УДК 51

ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВИЗУАЛИЗАЦИИ СРЕДНЕВЕРОЯТНОГО СОБЫТИЯ

Нартов Яков
Сибирский федеральный университет
Институт математики

Аннотация Данная статья рассматривает визуализацию средневероятного события для распределения Бернулли , построенного с помощью приближения Пуассона.

Ключевые слова: *Эвентология, средневероятное событие, распределение Бернулли, пуассоновское приближение для распределения Бернулли*.

Рассмотрим всеобщее вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbf{P})$, где Ω - пространство всеобщих элементарных исходов $\omega \in \Omega$; U - конечное множество событий $x \in U$, выбранных из алгебры F событий $x \subset \Omega$. Чтобы говорить об эвентологическом подраспределении [1], рассмотрим эвентологическое распределение первого рода в виде набора вероятностей $\{p(X//U), X \subseteq U\}$, в котором

$$p(X//U) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X//U)),\ X \subseteq U$$

- вероятности террасных событий

$$\mathrm{ter}(X//U) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c ,$$

образующих по всем $X \subseteq U$ разбиение Ω, обеспечивают данному виду эвентологического распределения вероятностную нормировку

$$\sum_{X\subseteq U} p(X//U) = 1.$$

Средневероятным событием [2] для конечного множества однородных событий $U \subset F$ называется такое событие $x_U \in F$, удовлетворяющее включениям

$$\sum_{|X|>m} \mathrm{ter}(X//U) \subseteq x_U \subseteq \sum_{|X|\geq m} \mathrm{ter}(X//U),$$

которое наступает с вероятностью

$$\mathbf{P}(x_U) = \frac{1}{|U|}\sum_{x\in U}\mathbf{P}(x)$$

всякий раз, когда среди событий из U наступает не менее, чем m событий, где $m \in \{0,1,...,|U|\}$ удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|X|>m} p(X//U) \leq \mathbf{P}(x_U) \leq \sum_{|X|\geq m} p(X//U)$$

Вероятностное расстояние [2] от события $y \in F$ до множества $U \subset F$ определяется формулой:

$$\rho(y,U) = \sum_{x\in U}\mathbf{P}(x \triangle y) = \sum_{x\in U}\mathbf{P}(x^c \cap y) + \sum_{x\in U}\mathbf{P}(x \cap y^c)$$

Средневероятное событие $x_U \in F$ минимизирует вероятностное расстояние до множества U :

$$\rho(x_U,U) = \min_{\alpha\in U;\mathbf{P}(\alpha)=\mathbf{P}(x_U)} \rho(\alpha,U)$$

среди таких событий y из алгебры F , вероятность которых равна средней вероятности

$$\mathbf{P}(y) = \frac{1}{|U|}\sum_{x\in U}\mathbf{P}(x)$$

Совершенно очевидно, что средневероятное событие не единственно. Это прекрасно показано в [3], а также в [4], где приведена событийная визуализация схемы Бернулли, а также визуализация асимптотического поведения средневероятного события. Подход к визуализации был использован следующий. Пусть Ω - это квадрат $[0,1]^2$. Разбиваем отрезок $[0,1]$ горизонтальной плоскости на $N = |U||$ равных частей длины $\frac{1}{N}$. Строим график функции биномиальных вероятностей:

$$b_k(|U|, p) = C_{|U|}^k * p^{|U|} * (1-p)^{|U|-k} \quad (1)$$

и график функции биномиального распределения:

