

УДК 541.124

## Параметрический анализ нелинейной математической модели Вольтера-Сальникова

Светлана Б. Цыбенова\*

Московский гуманитарный педагогический институт,  
Садовая-Самотечная, 8, Москва, 127051,  
Россия

Получена 18.07.2010, окончательный вариант 25.08.2010, принята к печати 10.09.2010

*В работе проведен параметрический анализ нелинейной модели Вольтера-Сальникова. Построены зависимости стационарных состояний от безразмерных параметров, бифуркационные кривые, параметрические и фазовые портреты, временные зависимости.*

*Ключевые слова: динамическая модель, бифуркации, параметрические и фазовые портреты, автоколебания.*

### Введение

В теории горения и теоретических основах химической технологии базовыми моделями являются модели непрерывного реактора идеального смешения (модели Зельдовича-Семенова и Ариса-Амундсона) [1, 2]. В данной работе проводится параметрический анализ еще одного класса безразмерных моделей, введенных в работах Б.В.Вольтера и И.Е.Сальникова по моделированию динамики процессов полимеризации [3]. Названные три класса моделей отвечают трем временным масштабам изучаемых процессов. Процессы горения характеризуются временами порядка  $10^{-3}$  с, химико-технологические процессы —  $10^0$  с, а полимеризации —  $10^3$  с. Такое существенное различие приводит к трем системам обезразмеривания, каждая из которых наиболее адекватно отвечает физико-химии и динамике процесса.

Следуя Вольтеру-Сальникову [3], сделаем несколько другое обезразмеривание модели непрерывного реактора идеального смешения [1] и проведем ее параметрический анализ.

### 1. Математическая модель

При рассмотрении реакции первого порядка  $A \rightarrow B$ , протекающей в реакторе идеального смешения, авторы [3] предложили следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{hS + C_p \rho q}{k^0 V C_p \rho}, & y_0 &= \frac{R(hST_x + C_p \rho q T_0)}{E(hS + C_p \rho q)}, & \lambda &= \frac{q}{k^0 V}, \\ x_0 &= \frac{(-\Delta H)R}{EC_p \rho} X^0, & x &= \frac{X}{X^0}, & y &= \frac{RT}{E}, & \tau &= k^0 t. \end{aligned} \quad (1)$$

Используя формулы (1), запишем модель реактора идеального смешения [1] в безразмерном виде:

\*tsybenova@mail.ru

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -x \exp(-1/y) + \lambda(x_0 - x) = f_1(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x \exp(-1/y) + \mu(y_0 - y) = f_2(x, y).\end{aligned}\tag{2}$$

Схема параметрического анализа включает нахождение стационарных состояний (ст. с.), анализ их устойчивости, построение параметрических зависимостей ст. с., бифуркационных кривых, параметрических и фазовых портретов, временных зависимостей [2].

Ст. с. системы (2) определяются как решения системы нелинейных уравнений:  $f_1(x, y) = 0$ ,  $f_2(x, y) = 0$ , которую удается в результате исключения неизвестных привести к одному уравнению [4]. После исключения  $x$  уравнение стационарности можно записать в виде

$$G(y, \mu, \lambda, x_0, y_0) = \left(x_0 + \frac{\mu}{\lambda}(y_0 - y)\right) e(y) + \mu(y_0 - y) = 0\tag{3}$$

или, как обычно, в терминах баланса тепловыделения и теплоотвода  $F(y) = P(y)$ , где  $e(y) = \exp(-1/y)$ , функции тепловыделения и теплоотвода следующие

$$F(y) = \left(x_0 + \frac{\mu}{\lambda}(y_0 - y)\right) e(y), \quad P(y) = \mu(y - y_0).$$

Для исследования условий устойчивости ст. с. выпишем элементы матрицы Якоби для (2) [5]:

$$\begin{aligned}a_{11} &= -e(y) - \lambda, & a_{12} &= -xe(y)/y^2, \\ a_{21} &= e(y), & a_{22} &= xe(y)/y^2 - \mu.\end{aligned}\tag{4}$$

Коэффициенты характеристического уравнения ( $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ ) определяются так:

$$\sigma = a_{11} + a_{22} = \left(x_0 + \frac{\mu}{\lambda}(y_0 - y)\right) \frac{e(y)}{y^2} - e(y) - \lambda - \mu,\tag{5}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \mu(e(y) + \lambda) - \frac{\lambda e(y)}{y^2} \left(x_0 + \frac{\mu}{\lambda}(y_0 - y)\right),\tag{6}$$

где  $\sigma$  — след матрицы Якоби,  $\Delta$  — якобиан. Устойчивость ст. с. определяется корнями характеристического уравнения.

