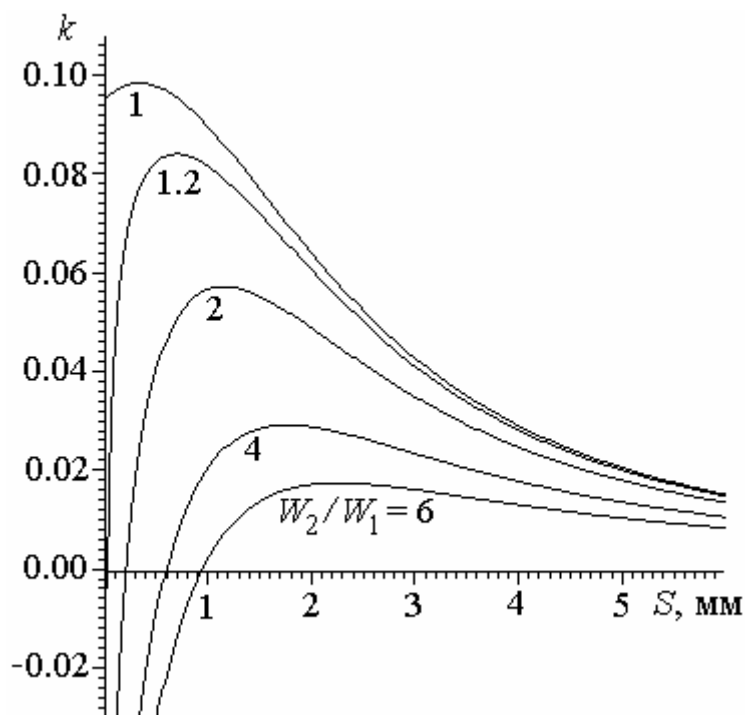


Рис. 7.29. Влияние скачка ширины проводников на зависимость коэффициента связи от зазора

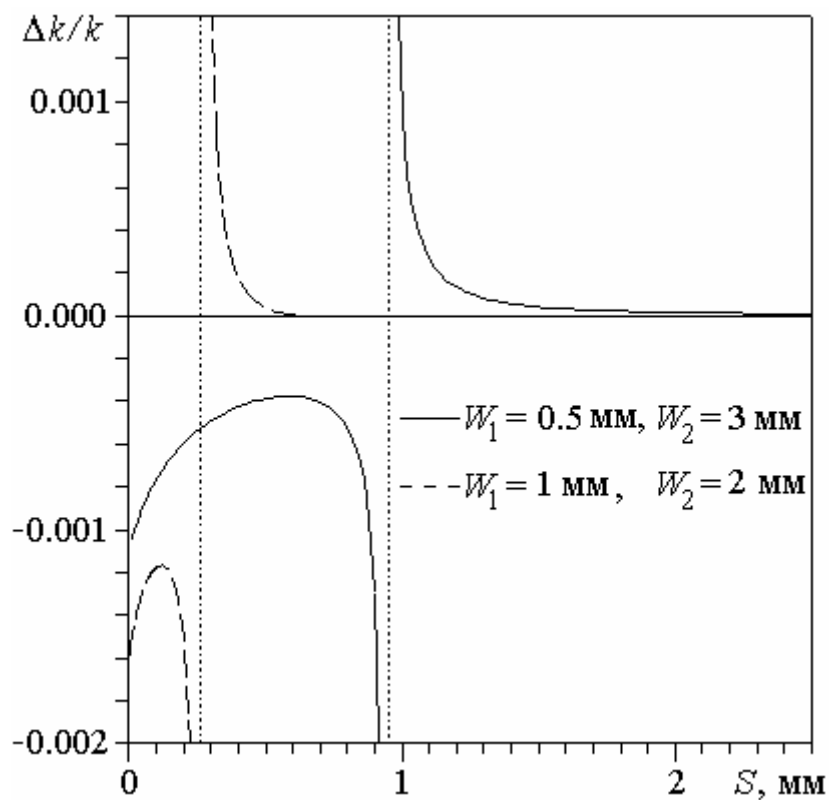


Рис. 7.30. Зависимости относительной погрешности расчета коэффициента связи от зазора

На рис. 7.30 построены зависимости относительной погрешности коэффициента связи $\Delta k/k$ от зазора между резонаторами для двух скачков ширины полосковых проводников. Видно, что в точке $S=S_0$, где $k(S_0)=0$, отношение $\Delta k/k \rightarrow \infty$. Для зависимости, изображенной сплошной линией, относительное различие S_0 составляет $\Delta S_0/S_0=0.5 \cdot 10^{-4}$, а для зависимости, изображенной штриховой линией, — $\Delta S_0/S_0=2.6 \cdot 10^{-4}$.

Наличие аномальной области для коэффициента связи нерегулярных МПР означает, что задача синтеза микрополоскового фильтра решетчатого типа может иметь до трех различных решений, различающихся лишь величиной зазоров между резонаторами [19].

