Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(4), 533–543

УДК 512.54

Верхние отсечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации

Олег В. Кузьмин*
Иркутский государственный университет,
Гагарина, 20, Иркутск, 664003,
Россия

Марина В. Серёгина†
Забайкальский институт железнодорожного транспорта,
Магистральная, 11, Чита, 672040,
Россия

Получена 18.08.2010, окончательный вариант 15.09.2010, принята к печати 25.09.2010

Рассматриваются суммы элементов пирамид, называемых верхними отсечениями обобщенной пирамиды Паскаля. Найдены значения сумм и рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти суммы, а также перечислительные интерпретации изучаемых комбинаторных объектов.

Ключевые слова: обобщенная пирамида Паскаля, плоское сечение пирамиды, верхнее отсечение пирамиды, сумма элементов пирамиды, рекуррентные соотношения, развитие популяции, покрытия прямоугольников.

1. Обобщенная пирамида Паскаля и ее сечения

Обобщенной пирамидой Паскаля ($\mathcal{V}$-пирамидой) называется (см. [1]) бесконечный трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V\left(n,k,l\right)=\alpha_{n,k-1,l}V\left(n-1,k-1,l\right)+\beta_{n,k,l-1}V\left(n-1,k,l-1\right)+\gamma_{n,k,l}V\left(n-1,k,l\right), \quad (1)$$

с граничными условиями $V(0,0,0)=V_0$; $V(n,k,l)=0$, если $\min(n,k,l,n-k-l)<0$.

Совместим вершину $\mathcal{V}$-пирамиды с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а ее элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты. При этом числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами $\mathcal{V}$-пирамиды, которая будет ограничена плоскостями $k=0$, $l=0$ и $n-k-l=0$.

Рассмотрим произвольное плоское сечение $\mathcal{V}$-пирамиды, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат, через φ и ψ соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид

$$n+\operatorname{tg}\varphi\cdot k+\operatorname{tg}\psi\cdot l=\text{const}. \quad (2)$$

Нумеруем все параллельные между собою сечения $\mathcal{V}$-пирамиды, заданные уравнением (2), начиная от вершины пирамиды, и рассматриваем последовательность $\{S_N\left(\operatorname{tg}\varphi,\operatorname{tg}\psi\right)\}$, $N\in\mathbf{N_0}$, сумм элементов таких сечений.

*quzminov@mail.ru
†mseryogina@mail.ru

Пусть $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{p_1}{q_1}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{p_2}{q_2}$, $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}$, $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$. Полагаем $\dfrac{p_i}{q_i} > -1$, $i = 1, 2$, тогда треугольник сечения конечен и уравнение N-го плоского сечения $\mathcal{V}$-пирамиды принимает вид

$$n + \frac{p_1}{q_1}k + \frac{p_2}{q_2}l = \frac{N}{\text{НОК}\,(q_1, q_2)}. \tag{3}$$

Обозначим $q =$НОК(q_1, q_2) и рассмотрим сумму

$$S_N\left(\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\right),\ p_1, p_2 \in \mathbf{Z},\ q_1, q_2 \in \mathbf{N},\ \frac{p_i}{q_i} > -1,\ i = 1, 2, \tag{4}$$

элементов N-го плоского сечения $\mathcal{V}$-пирамиды.

Лемма 1. *Значение суммы (4) задается равенством*

$$S_N\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{N}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right). \tag{5}$$

Доказательство. Уравнение плоскости N-го сечения $\mathcal{V}$-пирамиды с параметрами $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{p_1}{q_1}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{p_2}{q_2}$, содержащего элементы $V\,(n, k, l)$, имеет вид (3).