## 2. Параметрические зависимости

Отметим, что параметры модели входят в уравнение стационарности (3) линейно. Используя эту специфику модели (2), можно выписать обратные параметрические зависимости из (3) в явном виде:

$$\begin{aligned}x_0(y) &= (y - y_0) \left( \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{e(y)} \right), \\ \mu(y) &= \frac{\lambda x_0 e(y)}{(y - y_0)(e(y) + \lambda)}, \\ \lambda(y) &= \frac{\mu e(y)(y - y_0)}{x_0 e(y) - \mu(y - y_0)}, \\ y_0(y) &= \frac{\mu y(e(y) + \lambda) - \lambda x_0 e(y)}{\mu(e(y) + \lambda)}.\end{aligned}\tag{7}$$

Для построения зависимости стационарной концентрации от параметров записываем выражения в виде системы из двух уравнений, например:

$$\begin{aligned}
 (x, x_0) : \quad & x_0(y) = (y - y_0) \left( \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{e(y)} \right), \\
 & x(y, x_0(y)) = x_0(y) + \frac{\mu}{\lambda} (y_0 - y), \\
 (x, y_0) : \quad & y_0(y) = \frac{\mu y (e(y) + \lambda) - \lambda x_0 e(y)}{\mu (e(y) + \lambda)}, \\
 & x(y, y_0(y)) = x_0 + \frac{\mu}{\lambda} (y_0(y) - y).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Примеры построения параметрических зависимостей (7) и анализа влияния на них других параметров приведены на рис. 1, 2.

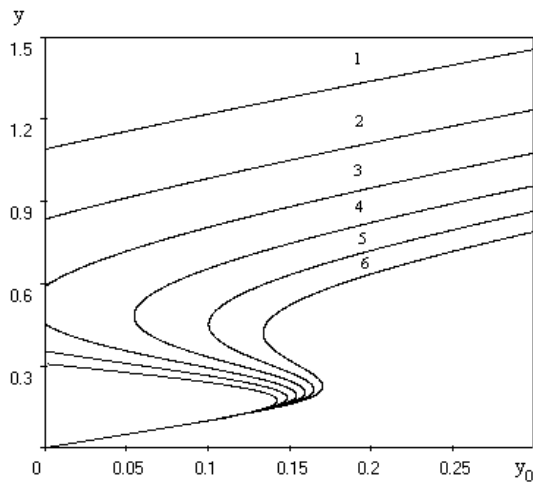


Рис. 1. Зависимости температуры от  $x_0$  при  $\mu = 0, 4$ ,  $y_0 = 0, 18$ , 1)  $\lambda = 0, 05$ ; 2) 0, 1; 3) 0, 2; 4) 0, 4; 5) 0, 6; 6) 0, 8

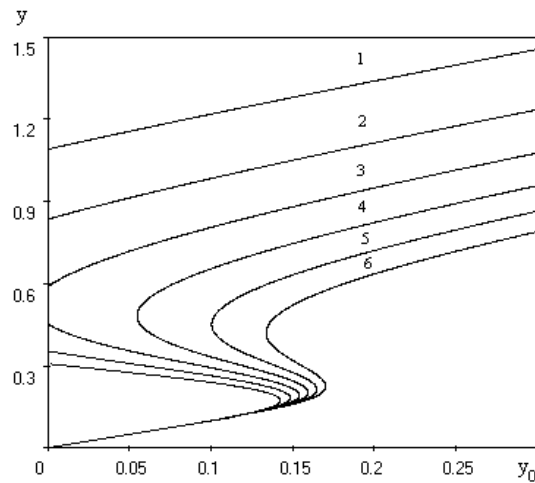


Рис. 2. Зависимости стационарной температуры от  $y_0$  при  $\lambda = 0, 15$ ,  $x_0 = 2, 5$ , 1)  $\mu = 0, 25$ ; 2) 0, 3; 3) 0, 35; 4) 0, 4; 5) 0, 45; 6) 0, 5

Использование явных выражений зависимостей ст. с. от параметров типа (7) позволяет построить и зависимости собственных значений матрицы Якоби в ст. с. от параметров.