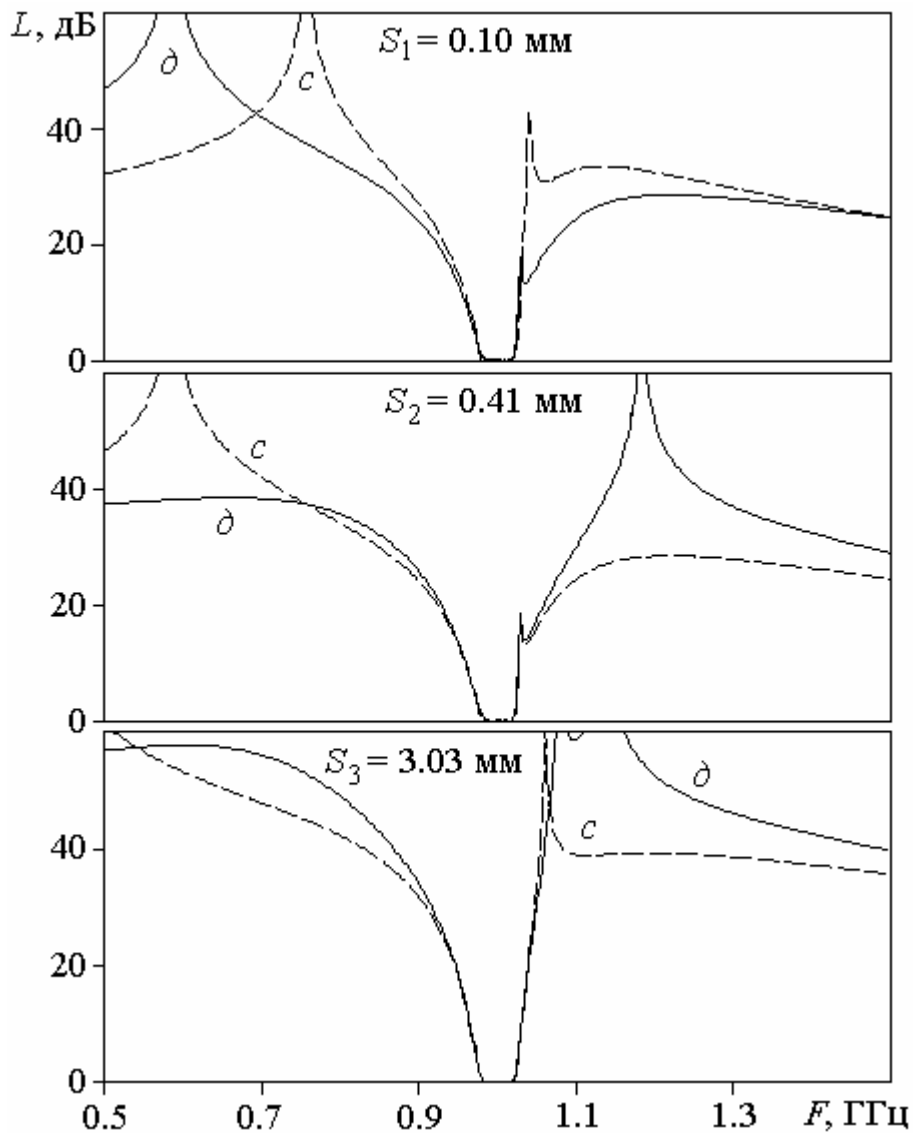


Рис. 7.31. АЧХ трехзвенных решетчатых МПФ при диагональном (д) и смежном (с) кондуктивном подключении для трех различных зазоров

Рассмотрим свойства фильтров, имеющих одинаковые полосы пропускания при различных зазорах между резонаторами. На рис. 7.31 приведены АЧХ трехзвенных фильтров решетчатого типа на микрополосковых резонаторах со скачком ширины полоскового проводника. Все фильтры выполнены на подложке с $\varepsilon_r=9.8$ и $h=1$ мм. Их полосковые проводники имеют $W_1=1$ мм, $W_2=2$ мм, $l_1=l_2 \approx 50$ мм. Зазоры между проводниками подобраны такими, чтобы относительная ширина полосы пропускания всех фильтров составляла 5%. Их значения указаны на рисунке. Видно, что положение полюсов затухания фильтров зависит как от способа кондуктивного подключения, так и от величины зазора между проводниками.

7.10. Асимметричная пара связанных МПР

Рассмотрим коэффициенты связи асимметричной пары микрополосковых резонаторов [20], изображенной на рис. 7.32. Чтобы избежать громоздких формул, будем предполагать, что пара резонаторов подключается кондуктивно в тракт СВЧ за противоположные концы полосковых проводников.

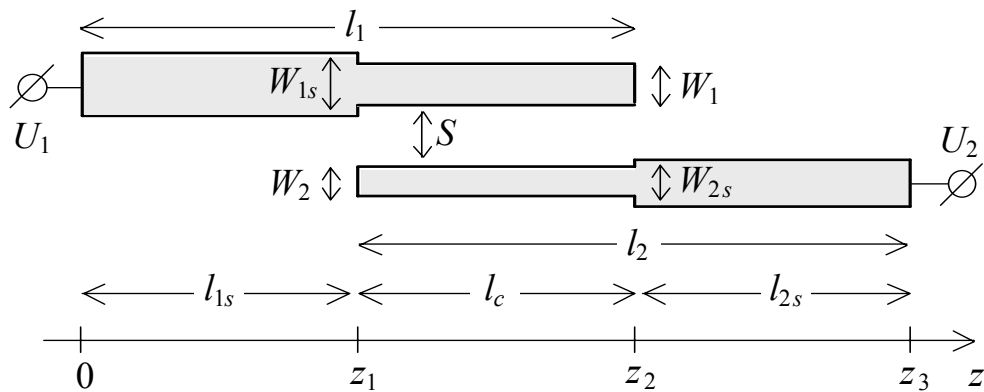


Рис. 7.32. Асимметричная пара микрополосковых резонаторов

В приближении усредненных волн функции распределения напряжения и тока на первом проводнике имеют вид

$$u_1(z) = \begin{cases} U_1 \frac{\cos[\theta_{1s}(z-z_1)/l_{1s} - \varphi_1]}{\cos(\varphi_1 + \theta_{1s})} & \text{при } 0 < z < z_1, \\ U_1 \frac{\cos \varphi_1 \cos[\theta_{1a}(z-z_2)/l_c]}{\cos(\varphi_1 + \theta_{1s}) \cos \theta_{1a}} & \text{при } z_1 < z < z_2, \end{cases} \quad (7.115)$$

$$j_1(z) = \begin{cases} iU_1 \frac{\sin [\theta_{1s}(z-z_1)/l_{1s} - \varphi_1]}{Z_{1s} \cos (\varphi_1 + \theta_{1s})} & \text{при } 0 < z < z_1, \\ iU_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin [\theta_{1a}(z-z_2)/l_c]}{Z_{1a} \cos (\varphi_1 + \theta_{1s}) \cos \theta_{1a}} & \text{при } z_1 < z < z_2, \end{cases}$$

где $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \theta_{1a} Z_{1s} / Z_{1a}$. Аналогичный вид имеют функции распределения напряжения и тока на втором проводнике.