Для элемента $V\left(\frac{N}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right)$ получаем

$$\left(\frac{N}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r\right) + \frac{p_1}{q_1}\cdot r + \frac{p_2}{q_2}\cdot m = \frac{N}{q}.$$

Таким образом, все элементы вида $V\left(\frac{N}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right)$ содержатся в плоскости сечения, заданного уравнением (3). Никаких других элементов $\mathcal{V}$-пирамиды в этой плоскости нет, т.к. рассмотрены все возможные целые неотрицательные значения величин m и r, которые являются соответственно ординатами и аппликатами элементов $\mathcal{V}$-пирамиды, расположенных в узлах целочисленной решетки первого октанта.

Поскольку $\mathcal{V}$-пирамида ограничена плоскостями $k = 0$, $l = 0$ и $n - k - l = 0$, то точки пересечения этих плоскостей с плоскостью сечения определяют вершины полученного треугольника, а именно элементы $V\left(\frac{N}{q}, 0, 0\right)$, $V\left(\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}, 0, \frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}\right)$ и $V\left(\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}, \frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}, 0\right)$, которые, в свою очередь, задают верхние и нижние пределы суммирования.

Следовательно, сумма (4) задается равенством (5). □

2. Верхние отсечения обобщенной пирамиды Паскаля

N-м верхним отсечением $\mathcal{V}$-пирамиды (N-й $\mathcal{U}$-пирамидой) с параметрами $\dfrac{p_1}{q_1}$ и $\dfrac{p_2}{q_2}$, где $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}, q_1, q_2 \in \mathbf{N}, \dfrac{p_i}{q_i} > -1, i = 1, 2$, будем называть конечный трехгранный пирамидальный массив элементов $\mathcal{V}$-пирамиды, которые для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1) с граничными условиями $V(0, 0, 0) = V_0$; $V(n, k, l) = 0$, если $\min\left(n, k, l, n - k - l, \frac{N}{q} - \left(n + \frac{p_1}{q_1}k + \frac{p_2}{q_2}l\right)\right) < 0$, $q =$НОК(q_1, q_2).

Таким образом, $\mathcal{U}$-пирамида совпадает с верхней частью $\mathcal{V}$-пирамиды, причем основанием N-й $\mathcal{U}$-пирамиды служит N-ое плоское сечение $\mathcal{V}$-пирамиды, и номера рассматриваемых $\mathcal{U}$-пирамид совпадают с номерами соответствующих сечений $\mathcal{V}$-пирамиды.

Рассмотрим сумму

$$U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\right),\ p_1,p_2\in\mathbf{Z},\ q_1,q_2\in\mathbf{N},\ \frac{p_i}{q_i}>-1,\ i=1,2 \tag{6}$$

элементов N-й $\mathcal{U}$-пирамиды.

Поскольку

$$U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)=\sum_{g=0}^{N}S_g\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right),$$

где $S_g\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)$ задается равенством (5), то справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Значение суммы (6) задается равенством*

$$U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)=\sum_{g=0}^{N}\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]}V\left(\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right). \tag{7}$$

3. Рекуррентные соотношения

Пусть X — сумма элементов вида $V(n,k,l)$. Введем оператор $\odot w_{a,b,c},\ a,b,c\in\odot_0$, который каждому слагаемому вида $V(n,k,l)$ суммы X ставит в соответствие слагаемое вида $w_{n+a,k+b,l+c}\cdot V(n,k,l)$ суммы $\odot w_{a,b,c}X$.

Рассмотрим последовательность сумм

$$\left\{U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\right)\right\},\ p_1,p_2\in\mathbf{Z},\ q_1,q_2\in\mathbf{N},\ \frac{p_i}{q_i}>-1,\ i=1,2. \tag{8}$$

Для частично упорядоченного множества $\{a,b,c\}$ символом $\mathrm{mid}\,(a,b,c)$ будем обозначать его "средний" элемент, которому предшествует минимальный и следует максимальный элементы этого множества.

