

УДК 532.516

Термокапиллярное движение двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе

Виктор К. Андреев*

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,

Россия

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,

Россия

Владимир В. Кузнецов†

Институт гидродинамики им. ак. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090,

Россия

Получена 18.06.2010, окончательный вариант 25.08.2010, принята к печати 10.09.2010

Исследовано инвариантное решение уравнений движения вязких теплопроводных жидкостей, которое интерпретируется как однонаправленное движение в цилиндрической трубе с общей границей раздела, происходящее под действием термокапиллярных сил. Получены априорные оценки скорости и температуры. Найдено стационарное состояние и показано, что оно является предельным при больших временах. Установлено, что термокапиллярный эффект совместно с кривизной поверхности раздела может породить возвратные течения. В изображениях по Лапласу получено точное аналитическое решение. Даны примеры численного восстановления полей скоростей в зависимости от геометрических и физических параметров жидкостей.

Ключевые слова: термокапиллярность, инвариантное решение, поверхность раздела, априорные оценки, преобразование Лапласа.

1. Основные уравнения и граничные условия

Уравнения движения вязкой теплопроводной жидкости в отсутствие массовых сил в цилиндрической системе координат r, φ, z имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + \frac{v}{r} u_\varphi + wu_z - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} p_r + \nu \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} v_\varphi - \frac{u}{r^2} \right), \\ v_t + uv_r + \frac{v}{r} v_\varphi + wv_z + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} p_\varphi + \nu \left(\Delta v - \frac{2}{r^2} u_\varphi - \frac{v}{r^2} \right), \\ w_t + ww_r + \frac{v}{r} w_\varphi + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z + \nu \Delta w, \\ u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v_\varphi + w_z &= 0, \\ \theta_t + u\theta_r + \frac{v}{r} \theta_\varphi + w\theta_z &= \chi \Delta \theta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

*andr@icm.krasn.ru

†kuznetsov@hydro.nsc.ru

где u, v, w — проекции вектора скорости на оси r, φ, z соответственно; p — давление; θ — отклонения температуры от её равновесного значения θ_0 ; ν, ρ, χ — положительные постоянные: кинематическая вязкость, плотность, температуропроводность; $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial/\partial\varphi^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Система (1.1) допускает двухпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, соответствующую операторам

$$\partial/\partial\varphi, \partial/\partial z + A\partial/\partial\theta + B\partial/\partial c - \rho f(t)\partial/\partial p,$$

A, B — постоянные, $f(t) \in C^\infty$ — произвольная функция [1]. Инвариантное решение следует искать в виде

$$u = u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t), \quad p = -\rho f(t)z + \mathcal{D}(r, t), \quad \theta = Az + T(r, t).$$

Из четвертого уравнения системы (1.1) следует, что $u(r, t) = g(t)/r$ с некоторой функцией $g(t)$. Далее положим $g(t) = 0$ и, сверх того, предположим, что и $v(r, t) \equiv 0$. Тогда первое уравнение из (1.1) показывает, что \mathcal{D} есть функция только времени, $\mathcal{D}(r, t) \equiv \mathcal{D}(t)$, и представление решения при наших предположениях таково:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(r, t), \quad p = -\rho f(t)z + \mathcal{D}(t), \quad \theta = Az + T(r, t). \quad (1.2)$$

Применим решение (1.2) для описания однонаправленного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в круглой цилиндрической трубе радиуса b . Пусть первая жидкость занимает область $0 \leq r \leq a, |z| < \infty$, а вторая — цилиндрический слой $a \leq r \leq b, |z| < \infty$, так что $w_j(r, t)$ — осевая скорость ($j = 1, 2$), $p_j = -\rho_j f_j(t)z + \mathcal{D}_j(t)$ — давление, $\theta_j = A_j z + T_j(r, t)$ — распределение температуры. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела $r = a$ линейно зависит от температуры

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - \varkappa(\theta - \theta_0), \quad (1.3)$$

где $\varkappa > 0$ — температурный коэффициент. На поверхности раздела выполнены следующие условия [2]:

$$(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_\Gamma\sigma; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n}, \quad (1.5)$$

где \mathcal{P}_j — тензоры напряжений. Для решения (1.2) они имеют вид

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} -p_j & 0 & \mu_j w_{jr} \\ 0 & -p_j & 0 \\ \mu_j w_{jr} & 0 & -p_j \end{pmatrix}, \quad \mu_j = \rho_j \nu_j,$$

H — средняя кривизна поверхности раздела, $\nabla_\Gamma = \mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ — поверхностный градиент, k_j — коэффициенты теплопроводности смеси и жидкости. Учитывая равенства $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, $H = \sigma/(2a)$, выводим, что соотношение (1.4) эквивалентно двум при $r = a$:

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{a}, \quad \mu_1 w_{1r} - \mu_2 w_{2r} = \frac{\partial\sigma}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Первое из них есть формула Лапласа: разность давлений на криволинейной поверхности уравнивается капиллярными силами. Второе означает, что разность касательных напряжений уравнивается термокапиллярными силами — изменением поверхностного натяжения вдоль границы раздела.