Подставляя в (7.68), (7.69) выражения для энергий, найденных интегрированием формул (7.87)–(7.90) с использованием функций распределения (7.115), получаем формулы для коэффициентов индуктивной и емкостной связи

$$k_L = \frac{K_L \frac{l_c}{\sqrt{l_{1s} l_{2s}}} \left[\frac{\sin \theta_{1a} + \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} + \theta_{2a}} - \frac{\sin \theta_{1a} - \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} - \theta_{2a}} \right]}{\sqrt{\left[\frac{C_{1s} \cos^2 \theta_{1a}}{C_1 + C_m} + \frac{L_{1s} \sin^2 \theta_{1a}}{L_1} + \frac{l_c}{l_{1s}} \right] \left[\frac{C_{2s} \cos^2 \theta_{2a}}{C_2 + C_m} + \frac{L_{2s} \sin^2 \theta_{2a}}{L_2} + \frac{l_c}{l_{2s}} \right]}}, \quad (7.116)$$

$$k_C = \frac{K_C \frac{l_c}{\sqrt{l_{1s} l_{2s}}} \left[\frac{\sin \theta_{1a} + \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} + \theta_{2a}} + \frac{\sin \theta_{1a} - \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} - \theta_{2a}} \right]}{\sqrt{\left[\frac{C_{1s} \cos^2 \theta_{1a}}{C_1 + C_m} + \frac{L_{1s} \sin^2 \theta_{1a}}{L_1} + \frac{l_c}{l_{1s}} \right] \left[\frac{C_{2s} \cos^2 \theta_{2a}}{C_2 + C_m} + \frac{L_{2s} \sin^2 \theta_{2a}}{L_2} + \frac{l_c}{l_{2s}} \right]}}.$$

Заметим, что входящие в (7.116) погонные емкости и индуктивности полосковых проводников связаны с электрическими параметрами волн формулами

$$\begin{aligned} C_1 + C_m &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2} U_{21} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{22} I_{11}}{c(U_{12} U_{21} - U_{11} U_{22})}, & L_1 &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2} U_{12} I_{21} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{11} I_{22}}{c(I_{12} I_{21} - I_{11} I_{22})}, \\ C_2 + C_m &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} U_{12} I_{21} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{11} I_{22}}{c(U_{12} U_{21} - U_{11} U_{22})}, & L_2 &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} U_{21} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{22} I_{11}}{c(I_{12} I_{21} - I_{11} I_{22})}, \\ C_m &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2} U_{11} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{12} I_{11}}{c(U_{12} U_{21} - U_{11} U_{22})}, & L_m &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} U_{11} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{12} I_{11}}{c(I_{12} I_{21} - I_{11} I_{22})}. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Отсюда следует, что коэффициенты индуктивной и емкостной связи асимметричной пары связанных МПЛ могут быть вычислены по формулам

$$K_C = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} U_{11} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{12} I_{11}}{\sqrt{[\sqrt{\varepsilon_2} U_{21} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{22} I_{11}][\sqrt{\varepsilon_1} U_{12} I_{21} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{11} I_{22}]}}}, \quad (7.118)$$

$$K_L = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} U_{11} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{12} I_{11}}{\sqrt{[\sqrt{\varepsilon_2} U_{12} I_{21} - \sqrt{\varepsilon_1} U_{11} I_{22}][\sqrt{\varepsilon_1} U_{21} I_{12} - \sqrt{\varepsilon_2} U_{22} I_{11}]}}.$$

Подробнее рассмотрим случай регулярных резонаторов, то есть будем считать, что $W_{1s} = W_1$, $W_{2s} = W_2$. Тогда, используя приближенные равенства

$$C_{1s}/(C_1 + C_m) = C_{2s}/(C_2 + C_m) = L_{1s}/L_1 = L_{2s}/L_2 = 1,$$

формулы (7.116) можно переписать в упрощенном виде:

$$k_L = \frac{K_L l_c}{\sqrt{l_1 l_2}} \left[\frac{\sin \theta_{1a} + \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} + \theta_{2a}} - \frac{\sin \theta_{1a} - \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} - \theta_{2a}} \right], \quad (7.119)$$

$$k_C = \frac{K_C l_c}{\sqrt{l_1 l_2}} \left[\frac{\sin \theta_{1a} + \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} + \theta_{2a}} + \frac{\sin \theta_{1a} - \sin \theta_{2a}}{\theta_{1a} - \theta_{2a}} \right].$$

Исследуем влияние некоторых конструктивных параметров на коэффициенты связи. Рассмотрим случай $\varepsilon_r = 10$, $h = 1$ мм, $S = 1$ мм.

На рис. 7.33 по формулам (7.119) и (7.24) построены частотные зависимости коэффициентов связи резонаторов при $W_1 = 2$ мм, $W_2 = 1$ мм, $l_c/l_1 = 0.8$.

На рис. 7.34 представлены зависимости коэффициентов связи от длины области связи на резонансной частоте при тех же параметрах резонаторов.