Обозначим:

$$U_N=U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right),$$

$$M_n=\min\left(q,\frac{q}{q_1}\left(p_1+q_1\right),\frac{q}{q_2}\left(p_2+q_2\right)\right),$$

$$M_x=\max\left(q,\frac{q}{q_1}\left(p_1+q_1\right),\frac{q}{q_2}\left(p_2+q_2\right)\right),$$

$$M_d=\mathrm{mid}\left(q,\frac{q}{q_1}\left(p_1+q_1\right),\frac{q}{q_2}\left(p_2+q_2\right)\right).$$

Теорема 1. *Последовательность сумм (8) удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$U_N=\odot\alpha_{1,0,0}U_{N-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)}+\odot\beta_{1,0,0}U_{N-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)}+\odot\gamma_{1,0,0}U_{N-q}+V_0 \tag{9}$$

с начальными условиями

$$U_0=U_1=U_2=\ldots=U_{M_n-1}=V_0;$$

$U_I,\ I=M_n,\ldots,M_d-1,$ *задаются соотношениями*

$$U_I=\begin{cases}\odot\alpha_{1,0,0}U_{I-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)}+V_0, & \textit{если}\quad M_n=\frac{q}{q_1}\left(p_1+q_1\right),\\ \odot\beta_{1,0,0}U_{I-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)}+V_0, & \textit{если}\quad M_n=\frac{q}{q_2}\left(p_2+q_2\right),\\ \odot\gamma_{1,0,0}U_{I-q}+V_0, & \textit{если}\quad M_n=q;\end{cases} \tag{10}$$

U_J, $J = M_d, \ldots, M_x - 1$, задаются соотношениями

$$U_J = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}U_{J-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}U_{J-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} + V_0, & \text{если} \quad M_x = q, \\ \odot\alpha_{1,0,0}U_{J-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{J-q} + V_0, & \text{если} \quad M_x = \frac{q}{q_2}(p_2+q_2), \\ \odot\beta_{1,0,0}U_{J-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{J-q} + V_0, & \text{если} \quad M_x = \frac{q}{q_1}(p_1+q_1). \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. В силу леммы 2 последовательно имеем

$$U_0 = \sum_{g=0}^{0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) = V(0,0,0) = V_0,$$

$$U_1 = \sum_{g=0}^{1} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) = V(0,0,0) + V\left(\frac{1}{q}, 0, 0\right) = V_0,$$

$$U_2 = \sum_{g=0}^{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= V(0,0,0) + V\left(\frac{1}{q}, 0, 0\right) + V\left(\frac{2}{q}, 0, 0\right) = V_0,$$

$$\ldots$$

$$U_{M_n-1} = \sum_{g=0}^{M_n-1} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= V(0,0,0) + \sum_{g=1}^{M_n-1} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) = V_0.$$

Получили начальные условия $U_0 = U_1 = U_2 = \ldots = U_{M_n-1} = V_0$.

Докажем справедливость соотношений (10).

Здесь и далее в доказательстве положим $\frac{q}{q_1}(p_1+q_1) > \frac{q}{q_2}(p_2+q_2) > q$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично).

Следовательно, $M_n = q$, $M_d = \frac{q}{q_2}(p_2+q_2)$, $M_x = \frac{q}{q_1}(p_1+q_1)$.

Пусть $I = q$, тогда

$$U_q = \sum_{g=0}^{q} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= \sum_{g=0}^{q} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) = V(0,0,0) + \sum_{g=1}^{q} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) = V_0 + \gamma_{1,0,0}V_0.$$

Таким образом, сумма U_q удовлетворяет соотношениям (10), так как действительно $U_q = \odot\gamma_{1,0,0}U_0 + V_0 = \odot\gamma_{1,0,0}V(0,0,0) + V_0 = \gamma_{1,0,0}V_0 + V_0$.