### 3. Кривые кратности

Кривая кратности определяет область множественности ст. с. и задается уравнением  $\Delta = 0$ . Для построения кривых кратности, например, в плоскости выделенных параметров  $(\mu, \lambda)$  необходимо решить следующую систему нелинейных уравнений:

$$L_{\Delta} : \quad \begin{aligned} G(y, \mu, \lambda) &= 0, \\ \Delta(y, \mu, \lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим явное выражение  $\lambda(y, \mu)$  из (7) во второе уравнение системы (9) и получим выражение  $\mu(y)$ :

$$L_{\Delta}(\mu, \lambda) : \quad \begin{aligned} \mu(y) &= \frac{x_0 y^2 e(y)}{(y - y_0)^2}, \\ \lambda(y) &= \lambda(y, \mu(y)). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично выпишем  $L_{\Delta}$  для других плоскостей параметров:

$$\begin{aligned} L_{\Delta}(y_0, \lambda) : \quad & y_0(y) = y \left( 1 - \sqrt{x_0 e(y)/\mu} \right), \\ & \lambda(y) = \lambda(y, y_0(y)), \\ L_{\Delta}(x_0, \lambda) : \quad & x_0(y) = \frac{\mu(y - y_0)^2}{y^2 e(y)}, \\ & \lambda(y) = \lambda(y, x_0(y)), \\ L_{\Delta}(y_0, \mu) : \quad & y_0(y) = y(\lambda(1 - y) - ye(y))/\lambda, \\ & \mu(y) = \mu(y, y_0(y)), \\ L_{\Delta}(x_0, y_0) : \quad & y_0(y) = y(\lambda(1 - y) - ye(y))/\lambda, \\ & x_0(y) = x_0(y, y_0(y)). \end{aligned} \quad (11)$$

Некоторые примеры построения кривых кратности (10)–(11) в разных плоскостях безразмерных параметров даны на рис. 3, 4.

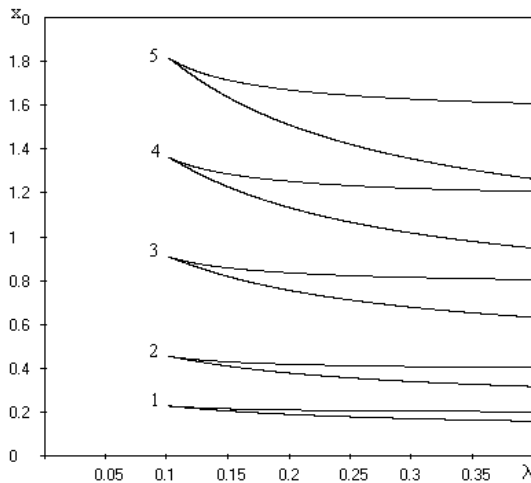


Рис. 3. Кривые кратности  $L_{\Delta}(\lambda, x_0)$  при  $y_0 = 0, 18, 1$   $\mu = 0, 05$ ; 2) 0, 1; 3) 0, 2; 4) 0, 3; 5) 0, 4

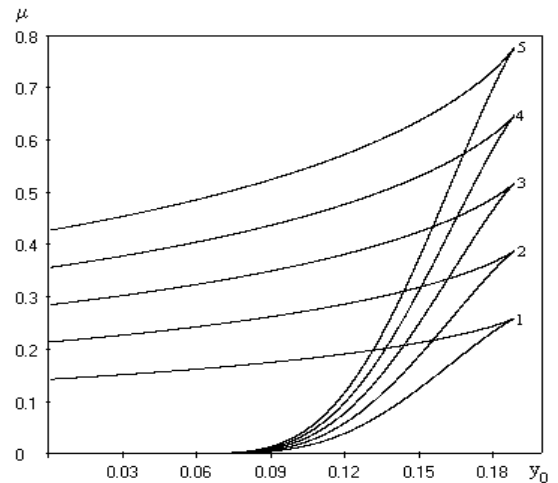


Рис. 4. Кривые кратности  $L_{\Delta}(y_0, \mu)$  при  $\lambda = 0, 15, 1$   $x_0 = 1$ ; 2) 1, 5; 3) 2; 4) 2, 5; 5) 3