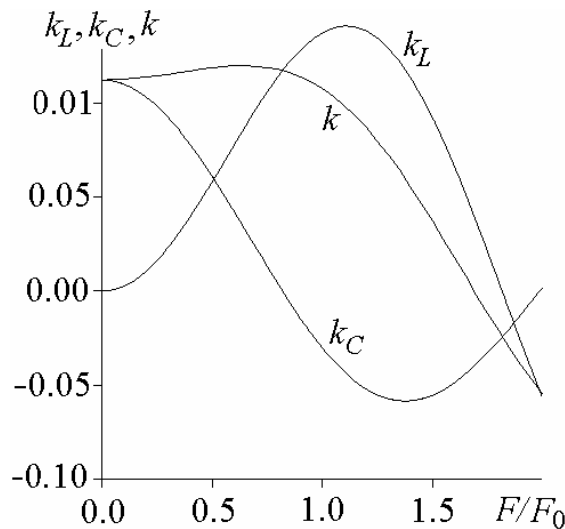


Рис. 7.33. Частотные зависимости коэффициентов связи

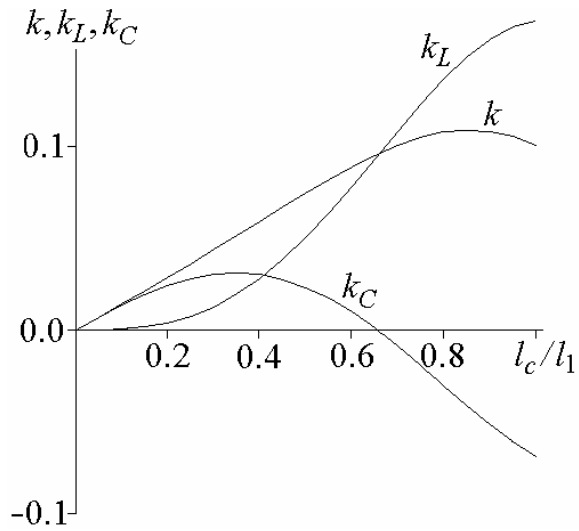


Рис. 7.34. Зависимости коэффициентов связи от длины области связи

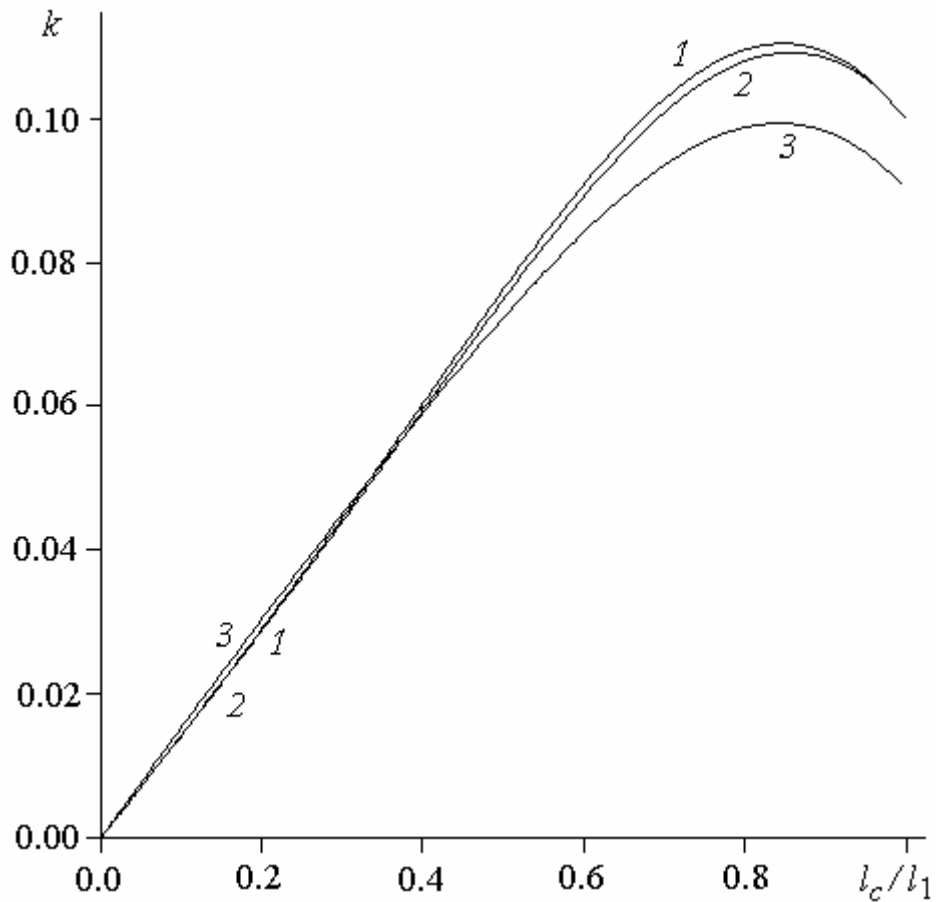


Рис. 7.35. Зависимости коэффициента связи от длины области связи для симметричной (1) и асимметричной (2, 3) пары резонаторов

На рис. 7.35 показано влияние асимметрии резонаторов на зависимость их коэффициента связи от длины области связи на резонансной частоте. Кривая 1 построена для симметричной пары резонаторов ($W_1 = 1.5$ мм, $W_2 = 1.5$ мм),

а кривые 2 и 3 построены для асимметричных пар (2 – $W_1 = 2$ мм, $W_2 = 1$ мм; 3 – $W_1 = 2$ мм, $W_2 = 0.2$ мм).