Предположим, что рекуррентные соотношения (10) выполняются при $I = q+1, \dots, i-1$; $i \leqslant \frac{q}{q_2}(p_2+q_2) - 1$, то есть

$$U_{i-q} = \sum_{g=0}^{i-q} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) = \sum_{g=0}^{i-q} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right),$$

$$U_{i} = \sum_{g=0}^{i} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) = \sum_{g=0}^{i} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right).$$

Тогда

$$\odot\gamma_{1,0,0} U_{i-q} + V_0 = \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{i-q} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + V_0 =$$

$$= \left(\odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{i-q-1} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + \odot\gamma_{1,0,0} V\left(\frac{i}{q} - 1, 0, 0\right)\right) + V_0 =$$

$$= \left(\odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{i-q-1} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + V_0\right) + \gamma_{\frac{i}{q},0,0} V\left(\frac{i}{q} - 1, 0, 0\right) =$$

$$= (\odot\gamma_{1,0,0} U_{i-q-1} + V_0) + V\left(\frac{i}{q}, 0, 0\right) = U_{i-1} + V\left(\frac{i}{q}, 0, 0\right) = U_i,$$

что и требовалось доказать для $I = M_n, \dots, M_d - 1$.

Докажем справедливость соотношений (11).

Пусть $J = \frac{q}{q_2}(p_2+q_2)$, тогда

$$U_{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} = \sum_{g=0}^{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= \sum_{g=0}^{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + V\left(\frac{p_2}{q_2} + 1, 0, 0\right) + V(1, 0, 1) =$$

$$= U_{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + V\left(\frac{p_2}{q_2} + 1, 0, 0\right) + \beta_{1,0,0} V_0.$$

Таким образом, $U_{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)}$ удовлетворяет соотношениям (11), так как действительно

$$\odot\beta_{1,0,0} U_0 + \odot\gamma_{1,0,0} U_{\frac{qp_2}{q_2}} + V_0 =$$

$$= \odot\beta_{1,0,0} V(0,0,0) + \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_2}{q_2}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) + V_0 =$$

$$= \beta_{1,0,0} V_0 + \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_2}{q_2}} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + V_0 =$$

$$= \beta_{1,0,0} V_0 + \left(\odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_2}{q_2}-1} V\left(\frac{g}{q}, 0, 0\right) + \odot\gamma_{1,0,0} V\left(\frac{p_2}{q_2}, 0, 0\right)\right) + V_0 =$$

$$= \left(\odot\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_2}{q_2}-1} V\left(\frac{g}{q},0,0\right) + V_0\right) + \gamma_{\frac{p_2}{q_2}+1,0,0} V\left(\frac{p_2}{q_2},0,0\right) + \beta_{1,0,0}V_0 =$$

$$= \left(U_{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + V_0\right) + V\left(\frac{p_2}{q_2}+1,0,0\right) + \beta_{1,0,0}V_0 = U_{\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)}.$$

Предположим, что соотношения (11) выполняются при $J = \dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)+1,\ldots,j-1$; $j \leqslant \dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1$, то есть

$$U_{j-q} = \sum_{g=0}^{j-q} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{j-q-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(j-q)}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right),$$

$$U_{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} = \sum_{g=0}^{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 j}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1\right),$$

$$U_j = \sum_{g=0}^{j} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) = U_{j-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 j}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right).$$

Имеем

$$\odot\beta_{1,0,0}U_{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{j-q} + V_0 =$$

$$= \odot\beta_{1,0,0}U_{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \odot\beta_{1,0,0} \sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 j}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1\right) +$$

$$+ \odot\,\gamma_{1,0,0}U_{j-q-1} + \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(j-q)}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right) + V_0 =$$

$$= \left(\odot\beta_{1,0,0}U_{j-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{j-q-1} + V_0\right) +$$

$$+ \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 j}{q(p_2+q_2)}\right]} \beta_{\frac{j}{q}-\frac{p_2}{q_2}m,0,m-1} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(j-q)}{q(p_2+q_2)}\right]} \gamma_{\frac{j}{q}-\frac{p_2}{q_2}m,0,m} V\left(\frac{j}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right)\right) =$$

$$= U_{j-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 j}{q(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{j}{q} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right) = U_j,$$

что и требовалось доказать для $J = M_d, \ldots, M_x - 1$.