#### 4. Кривые нейтральности

Кривая нейтральности ограничивает на плоскости параметров область неустойчивых ст.с. Выражения для построения кривых нейтральности выписываются из совместного решения

системы уравнений:

$$L_\sigma : \begin{cases} G(y, \mu, \lambda, x_0, y_0) = 0, \\ \sigma(y, \mu, \lambda, x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Некоторые выражения для кривой  $L_\sigma$  для разных плоскостей параметров имеют вид

$$\begin{aligned} L_\sigma(x_0, \lambda) : \quad & x_0(y) = \frac{\mu^2 C(y - y_0 - y^2)}{e(y)(\mu C - y^2(\mu + e(y)))}, \\ & \lambda(y) = \lambda(y, x_0(y)), \\ L_\sigma(y_0, x_0) : \quad & y_0(y) = y \left( 1 - \frac{y(e(y) + \lambda + \mu)}{\mu} \right), \\ & x_0(y) = x_0(y, y_0(y)), \\ L_\sigma(x_0, \mu) : \quad & x_0(y) = \frac{y^2 C(e(y) + \lambda)^2}{\lambda e(y)(y - y_0 + y^2)}, \\ & \mu(y) = \mu(y, x_0(y)), \\ L_\sigma(y_0, \mu) : \quad & y_0(y) = \frac{y(\lambda x_0 r(y)(1 - y) - y^2(e(y) + \lambda)^2)}{\lambda x_0 e(y) - y^2(e(y) + \lambda)^2}, \\ & \mu(y) = \mu(y, y_0(y)). \end{aligned} \quad (13)$$

Примеры построения кривых нейтральности (13) при варьировании третьего параметра даны на рис. 5, 6.

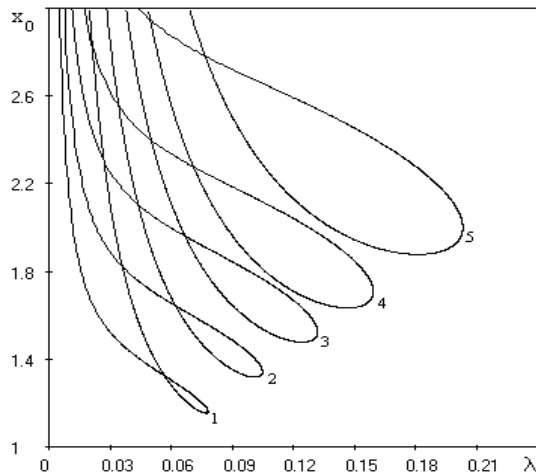


Рис. 5. Кривые нейтральности  $L_\sigma(\lambda, x_0)$  при  $y_0 = 0, 16$ , 1)  $\mu = 0, 2$ ; 2)  $0, 25$ ; 3)  $0, 3$ ; 4)  $0, 35$ ; 5)  $0, 43$

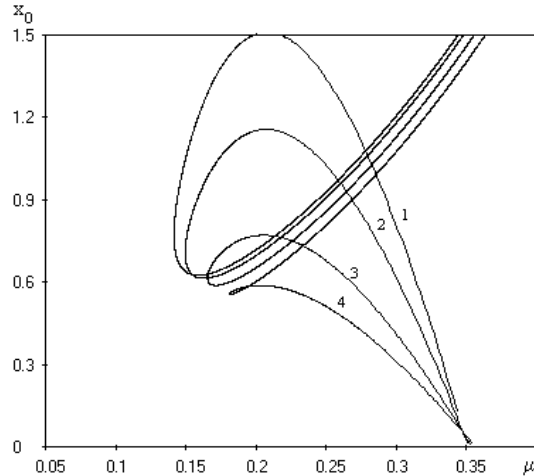


Рис. 6. Кривые нейтральности  $L_\sigma(\mu, x_0)$  при  $\lambda = 0, 35$ , 1)  $y_0 = 0, 15$ ; 2)  $0, 16$ ; 3)  $0, 18$ ; 4)  $0, 2$

## 5. Параметрические портреты

Взаимное расположение кривых кратности и нейтральности ст. с. определяет, так называемый параметрический портрет, который разбивает плоскость параметров на области,

различающиеся числом и типом устойчивости ст. с. Некоторые варианты параметрических портретов для модели Вольтера-Сальникова в соответствии с формулами (10)–(11), (13) приведены на рис. 7, 8. Явный вид соответствующих зависимостей дает возможность просто исследовать влияние третьих параметров на вид кривых  $L_\Delta$ ,  $L_\sigma$ .