Рассмотрим точность приближенных формул (7.119). Для этого сравним значение коэффициента связи k , рассчитанное по формулам (7.119) и (7.24), со значением, рассчитанным по формуле (7.20). Для асимметричной пары резонаторов, изображенной на рис. 7.32, частоты связанных колебаний являются корнями уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_{1s} \operatorname{tg} \theta_{2s}}{I_{11} I_{22} - I_{12} I_{21}} \left[\begin{array}{l} \left(U_{12}^2 I_{11}^2 + U_{11}^2 I_{12}^2 \right) \sin \theta_{1c} \sin \theta_{2c} - \\ - \left(U_{11} U_{22} I_{11} I_{22} + \right. \\ \left. + U_{12} U_{21} I_{12} I_{21} \right) \cos \theta_{1c} \cos \theta_{2c} - \\ \left. - 2 U_{11} U_{12} I_{11} I_{12} \right] + \\ + Z_{2s} \operatorname{tg} \theta_{1s} (U_{12} I_{21} \sin \theta_{1c} \cos \theta_{2c} - U_{11} I_{22} \cos \theta_{1c} \sin \theta_{2c}) + \\ + Z_{1s} \operatorname{tg} \theta_{2s} (U_{21} I_{12} \cos \theta_{1c} \sin \theta_{2c} - U_{22} I_{11} \sin \theta_{1c} \cos \theta_{2c}) - \\ - Z_{1s} Z_{2s} (I_{11} I_{22} - I_{12} I_{21}) \sin \theta_{1c} \sin \theta_{2c} = 0. \end{array} \right. \quad (7.120)$$

При выводе этого уравнения были учтены два тождества:

$$U_{12} I_{11} + U_{22} I_{21} = 0, \quad U_{21} I_{22} + U_{11} I_{12} = 0. \quad (7.121)$$

Заметим, что формула (7.20) справедлива только для резонаторов с одинаковыми резонансными частотами одиночных колебаний. Поэтому сравнение значений k проведем для асимметричной пары регулярных резонаторов, удовлетворяющих условию равенства резонансных частот

$$\theta_{1s} + \theta_{1a} = \theta_{2s} + \theta_{2a}. \quad (7.122)$$

Таким образом, вычисляя коэффициент связи k по формулам (7.119) и (7.24), в которых погонные индуктивности и емкости выражены через рассчитанные в квазистатическом приближении электрические параметры одиночных и связанных микрополосковых линий, и сравнивая его со значением, полученным по формуле (7.20), можно определить погрешность расчета Δk .

На рис. 7.36 построены зависимости относительной погрешности Δk от длины области связи для симметричной (1) и асимметричной (2, 3) пары связанных резонаторов. Эти зависимости отвечают тем же конструктивным параметрам, что и зависимости на рис. 7.35.

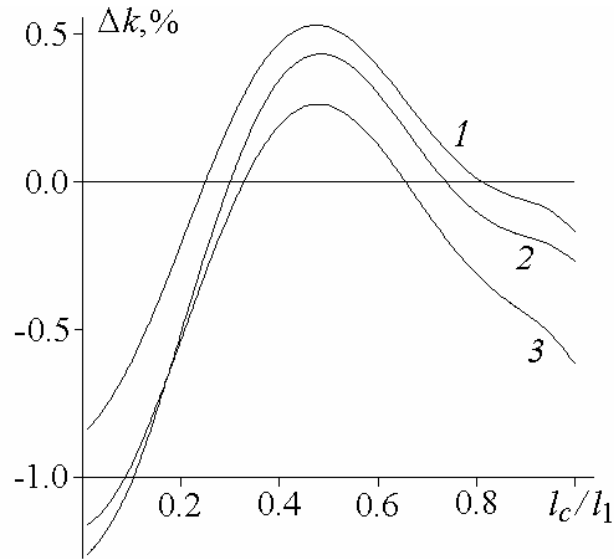


Рис. 7.36. Зависимости погрешности коэффициента связи от длины области связи для симметричной (1) и асимметричной (2, 3) пары резонаторов

Видно, что относительная погрешность Δk как для симметричной, так и для асимметричной пары резонаторов колеблется в пределах порядка 1 %. Такая точность приемлема при синтезе большинства фильтров СВЧ.

Контрольные вопросы

49. Запишите формулу для значений коэффициентов связи смежных пар резонаторов и значений внешней добротности конечных резонаторов фильтра, обеспечивающих заданную полосу пропускания.

50. Какая пара смежных резонаторов в полосно-пропускающем фильтре имеет наибольший коэффициент связи – крайняя или центральная?

51. Всегда ли симметричны коэффициенты связи смежных пар резонаторов и внешние добротности конечных резонаторов в несимметричном фильтре-трансформаторе?

52. Какой формулой связаны резонансные частоты связанных колебаний и коэффициент связи резонаторов? Назовите условия, при которых эта формула справедлива.

53. Запишите формулу сложения коэффициентов индуктивной и емкостной связи резонаторов.

54. Когда коэффициенты индуктивной и емкостной связи микрополосковых линий бывают равны?

55. Какой из коэффициентов связи микрополосковых линий больше – коэффициент индуктивной связи или емкостной?

56. Какой из коэффициентов связи микрополосковых линий убывает быстрее с увеличением зазора между проводниками – коэффициент индуктивной связи или емкостной?

57. Как зависят коэффициенты индуктивной и емкостной связи микрополосковых линий от ширины их полосковых проводников?

58. Как зависит коэффициент емкостной связи микрополосковых линий от диэлектрической проницаемости подложки?

59. Когда коэффициент связи регулярных микрополосковых резонаторов не зависит от диэлектрической проницаемости подложки?

60. Запишите формулы, выражающие коэффициенты индуктивной и емкостной связи резонаторов через запасаемые энергии. Прокомментируйте входящие в них энергии.

61. Почему коэффициент связи резонаторов зависит от частоты?

62. Когда коэффициент связи резонаторов обращается в нуль?