Докажем теперь справедливость рекуррентного соотношения (9).

Пусть $N = \dfrac{q}{q_1}(p_1 + q_1)$, тогда

$$U_{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} = \sum_{g=0}^{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{p_1}{q_1} + 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right) + \alpha_{1,0,0}V_0.$$

Таким образом, $U_{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (9), так как действительно

$$\odot\alpha_{1,0,0}U_0 + \odot\beta_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1} - \frac{qp_2}{q_2}} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1}} + V_0 =$$

$$= \odot\alpha_{1,0,0}V(0,0,0) + \odot\beta_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_1}{q_1} - \frac{qp_2}{q_2}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) +$$

$$+ \odot\,\gamma_{1,0,0} \sum_{g=0}^{\frac{qp_1}{q_1}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) + V_0 =$$

$$= \odot\alpha_{1,0,0}V_0 + \left(\odot\beta_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1} - \frac{qp_2}{q_2} - 1} + \odot\beta_{1,0,0} \sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1\right)\right) +$$

$$+ \left(\odot\gamma_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1} - 1} + \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 p_1}{q_1(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right)\right) + V_0 =$$

$$= \odot\alpha_{1,0,0}V_0 + \left(\odot\beta_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1} - \frac{qp_2}{q_2} - 1} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{\frac{qp_1}{q_1} - 1} + V_0\right) +$$

$$+ \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} \beta_{\frac{p_1}{q_1} + 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1} V\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m-1\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 p_1}{q_1(p_2+q_2)}\right]} \gamma_{\frac{p_1}{q_1} + 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m} V\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right)\right) =$$

$$= \odot\alpha_{1,0,0}V_0 + U_{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} V\left(\frac{p_1}{q_1} + 1 - \frac{p_2}{q_2}m, 0, m\right) = U_{\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)}.$$

Предположим, что рекуррентное соотношение (9) выполняется при $N = \frac{q}{q_1}(p_1+q_1) + 1, \ldots, n-1$; $n \geqslant \frac{q}{q_1}(p_1+q_1)+1$, то есть

$$U_{n-q} = \sum_{g=0}^{n-q} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{n-q-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(n-q)}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1(n-q)}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right),$$

$$U_{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} = \sum_{g=0}^{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)} - \frac{q_1(p_2+q_2)}{q_2(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m-1\right),$$

$$U_{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} = \sum_{g=0}^{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)} - \frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=1}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r-1, m\right),$$

$$U_n = \sum_{g=0}^{n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) =$$

$$= U_{n-1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right).$$

Имеем

$$\odot\alpha_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{n-q} + V_0 =$$

$$= \odot\alpha_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1} + \odot\alpha_{1,0,0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)} - \frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=1}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r-1, m\right) +$$

$$+ \odot\beta_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \odot\beta_{1,0,0} \sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)} - \frac{q_1(p_2+q_2)}{q_2(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m-1\right) +$$

$$+ \odot\gamma_{1,0,0}U_{n-q-1} + \odot\gamma_{1,0,0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(n-q)}{q(p_2+q_2)}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1(n-q)}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{n}{q} - 1 - \frac{p_2}{q_2}m - \frac{p_1}{q_1}r, r, m\right) + V_0 =$$

$$= \left(\odot\alpha_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_1}(p_1+q_1)-1} + \odot\beta_{1,0,0}U_{n-\frac{q}{q_2}(p_2+q_2)-1} + \odot\gamma_{1,0,0}U_{n-q-1} + V_0\right) +$$

$$+\left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}-\frac{q_2(p_1+q_1)}{q_1(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=1}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}\right]}\alpha_{\frac{n}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r-1,m}V\left(\frac{n}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r-1,m\right)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}-\frac{q_1(p_2+q_2)}{q_2(p_1+q_1)}\right]}\beta_{\frac{n}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m-1}V\left(\frac{n}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m-1\right)+$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2(n-q)}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1(n-q)}{q(p_1+q_1)}\right]}\gamma_{\frac{n}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m}V\left(\frac{n}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)\right)=$$

$$=U_{n-1}+\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 n}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 n}{q(p_1+q_1)}\right]}V\left(\frac{n}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)=U_n.$$