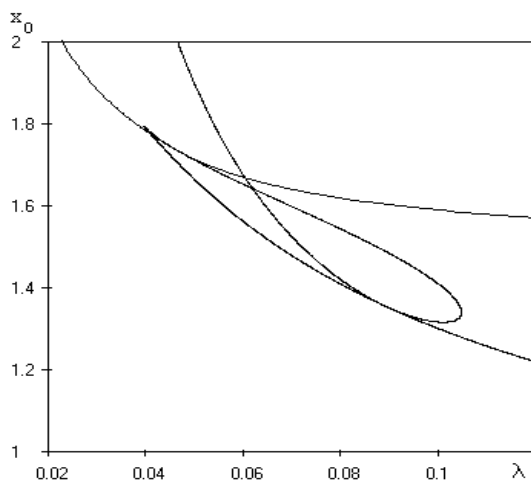


Рис. 7. Параметрический портрет на плоскости  $(\lambda, x_0)$  при  $y_0 = 0, 16$ ,  $\mu = 0, 25$

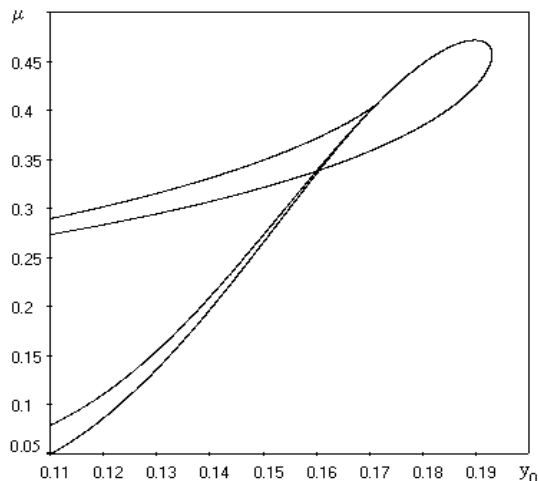


Рис. 8. Параметрический портрет на плоскости  $(y_0, \mu)$  при  $\lambda = 0, 07$ ,  $x_0 = 2, 2$

## 6. Фазовые портреты

В соответствии с параметрическим портретом системы (2) можно выделить несколько типов фазовых портретов. Наиболее характерные фазовые портреты для случаев единственности и множественности ст. с, существования автоколебаний представлены на рис. 9, 10.

Как видно, фазовые портреты, отвечающие единственному устойчивому (рис. 9) и единственному неустойчивому ст. с. (рис. 10), существенно разные. В первом случае динамическая система с любых начальных данных стабилизируется к устойчивому ст. с. При этом, правда, эта стабилизация не всегда монотонна — она может происходить с существенными динамическими забросами (бумеранг-эффект). Во втором случае с любых начальных данных решения модели стремятся к предельному циклу, который и характеризует незатухающие колебания. Этот предельный цикл является устойчивым. Расчет временных зависимостей  $x(t)$ ,  $y(t)$  позволяет получить оценки периода колебаний. Их амплитуда может быть оценена на основе соответствующих фазовых портретов.