63. Назовите причины появления полюсов затухания в микрополосковых фильтрах.

64. Назовите причину асимметрии крутизны низкочастотного и высокочастотного склонов полосы пропускания микрополосковых фильтров.

65. Дайте оценку погрешности, к которой приводит использование приближения усредненных волн при расчете коэффициентов связи микрополосковых резонаторов.

66. Назовите условия, при которых связь между микрополосковыми резонаторами перестает быть монотонно убывающей функцией расстояния. Приведите пример.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами / С. И. Баскаков. М.: Высшая школа, 1980. 152 с.
2. ГОСТ 18238–72. Линии передачи СВЧ. Термины и определения. 1972.
3. ГОСТ 21702–76. Устройства СВЧ. Полосковые линии. Термины и определения. 1976.
4. Маттей, Д. Л. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи: В 2 т. / Д. Л. Маттей, Л. Янг, Е. М. Т. Джонс. М.: Связь. (Т. 1, 1971.; Т. 2, 1972).
5. Микроэлектронные устройства СВЧ / Под ред. Г. И. Веселова. М.: Высшая школа, 1988. 280 с.
6. Гупта, К. Машинное проектирование СВЧ устройств / К. Гупта, Р. Гардж, Р. Чадха. М.: Радио и связь, 1987. 432 с.
7. Григорьев, А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. М.: Высшая школа, 1990. 335 с.
8. Тюрнев, В. В. Уравнения математической физики / В. В. Тюрнев. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. 148 с.
9. Тюрнев, В. В. Синтез микрополосковых фильтров / В. В. Тюрнев. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2002. 61 с.
10. Фуско, В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование / В. Фуско. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
11. Митра, Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли. М.: Мир, 1974. 327 с.
12. Неганов, В. А. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот / В. А. Неганов, Е. И. Нефедов, Г. П. Яровой. М.: Педагогика-Пресс, 1998.
13. Kirschning M., Jansen R. H. Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up to millimeter-wave frequencies // Electronics Letters. 1982. V. 18. № 6. P. 272-273.
14. Беляев, Б. А. Эффективный метод оптимизации микрополосковых фильтров / Б. А. Беляев, М. И. Никитина, В. В. Тюрнев // Труды ИИЭР – Российской конф.: ИИП-МЭ'97. Новосибирск, 1997. С. 104–109 (ИИЭР – Российская конф. «Микроволновая электроника больших мощностей: измерения, идентификация, применение». 1997. Новосибирск).

15. Бе́ляев, Б. А. Экспертная система FILTEX для синтеза микрополосковых фильтров / Б. А. Бе́ляев, М. И. Никитина, В. В. Тю́рнев // Электронная техника. Сер. СВЧ-техника. 1999. Вып. 1(473). С. 45–50.

16. Интеллектуальная система для проектирования микрополосковых фильтров / Б. А. Бе́ляев, М. И. Никитина, Л. Ф. Ноженкова, В. В. Тю́рнев // Известия АН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 96–102.

17. Бе́ляев, Б. А. Влияние длины области связи микрополосковых резонаторов на избирательность полосно-пропускающих фильтров / Б. А. Бе́ляев, М. И. Никитина, В. В. Тю́рнев // Электронная техника. Сер. СВЧ-техника. 1993. Вып. 5(459). С. 11–15.

18. Коэффициент связи нерегулярных микрополосковых резонаторов / Б. А. Бе́ляев, М. М. Титов, В. В. Тю́рнев // Известия вузов. Сер. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 8. С. 722–727.

19. Микрополосковый решетчатый фильтр на нерегулярных резонаторах / Б. А. Бе́ляев, А. А. Лексиков, М. М. Титов, В. В. Тю́рнев // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 8. С. 939–946.

20. Тю́рнев, В. В. Коэффициент связи асимметричной пары сверхвысокочастотных резонаторов / В. В. Тю́рнев // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 1. С. 5–13.

21. Hong J.-S. Microstrip Filters for RF/Microwave Applications / J.-S. Hong, M. J. Lancaster. New York / Chichester / Weinheim / Brisbane / Singapore / Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 457 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	A		I
a_i, b_i	58	I	20
	B	I_{im}	18, 22
b	41	I_m	21
B	40		J
	C	j	7
c	8	J	10
C	20	J, K	106
C_i	102	j_1, j_2	158
C_i, C_{ik}^m	23	$J_m(x)$	31, 32, 36, 37
C_{ik}	<i>См. C</i>	$J_n(z)$	88
C_k	98		K
	E	K	95, 106
E_τ	6	k	140
E_n	10	k, k_0	8
E_t	10, 48	k_C	141, 157, 163, 166
	G	$k_{i,i+1}^L$	134
G	40	$k_{i,i+1}^C$	136
$G(\mathbf{r} \mathbf{r}_0)$	82, 85	k_L	141, 156, 163, 166
G_0, G_{n+1}	102	k_m	18
G_A, G_B	107	k_z, k'_z, k''_z	5
g_i	102	K_{np}	163
	H		L
H_τ	6	L	20
H_n	10	L, L_r	99
H_t	10	l_c	119
		L_i	102
		L_{ik}	<i>См. L</i>

	Q		Y
Q		39	$Y_{\text{BX}}(\omega)$
Q_0		40	40
Q_c		47, 50	Z
Q_e		40	Z
Q_i		20	7
	R		$Z(z)$
R		39, 40	7
R_0, R_{n+1}		102	Z_0
R_A, R_B		107	12, 54
R_s		48	Z_1, Z_2
	S		106
S		58	Z_a
	T		160
$T_n(x)$		30, 103	Z_c
	U		12
U		20	Z_s
U_{im}		18, 22	48
U_m		21	Z_{BX}
	V		40, 54
v		6	$Z_{\text{ИСТ}}$
v_g		6	54
	W		Γ
w		108	γ
	X		6
x		41	Δ
X		40	Δ
			43, 45
			ΔL
			103
			Δl
			79, 99
			E
			ε_a ..
			160, 162
			$\varepsilon_e, \varepsilon_o$
			17
			ε_{eff}
			16
			ε_m ..
			18
			$\varepsilon_r, \tilde{\varepsilon}_r, \varepsilon_0$
			8
			Θ
			θ ..
			54
			θ_e, θ_o
			142