Последнее равенство следует из рекуррентного соотношения (1), справедливого для элементов $\mathcal{V}$-пирамиды. □

Замечание. *При доказательстве теоремы 1 также использовалось рекуррентное соотношение, справедливое при целых неотрицательных n, k, для элементов обобщенного треугольника Паскаля [1]:*

$$V(n,k)=\alpha_{n,k-1}V(n-1,k-1)+\beta_{n,k}V(n-1,k),$$

с граничными условиями $V(0,0)=V_0$; $V(n,k)=0$, если $\min(n,k,n-k)<0$.

4. Перечислительные интерпретации

Перейдем к обсуждению некоторых перечислительных интерпретаций изучаемых комбинаторных объектов.

4.1. Сумма элементов $\mathcal{U}$-пирамиды допускает следующую биологическую интерпретацию, обобщающую, приведенную в [1].

Пусть популяция состоит из одинаковых элементов, обладающих двумя свойствами: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Развитие популяции рассматриваем дискретно по итогам его последовательных этапов, номера которых $N \geqslant 0$, и по двойным номерам элементов (r,m) — степеням обладания элементом свойствами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно ($r,m \geqslant 0$, $r+m \leqslant N$). Пусть элементы $(r+1,m)$-го вида порождаются по прошествии $\dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)$ этапов развития популяции, элементы $(r,m+1)$-го вида порождаются по прошествии $\dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)$ этапов развития популяции, а элементы (r,m)-го вида порождаются по прошествии q этапов развития популяции. Кроме того, пусть на каждом этапе развития популяции добавляются элементы $(0,0)$-го вида. То есть ориентируемся на эволюцию без отступлений. Тогда числа $V\left(\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)$ и операторы $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$ и $\odot\gamma_{1,0,0}$ в соотношениях (9) — (11) могут быть интерпретированы следующим образом:

$V\left(\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)$ — объем (количество) элементов (r,m)-го вида в итоге N-го этапа;

$\odot\alpha_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\alpha_{\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V\left(\frac{g}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)$, в котором элементы (r,m)-го вида породили элементы $(r+1,m)$-го вида по прошествии $\dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)$ этапов развития популяции;

$\odot\beta_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\beta_{\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V\left(\frac{g}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)$, в котором элементы (r,m)-го вида породили элементы $(r,m+1)$-го вида по прошествии $\dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)$ этапов развития популяции;

$\odot\gamma_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\gamma_{\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m}$, которые представляют собой доли элементов (r,m)-го вида от объема $V\left(\frac{g}{q}-1-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)$, по прошествии q этапов развития популяции.

V_0 — объем элементов $(0,0)$-го вида в итоге каждого этапа.

Если задано V_0 и известны весовые коэффициенты, производимые операторами $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$ и $\odot\gamma_{1,0,0}$, то по формулам (7), (9) — (11) можно рассчитать общий объем популяции и присущее ей распределение по видам элементов на каждом из этапов развития.

Общий объем популяции U_N в итоге N-го этапа будет равен:

$$U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)=\sum_{g=0}^{N}\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]} V\left(\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right), \tag{12}$$

где $N\geqslant 1$.

4.2. В частном случае, если в соотношении (12)

$$V\left(\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r,r,m\right)=\binom{\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r}{r,m},$$

где $\binom{n}{k,l}=\dfrac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}$, получаем интерпретацию сумм $U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)$ верхних отсечений пирамиды Паскаля.