$$B_k(|U|, p) = \sum_{i=1}^{k} b_i(|U|, p). \quad (2)$$

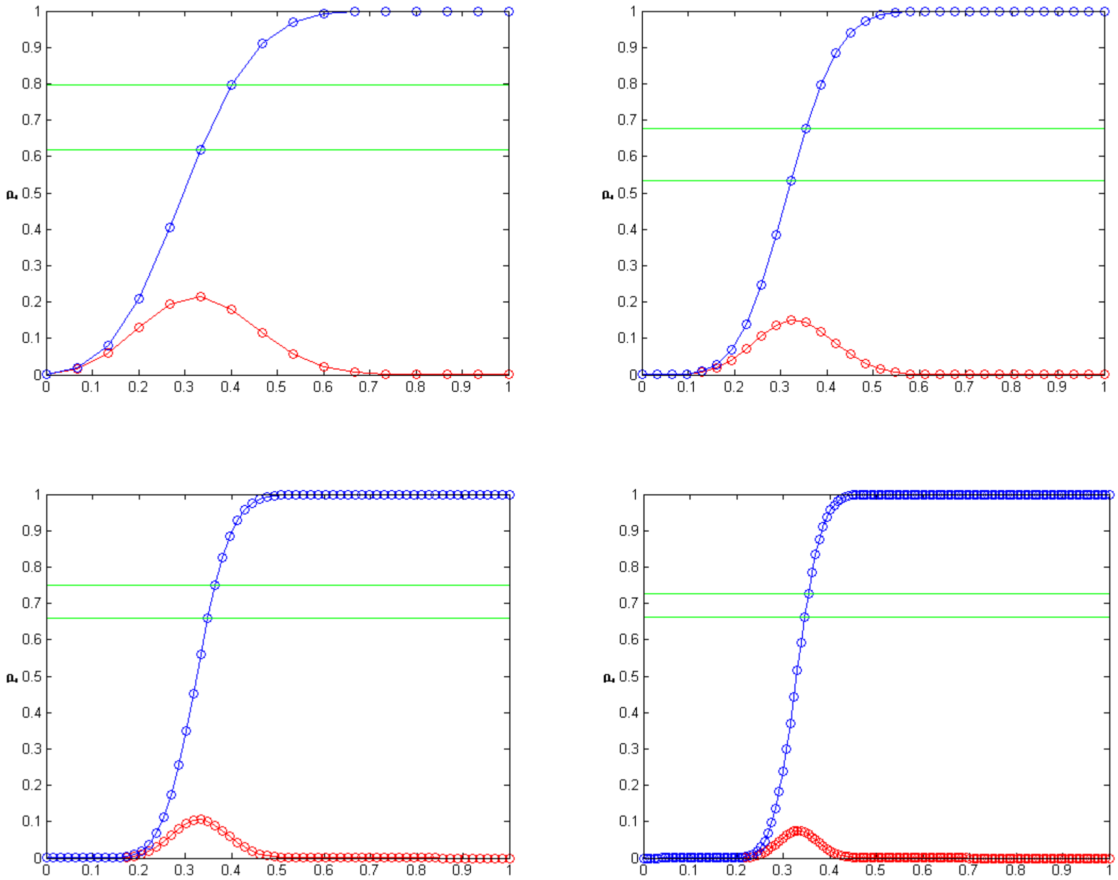

Рисунок 1. Визуализация асимптотики семейства средневероятных событий в 4 схемах по $N = 2^c - 1, c = 4, 5, 6, 7$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $p = 1/3$. График биномиальных вероятностей $b_k(N, p)$ изображен красным, график функции биномиального распределения $B_k(N, p)$ синим, граница семейства средневероятных событий изображена зеленым.

В [5] автором была дана визуализация средневероятного события для той же схемы Бернулли, значения функции распределения которой были найдены с помощью приближенной формулы Пуассона [6]:

$$b_k(|U|, p) \approx e^{\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (3)$$

Где подразумевается, что $|U|$ относительно велико, p относительно мало, а их произведение не велико и не мало $\lambda = |U| * p$. Когда мы говорим о каком-либо приближении, принято говорить и об оценке погрешности этого приближения, но перед автором не стоит такой задачи, так как уважаемый читатель может найти строгие рассуждения на эту тему в любом учебнике по теории вероятностей, например, в [6].

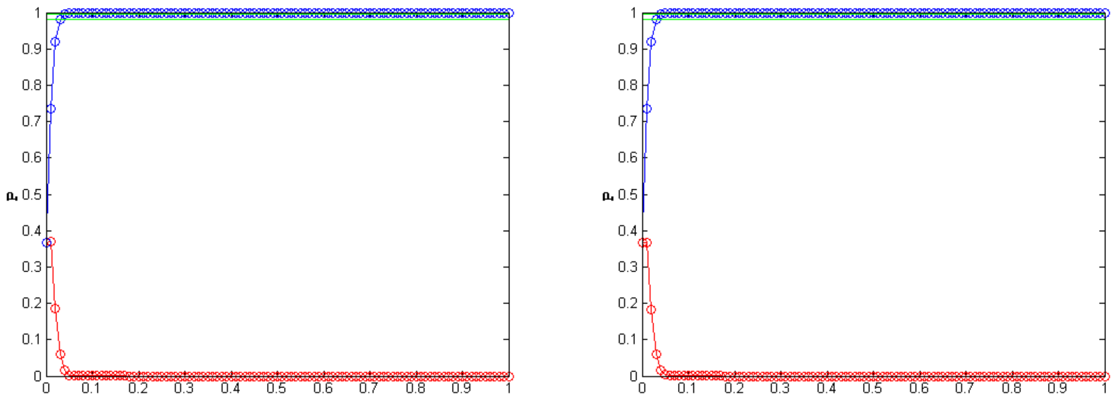

Рисунок 2. Графики биномиальных вероятностей (красный) и биномиального распределения (синий), полученные по формулам (1), (2) – (слева) – с параметрами $N = 100$, $p = 0.01$ и полученные с помощью (2), (3) – справа – с параметром $\lambda = 1$ и количеством испытаний $N = 100$.

На рисунке 2 приводится визуальное сравнение графика биномиальных вероятностей, построенного для визуализации средневероятного события, как описано выше, построенного с помощью (1), а также с помощью (2).

Литература

1. О.Ю.Воробьев. *Эвентология*. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 435с., 2007.
2. О.Ю.Воробьев. *Средневероятное событие для множества событий*. Труды XI международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, Красноярск: СФУ, с. 139–147, 2012.
3. Д.В.Семенова Н.А.Лукьянова, Я.В.Нартов. *Визуализация средневероятного события через матричное представление террасок-событий*. Труды XVI Международной ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам, Красноярск: СФУ, 205:145–158, 2012.
4. О.Ю.Воробьев. *Событийные средние в эвентологии, их асимптотические свойства, интерпретация и визуализация*. Труды XVI международной ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам, Красноярск: СФУ, 205:51–56, 2012.
5. Я.В.Нартов. *Событийная визуализация распределения Пуассона и его средневероятного события*. Труды XII международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, Красноярск: СФУ, 372:285–287, 2012.
6. В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Пер. с анг. М.: Мир, 499с., 1964.