Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies 2015 8. Issue 8. 1040-1045
~ ~ ~

УДК 532.546

Motion Simplified Equations for an Incompressible Fluid Method of Asymptotic Expansion

Almaz I. Biybosunov and Samara T. Zhusupbekova*
Kyrgyz Scientific and Technical Center «Energy»
under the Ministry of Energyand Industry
of the Kyrgyz Republic
119 Ahunbaeva, Bishkek, 720055, Kyrgyzstan

Received 19.07.2015, received in revised form 08.08.2015, accepted 21.11.2015

Formulated boundary problem of flow around the concave surface of a viscous incompressible fluid, the solution of which is accepted method of matched asymptotic expansions. The method of matched asymptotic expansions characterized by the loss of boundary conditions. One can not expect that the outer expansion will satisfy the conditions imposed are in the inner region, and conversely, the inner expansion generally will not satisfy the conditions in a remote area. But the loss is compensated splicing conditions. Splicing is the main feature of the method. The possibility of matching based on the existence of the overlap region, which are suitable both internal and external expansion. Using this overlap, you can get the exact relationship between the finite partial sums. The implementation of this option is only feasible for the perturbation parameter, which is inhomogeneous in the coordinates, and the coordinates for the disturbance, which is inhomogeneous in other coordinates. You can not splice two different parametric decomposition, such as the expansion for large and small values of the Reynolds number and Mach number; it is impossible to splice two different coordinate expansions, such as the expansion of small and large values of time or distance. Such rows can overlap in the sense that they have a common domain of convergence, but the process of analytic continuation gives only approximate relation to a finite number of members. The existence of a region of overlap means that the internal expansion external expansion should be up to the relevant procedure in line with the outer expansion of internal expansion. This principle applies to higher-order approximation, while maintaining further terms in the asymptotic expansion. We can assume that the number of members may be different for internal and external expansions as the normal order of splicing requires margin per unit for even steps.

Keywords: concave surface boundary layer Navier – Stokes.

DOI: 10.17516/1999-494X-2015-8-8-1040-1045.

* Corresponding author E-mail address: almazbii@mail.ru

Упрощение уравнений движения для несжимаемой жидкости методом асимптотических разложений

А.И. Бийбосунов, С.Т. Жусупбекова

Кыргызский научно-технический центр «Энергия»
при Министерстве энергетики и промышленности
Кыргызской Республики
Кыргызстан, 720055, Бишкек, Ахунбаева, 119

Формулируется краевая задача обтекания вогнутой поверхности потоком вязкой несжимаемой жидкости, для решения которой принимается метод сращивания асимптотических разложений.

Этому методу свойственна потеря граничных условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и обратно – внутреннее разложение в общем случае не будет удовлетворять условиям в удаленной области. Но потеря условий восполняется сращиванием. Сращивание представляет собой основную черту метода. Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодно как внутреннее, так и внешнее разложение. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой возможности осуществима только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах, или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса или числа Маха; невозможно срастить два различных координатных разложения, таких как разложение для малых и больших значений времени или расстояния. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов. Существование области перекрытия означает, что внутреннее разложение внешнего разложения должно с точностью до соответствующего порядка согласовываться с внешним разложением внутреннего разложения. Этот принцип распространяется на приближения высшего порядка при сохранении дальнейших членов в асимптотических разложениях. Можно допустить, что число членов может быть различно во внутреннем и внешнем разложениях, поскольку нормальный порядок сращивания требует разницы на единицу при четных шагах.

Ключевые слова: вогнутая поверхность, пограничный слой, уравнение Навье–Стокса.