## Заключение

Таким образом, в данной работе проведен параметрический анализ базовой математической модели теории полимеризации (модели Вольтера-Сальникова). Ограничением в части постановки задачи параметрического анализа является рассмотрение лишь локальных бифуркаций ст. с. Более тонкие эффекты глобальных бифуркаций (например, предельных циклов, петель сепаратрисы и т.д.) в работе не рассматриваются. Как показывает наш опыт, для практики инженерных расчетов уже в параметрическом портрете системы, который строится на основе кривых кратности и нейтральности, содержится достаточно много

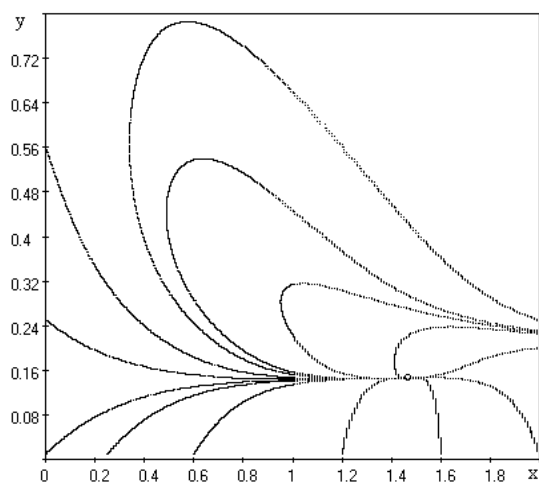


Рис. 9. Фазовый портрет для единственного устойчивого ст. с. при  $y_0 = 0,14$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $\lambda = 0,05$ ,  $x_0 = 1,5$

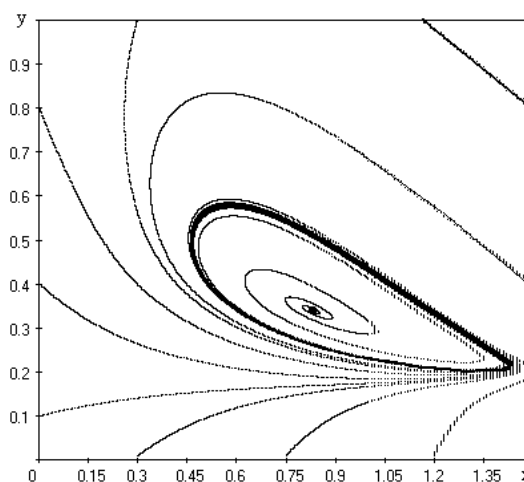


Рис. 10. Фазовый портрет для единственного неустойчивого ст. с. при  $y_0 = 0,165$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $\lambda = 0,05$ ,  $x_0 = 1,7$

информации о возможном динамическом поведении реактора. С этой точки зрения области параметров, где возможны более сложные бифуркации, слишком малы чтобы иметь практическое значение.

Использование специфики модели позволило получить выражения для кривых локальных бифуркаций в явном виде в различных плоскостях параметров. Для тех случаев, когда таких явных зависимостей получить не удастся, предложена и реализована графическая процедура построения кривых кратности и нейтральности ст. с. Процедура основана на анализе критических точек параметрических зависимостей при варьировании второго параметра. Построены зависимости собственных значений матрицы Якоби от параметров модели, которые позволяют анализировать характер устойчивости ст. с.

*Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию РФ в рамках проекта по аналитической ведомственной целевой программе "Развитие научного потенциала высшей школы" (2009–2010 годы), (грант №2.1.1/2104).*

## Список литературы

- [1] В.И.Быков, С.Б.Цыбенова, Параметрический анализ моделей реакторов идеального смешения и вытеснения, *ФГВ*, **37**(2001), №6, 22–29.
- [2] В.И.Быков, С.Б.Цыбенова, Параметрический анализ модели проточного реактора идеального смешения, *Теор. основы хим. техн.*, **37**(2003), №1, 64–75.
- [3] Б.В.Вольтер, И.Е.Сальников, Устойчивость режимов работы химических реакторов, М., Химия, 1981.
- [4] В.И.Быков, А.М.Кытманов, М.З.Лазман, Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов, Новосибирск, Наука, 1991.

- [5] В.И.Быков, С.Б.Цыбенова, М.Г.Слинько, Бифуркации Андронова-Хопфа в модели Ариса-Амундсона, *Докл. РАН*, **378**(2001), 214–217.

## The Parametric Analysis of Volter-Salnikov Nonlinear Mathematical Model

Svetlana B. Tsybenova

---

*Parametric analysis of Volter-Salnikov nonlinear mathematical model is made. The parametric dependencies of the steady states, bifurcation curves, parametric and phase portraits, temporary dependencies are constructed.*

*Keywords: dynamic model, bifurcation, parametric and phase portraits, oscillations.*