Λ

λ_g	16
-------------------	----

Ρ

ρ	7
ρ_s	10

Σ

σ	7
----------------	---

Τ

τ	100
--------------	-----

Φ

Φ	25
φ	100

Ω

Ω	103
ω_{cr}	5
ω	5
Ω_1	103
ω_e, ω_o	140
ω_p	163

Α

Анализ	101
АЧХ.....	99

Β

Волна	
ТЕМ-волна	<i>См.</i> Т-волна
Т-волна	11
бегущая.....	5

высшего типа.....	5
гибридная.....	15
Е-волна	13
ЕН-волна	<i>См.</i> гибридная
квазипоперечная	
электромагнитная.....	15
квази-Т.....	<i>См.</i>
квазипоперечная	
электромагнитная	
квази-ТЕМ ..	<i>См.</i>
квазипоперечная	
электромагнитная	
магнитная.....	14
Н-волна.....	14
НЕ-волна	<i>См.</i> гибридная
нечетная	17
основная	<i>См.</i> основного типа
основного типа	5
отраженная.....	6
падающая	6
поперечная электромагнитная .	11
стоячая.....	6
ТЕ-волна.....	<i>См.</i> Н-волна
ТМ-волна	<i>См.</i> Е-волна
четная	17
электрическая	13
Волновое число	5
Волновые переменные	<i>См.</i>
Нормированные напряжения	

Γ

Гармонические колебания	8
Граничное условие	
Леонтовича	49
электродинамическое	9

Групповое время запаздывания . 100

Д

Диапазон СВЧ..... 3

Дисперсия линии передачи 6

Диэлектрическая проницаемость

 комплексная 8

 относительная 7

 свободного пространства..... 8

 эффективная..... 16

Длина электрическая..... 54

Добротность 39

 внешняя 40

 двухполюсника 41

 диэлектрика..... 42

 диэлектрического заполнения.. 42

 колебательного контура..... 39

 линии передачи..... 41

 нагруженная 40

 проводников..... 42

 собственная 40

З

Закон

 приращения индуктивности..... 49

Затухание..... 99

 неравномерность 103

И

Инвертор

 проводимости..... 106

 сопротивления 106

К

Компоненты устройств СВЧ

двумерные..... 78

 микророскоковые..... 78

 нульмерные..... 78

 одномерные 78

 планарные 78

 полосковые 78

 трехмерные 78

Кондуктивное подключение .. 66, 94

Концевая емкость..... 98

Коэффициент

 затухания..... 5

 распространения..... 6

 фазы..... 5

Коэффициент связи..... 136, 137, 140

 емкостной..... 136, 156

 емкостной контуров..... 141, 157

 индуктивной 135, 156

 индуктивной контуров ... 141, 157

 формула сложения 141

Л

Линия передачи..... 4

 воздушная 4

 диэлектрическая..... 4

 коаксиальная..... 4

 копланарная 4

 микророскоковая..... 4

 неоднородная..... 4

 нерегулярная..... 4

 однородная 4

 основной диапазон частот..... 5

 открытая..... 5

 полосковая 4

 регулярная..... 4

с неуравновешенными	
связями	143
щелевая	4
экранированная	5
М	
Магнитная проницаемость	
относительная	7
свободного пространства	8
Магнитная стенка	43
Матрица	
<i>ABCD</i> -матрица	53, 55
<i>G</i> -матрица	57
<i>H</i> -матрица	57
<i>S</i> -матрица	58
<i>T</i> -матрица	59
<i>Y</i> -матрица	56
<i>Z</i> -матрица	55
адмитансная	См. <i>Y</i> -матрица
единичная	60
импедансная	См. <i>Z</i> -матрица
нормированная <i>ABCD</i> -матрица	54
передачи волновая	См. <i>T</i> -матрица
передачи классическая ...	См.
<i>ABCD</i> -матрица	
проводимостей	См. <i>Y</i> -матрица
рассеяния	См. <i>S</i> -матрица
соединений	71
сопротивлений	См. <i>Z</i> -матрица
цепная	См. <i>ABCD</i> -матрица
Метод	
десегментации	90
сегментации	89
Методы оптимизации	101
Микроволны	3
Многополюсник	53
взаимный	61
симметричный	62
Модель	
математическая	101
Олинера	44, 79, 84
МПЛ	91
МПР	
См. Резонатор микрополосковый	
МПФ	113
Н	
Нормированные напряжения	58
О	
Область квазистатического	
приближения	16
П	
Параметр	
СВС	95
Параметр крутизны	
реактивного сопротивления	41
реактивной проводимости	41
Параметры	
<i>ABCD</i> -параметры	См.
<i>ABCD</i> -матрица	
нормированные <i>ABCD</i> -	
параметры	См.
нормированная <i>ABCD</i> -матрица	
<i>T</i> -параметры	См. <i>T</i> -матрица
ПЗФ	100
Полоса	
заграждения	100
пропускания	100

Порядок связности	4
Постоянная распространения	
..... См. Волновое число	
Потери на отражение	100
ППФ	100
Приближение	
длинных линий	97
квазистатическое	18
одномодовое	97
Принцип	
взаимности	61
обратимости	61
Проводимость	7
реактивная	40
ПФ	См. Фильтр полосовой