Рассматриваются уравнение неразрывности и уравнения движения для несжимаемой жидкости, обтекающей вогнутую поверхность:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);\tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=F_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=F_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

При асимптотическом анализе будем использовать ставшие уже традиционными при построении асимптотических теорий обозначения для различных областей возмущенного течения (рис. 1):

Область I – возмущенная часть внешнего невязкого течения, ее характерная толщина

$$\Delta y_1 > \delta \sim O(\varepsilon).$$

Область II – основная часть пограничного слоя с характерной толщиной

$$\Delta y_2 \sim \delta.$$

Вязкая пристеночная область III с характерной толщиной

$$\Delta y_3 < \delta.$$

При построении асимптотической теории вихрей Гертлера [1] в пограничном слое жидкости будем предполагать, что потеря устойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности вызывает нелинейные возмущения функций течения в области их локализации, например

$$\Delta u \sim u.$$

Следовательно, возмущения от вихрей уже в первом приближении влияют на характеристики основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности. В поле центробежных сил тогда возникают возмущения давления

$$\Delta P \sim ku^2\Delta y,$$

которые индуцируют поперечные составляющие скорости:

$$w \sim \Delta w \sim \Delta P^{1/2} \sim k^{1/2}u\Delta y^{1/2}.$$

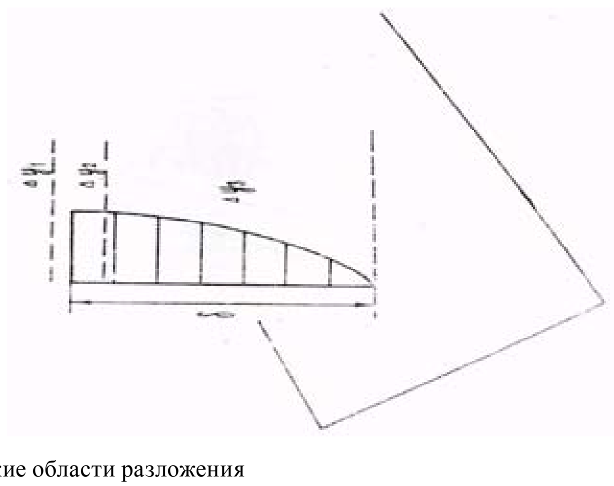

Рис. 1. Асимптотические области разложения

Так как оценки для *P u w* получаются из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений (1), то очевидно, что механизмы конвекции являются основными в процессе порождения вторичного вихревого течения.

Пусть возмущения зарождаются в области с характерной толщиной в виде

$$\Delta y \sim O(a) < \delta \sim O(\varepsilon),$$

т. е. толщиной меньшей, чем толщина пограничного слоя, расположенного непосредственно около вогнутой поверхности, где завихренность основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности наибольшая, а функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности, например

$$u \sim \Delta y / \varepsilon.$$

Тогда справедливы следующие оценки для функций течения:

$$u \sim O(a/\varepsilon), \quad \Delta P \sim O(\aleph\, a^3/\varepsilon^2), \quad w \sim O(\aleph^{1/2} a^{3/2}/\varepsilon). \tag{2}$$

Принимая, что в общем случае толщина возмущенной области «*a*» соизмерима с ее шириной – $\Delta z \sim O(c) \sim O(a)$, и приравнивая порядки величин членов уравнения неразрывности, можно получить, что

$$a \sim c \sim O(\aleph b^2), \tag{3}$$

где «*a*», «*b*» и «*c*» – характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения, и

$$\varepsilon^2 < a < c < b < 1.$$

Соотношения (2) и (3) позволяют оценить порядки величин конвективных и основных диссипативных членов уравнений движения:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim O(\aleph^2 b^3/\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O(\varepsilon/\aleph b^2).$$

Из этих оценок видно, что в наименее вырожденном случае, когда механизмы конвекции и диссипации равнозначны и

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

протяженность возмущенной области «*b*» по порядку величины равна

$$b \sim O(\varepsilon^{3/5}/\aleph^{3/5}) < 1. \tag{4}$$

Оценки (2), (3) и (4) позволяют для возмущенной вихревой области течения III с характерными размерами:

$$\Delta x \sim O(b) \sim O(\varepsilon/\aleph)^{3/5},$$

$$\Delta y \sim \Delta z \sim O(a) \sim O(c) \sim O(\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5}),$$

расположенной непосредственно около вогнутой поверхности, ввести следующие переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$\begin{aligned}
&x = (\varepsilon^{3/5}/\aleph^{3/5})\, X_3,\\
&y = (\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5})\, Y_3,\\
&z = (\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5})\, Z_3,\\
&u=(\varepsilon^{1/5}/\aleph^{1/5})u_3+\ldots, \qquad\qquad (5)\\
&v = \aleph^{1/5}\varepsilon^{4/5} v_3+\ldots,\\
&w = \aleph^{1/5}\varepsilon^{4/5} w_3+\ldots,\\
&\Delta P = \aleph^{2/5}\varepsilon^{8/5} P_3+\ldots,
\end{aligned}$$