Рассматриваются неполные покрытия прямоугольника размером $1\times N$ прямоугольниками размером $1\times q$, $1\times\dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)$, $1\times\dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)$, $p_1,p_2\in\mathbf{Z}$, $q_1,q_2,N\in\mathbf{N}$, $\dfrac{p_i}{q_i}>-1$, $i=1,2$, не перекрывающими друг друга. Высота покрывающих прямоугольников совпадает с высотой покрываемого прямоугольника. Два покрытия считаются различными, если они отличаются либо размером непокрытой области, которая остается всегда с одной стороны (например, слева), либо порядком расположения, либо составом покрывающих элементов. Если $q=\dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)$ и/или $q=\dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)$ и/или $\dfrac{q}{q_1}(p_1+q_1)=\dfrac{q}{q_2}(p_2+q_2)$, то соответствующие прямоугольники должны быть разных цветов.

Число различных неполных покрытий равно

$$U_N\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)=\sum_{g=0}^{N}\sum_{m=0}^{\left[\frac{q_2 g}{q(p_2+q_2)}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{q_1 g}{q(p_1+q_1)}\right]}\binom{\frac{g}{q}-\frac{p_2}{q_2}m-\frac{p_1}{q_1}r}{r,m},\quad N\geqslant 1.$$

4.3. Последовательность $\left\{\sum_{k=0}^{N}3^k\right\}=4,\ 13,\ 40,\ 121,\ 364,\ 1093,\ \ldots$, которая образуется в пирамиде Паскаля при $\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{p_2}{q_2}=0$, представляет собой числа различных неполных покрытий прямоугольника размером $1\times N$ квадратами трех разных цветов размером 1×1.

Последовательность сумм чисел Якобсталя $\left\{\sum\limits_{k=0}^{N}J_{k+1}\right\}=2,\ 5,\ 10,\ 21,\ 42,\ 85,\ 170,\ 341,\ \ldots$ (см. [2]), которая образуется в пирамиде Паскаля при $\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{p_2}{q_2}=1$, представляет собой числа различных неполных покрытий прямоугольника размером $1 \times N$ квадратами размером 1×1 и прямоугольниками двух разных цветов размером 1×2.

Последовательность сумм чисел Трибоначчи $\left\{\sum\limits_{k=0}^{N} t_k\right\} = 2, 4, 8, 15, 28, 52, 96, 177, \ldots$ (см. [3, 4]), которая образуется в пирамиде Паскаля при $\dfrac{p_1}{q_1} = 2$, $\dfrac{p_2}{q_2} = 1$ или при $\dfrac{p_1}{q_1} = 1$, $\dfrac{p_2}{q_2} = 2$, представляет собой числа различных неполных покрытий прямоугольника размером $1 \times N$ квадратами размером 1×1 и прямоугольниками размером 1×2 и 1×3.

Последовательность сумм чисел Пелля $\left\{\sum\limits_{k=0}^{N} P_{k+1}\right\} = 3, 8, 20, 49, 119, 288, 696, \ldots$ (см., напр., [1]), которая образуется в пирамиде Паскаля при $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} = -\dfrac{1}{2}$, представляет собой числа различных неполных покрытий прямоугольника размером $1 \times N$ прямоугольниками размером 1×2 и квадратами двух разных цветов размером 1×1.

Список литературы

[1] I.N.Herstein, Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 1104–1110.

[2] J.Zhang, W.Yu, Jordan derivations of triangular algebras, *Linear Algebra Appl.*, **419**(2006), 251–255.

[3] J.M.Cusack, Jordan derivations on rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**(1975), №2, 321–324.

[4] N.Nader, M.Ghosseiri, Jordan derivations of some classes of matrix rings, *Taiwanese J. of Math.*, **11**(2007), №1, 51–62.

The Upper Units of Generalized Pascal's Pyramid and its Interpretations

Oleg V. Kuzmin
Marina V. Seryogina

The sums of upper units' elements of generalized Pascal's pyramid are considering. The values of sums and recurrence relations for these sums together with enumerative interpretations of combinatorial objects under study were found.

Keywords: generalized Pascal's pyramid, plane section of pyramid, upper unit of pyramid, sum of pyramid elements, recurrence relations, evolution of population, tile of rectangle.