Р

Реактанс	40
Резонатор	
микрополосковый	91
нерегулярный	91
П-образный	128
полуволновый	91
регулярный	91
с СВС	94
четвертьволновый	91
шпилечный	128
РФ	См. Фильтр режекторный

С

СВС	94
Связь	
комбинированная	137
Сдвиг фазы	100
Синтез	100

оптимизационный	101
параметрический	100
прямой параметрический	101
структурный	100
Скин-слой	
импеданс	48
толщина	43
Скорость	
групповая	6
света	8
фазовая	6
Соотношения взаимности	
Онсагера	62
Сопrotивление	
волновое	7
входное	7, 54
выходное	54
источника внутреннее	54
нормирующее	54
поверхностное	48
реактивное	40
характеристическое	6
Составляющая	
нормальная	10
поперечная	6, 12
тангенциальная	10

Т

Токи сопряженные	158
------------------------	-----

У

Уравнение	
Гельмгольца	8
дисперсионное	14
Лапласа	12

Уравнения	
Максвелла	7
телеграфные	20
Условие	
Мейкснера <i>См.</i> Условие на ребре	
на ребре	29

Ф

ФВЧ..... <i>См.</i> Фильтр верхних частот	
Фильтр	
верхних частот	100
микрополосковый	
решетчатый	66
нижних частот.....	100
полосно-заграждающий.....	100
полосно-пропускающий	100
полосовой	100
режекторный	100
СВЧ	99
Фильтр-прототип.....	102
нижних частот.....	102
ФНЧ <i>См.</i> Фильтр нижних частот	
Функция	
Бесселя.....	31, 88
Грина.....	82
целевая.....	101
ФЧХ	100

Х

Характеристика

амплитудно-частотная	99
Баттерворта.....	105
максимально плоская.....	105
равноволновая	104
фазочастотная.....	100
Чебышева	104

Ц

Цепи СВЧ

волноводные	78
микрополосковые.....	78
полосковые	78

Ч

Частота

критическая	5
отсечки	<i>См.</i> критическая
резонансная.....	91

Э

Эквивалентная схема..... 102

Элементы

с распределенными	
параметрами	3
с сосредоточенными	
параметрами	3
сосредоточенные	101
устройств СВЧ.....	78

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ СВЧ	4
1.1. Типы линий передачи	4
1.2. Общие сведения о волнах в линиях передачи.....	5
1.3. Общие уравнения для электромагнитных волн	7
1.4. Поперечная электромагнитная волна.....	11
1.5. Электрическая волна.....	13
1.6. Магнитная волна	14
1.7. Гибридная волна.....	15
1.8. Квазипоперечная электромагнитная волна	15
2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ И КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН.....	20
2.1. Телеграфные уравнения для многопроводных линий	20
2.2. Расчет матрицы погонной емкости	24
2.3. Расчет матрицы погонной индуктивности	34
3. ДОБРОТНОСТЬ	39
3.1. Добротность колебательной системы	39
3.2. Плоский волновод.....	43
3.3. Граничное условие Леонтовича.....	48
3.4. Закон приращения индуктивности	49
3.5. Добротность проводников линии передачи для квази-Т-волн	50
4. МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМ.....	53
4.1. Матричное описание многополюсников	53
4.2. Расчет $ABCD$ -матрицы отрезка связанных многопроводных линий....	63
4.3. Связь между $ABCD$ -матрицей и S -матрицей $4n$ -полюсника	65
4.4. Расчет S -матрицы микрополоскового решетчатого фильтра	66
4.5. Произвольное соединение многополюсников	70
4.6. Расчет $ABCD$ -матрицы встречно включенного отрезка пары связанных микрополосковых линий.....	74
5. ДВУМЕРНЫЕ ЦЕПИ	78
5.1. Планарные компоненты	78
5.2. Решение двумерных задач методом функций Грина	81

5.3. Особенности использования модели Олинера для микрополосковых цепей	84
5.4. Собственные функции планарного уравнения Гельмгольца и функции Грина	85
5.5. Анализ компонентов методами сегментации и десегментации	89
6. МИКРОПОЛОСКОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	91
6.1. Микрополосковые резонаторы	91
6.2. Фильтры СВЧ и их синтез	99
6.3. Фильтр-прототип	102
6.4. Микрополосковые фильтры на параллельно связанных резонаторах	113
6.5. Микрополосковые фильтры с укороченными связями	120
6.6. Пример расчета фильтра	129
7. КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ	133
7.1. Коэффициент связи резонаторов СВЧ	133
7.2. Формула сложения коэффициентов индуктивной и емкостной связи	137
7.3. Симметричная пара регулярных МПР, связанных по всей длине. Резонансная частота	141
7.4. Симметричная пара регулярных МПР с произвольной длиной области связи. Резонансная частота	145
7.5. Связанные контуры. Энергия и коэффициенты связи	151
7.6. Энергия связанных МПР	157
7.7. Приближение усредненных волн	159
7.8. Симметричная пара регулярных МПР. Произвольная частота	161
7.9. Симметричная пара нерегулярных МПР. Резонансная частота	171
7.10. Асимметричная пара связанных МПР	177
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	184
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	186

Учебное издание

Владимир Вениаминович Тюрнев

ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ СВЧ

Учебное пособие

Редактор А.А. Гетьман

Гигиенический сертификат № 24.49.04.953.П.000338.05.01 от 25.05.2001 г.
Подп. в печать 1.04.2003. Формат 60×84/16. Бумага тип. № 1. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 11,25. Уч.-изд. Л. 9,75. Тираж 100 экз. Заказ 258/2 С 91
Отпечатано в ИПЦ КГТУ
660074, Красноярск, ул. Киренского, 26