где возмущение давления P отсчитывается от значения на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Теперь подставим разложения (5) в систему уравнений (1) и совершим предельный переход при $\varepsilon \to 0,\ \varepsilon < \aleph < 1$. Тогда получим, что в первом приближении для области III справедливы параболизированные в продольном направлении уравнения Навье–Стокса без продольного градиента давления:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_3}{\partial X_3}+\frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3}+\frac{\partial w_3}{\partial Z_3}=\mathrm{O},\\
&U_3\frac{\partial U_3}{\partial X_3}+\vartheta_3\frac{\partial U_3}{\partial Y_3}+w_3\frac{\partial U_3}{\partial Z_3}=\frac{\partial^2 U_3}{\partial Y^2{}_3}+\frac{\partial^2 U_3}{\partial Z^2{}_3},\\
&U_3\frac{\partial \vartheta_3}{\partial X_3}+\vartheta_3\frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3}+w\,\frac{\partial \vartheta_3}{\partial Z_3}+\mathrm{K}U^2{}_3+\frac{\partial \rho_3}{\partial Y_3}=\frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Y^2{}_3}+\frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Z^2{}_3}, \qquad (6)\\
&U_3\frac{\partial w_3}{\partial X_3}+\vartheta_3\frac{\partial w_3}{\partial Y_3}+w_3\frac{\partial w_3}{\partial Z_3}+\frac{\partial \rho_3}{\partial Z_3}=\frac{\partial^2 w_3}{\partial Y^2{}_3}+\frac{\partial^2 w_3}{\partial Z^2{}_3}.
\end{aligned}$$

На вогнутой поверхности должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания:

$$U_3 = \vartheta_3 = w_3 = O, \qquad Y_3 = O. \qquad (7)$$

Внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности (с нижней сдвиговой частью пограничного слоя около вогнутой поверхности):

$$U_3 \to AY_3, \qquad \rho_3 \to -KA^2Y^3{}_3, \qquad (8)$$

$$\vartheta_3, \quad w_3 \to O, \quad X_3, \quad Y_3 \to\infty,$$

где «А» – напряжение трения в продольном направлении на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Предполагается исследовать периодические по поперечной координате «Z» – решения, поэтому

$$f(X_3, Y_3, Z_3) = f(X_3, Y_3, Z_3 + \lambda); \quad (9)$$

$$f = U_3, \vartheta_3, w_3, \rho_3,$$

где λ – длина волны вытянутых в продольном направлении стационарных вихрей Гертлера.

Краевая задача (6)–(9) описывает эволюционное нелинейное развитие вихрей Гертлера с длиной волны, меньшей толщины пограничного слоя около вогнутой поверхности. Из характеристик основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности в краевую задачу (6)–(9) входит только величина «А». Так как протяженность исследуемой области течения мала (как видно из формулы 4), то здесь несущественно продольное изменение функций течения в основном плоском течении вблизи вогнутой поверхности, которое происходит на характерной длине X = 0(1). Фактически же развитие коротковолновых возмущений происходит в плоскопараллельном потоке.

Таким образом, разработаны асимптотические методы решения уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Перспективные решения могут найти также теоретическое и практическое применение в таких областях, как исследование динамики селевых и оползневых течений, в межлопаточных каналах и гидравлических процессах.

Список литературы

[1] Ван-Дайк М. *Методы возмущений в механике*. М.: Мир, 1967 [Van Daik M. *Perturbation methods in mechanics*. Moscow, Mir, 1967]

[2] El-Hady N.M., Verma A.K. *AIAA paper*, 1982, 82.

[3] Peerhossaini H. *On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Phisics*, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376–384.

[4] Бийбосунов А.И. *Наука и новые технологии,* 2006, 3, 50-52 [Biibosunov A.I. *Science and new technologies*, Bishkek, 2006, 3, 50-52]