Легко видеть, что равенства (1.5) приводят при $r = a$ к следующим граничным условиям:

$$w_1(a, t) = w_2(a, t), \quad T_1(a, t) = T_2(a, t), \quad k_1 \frac{\partial T_1(a, t)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2(a, t)}{\partial r}, \quad (1.7)$$

и, кроме того,

$$A_1 = A_2 \equiv -A, \quad A > 0. \quad (1.8)$$

В свою очередь, из (1.6) с учетом (1.2), (1.3) и (1.8) получаем

$$f_2(t) = \rho f_1(t) + \frac{h}{\rho_2 a}, \quad (1.9)$$

$$D_2(t) = D_1(t) - \frac{1}{a} [\sigma_0 - \alpha(T_1(a, t) - \theta_0)],$$

$$h \equiv \alpha A, \quad \rho = \rho_1 / \rho_2;$$

$$\mu_1 w_{1r}(a, t) - \mu_2 w_{2r}(a, t) = h. \quad (1.10)$$

Граничные условия на твердой стенке при $r = b$ таковы:

$$w_2(b, t) = 0, \quad T_2(b, t) = 0. \quad (1.11)$$

На оси симметрии ставятся условия ограниченности

$$|w_1(0, t)| < \infty, \quad |T_1(0, t)| < \infty. \quad (1.12)$$

Выпишем уравнения на искомые функции $w_j(r, t)$, $T_j(r, t)$. Для этого надо учесть представление (1.2) решения системы (1.1):

$$w_{jt} = f_j(t) + \nu_j \left(w_{jrr} + \frac{1}{r} w_{jr} \right); \quad (1.13)$$

$$T_{jt} = \chi_j \left(T_{jrr} + \frac{1}{r} T_{jr} \right) + A w_j. \quad (1.14)$$

В (1.13)–(1.14) при $j = 1$ переменная r изменяется в пределах от 0 до a , а при $j = 2$ — $a < r < b$. Таким образом, надо решить задачу (1.13)–(1.14) с граничными условиями (1.7), (1.10)–(1.12) и начальными условиями

$$w_j(r, 0) = 0, \quad T_j(r, 0) = 0. \quad (1.15)$$

При этом давление восстанавливается по формулам

$$p_j(r, t) = -\rho_j f_j(t) z + \mathcal{D}_j(t),$$

причем функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $\mathcal{D}_1(t)$, $\mathcal{D}_2(t)$ связаны равенствами (1.9) и должны задаваться $f_1(t)$ и $\mathcal{D}_1(t)$.

Замечание 1. При $t = 0$ в силу первого начального условия (1.15) граничное условие (1.10) терпит разрыв первого рода.

Движение двух вязких теплопроводных жидкостей под действием только перепада давления ($h \equiv 0$) в трубе изучено в [3, 4]. Здесь будет рассмотрен случай, когда отсутствует градиент давления во второй жидкости: $f_2 = 0$. Из первого условия (1.9) следует, что $f_1 = -h/\rho_1 a = -\alpha A/\rho_1 a$, т. е. термокапиллярные силы создают градиент давления в первой жидкости. Это связано с тем, что кривизна здесь не равна нулю, и это приведет к интересным следствиям.

2. Стационарное решение

Для такого решения все искомые функции не зависят от времени; обозначим их через $w_j^0(r)$, $T_j^0(r)$. Кроме того, $\mathcal{D}_1(t) = \mathcal{D}_1^0 = \text{const}$. Выпишем соответствующую краевую задачу: при $0 < r < a$

$$w_1^{0''} + \frac{1}{r} w_1^{0'} = -\frac{f_1^0}{\nu_1}; \quad (2.1)$$

$$T_1^{0''} + \frac{1}{r} T_1^{0'} = -\frac{A}{\chi_1} w_1^0; \quad (2.2)$$

$$|w_1^0(0)| < \infty, \quad |T_1^0(0)| < \infty; \quad (2.3)$$

при $a < r < b$

$$w_2^{0''} + \frac{1}{r} w_2^{0'} = 0; \quad (2.4)$$

$$T_2^{0''} + \frac{1}{r} T_2^{0'} = -\frac{A}{\chi_2} w_2^0; \quad (2.5)$$

$$w_2^0(b) = 0, \quad T_2^0(b) = 0; \quad (2.6)$$

$$\mu_1 w_1^{0'}(a) - \mu_2 w_2^{0'}(a) = h, \quad w_1^0(a) = w_2^0(a), \quad (2.7)$$

$$T_1^0(a) = T_2^0(a), \quad k_1 T_1^{0'}(a) = k_2 T_2^{0'}(a),$$

причем согласно (1.9)

$$f_1^0 = -\frac{h}{\rho_1 a} = -\frac{\varkappa A}{\rho_1 a}. \quad (2.8)$$

$$\mathcal{D}_2^0 = \mathcal{D}_1^0 + \frac{1}{a} [\sigma_0 - \varkappa(T_1^0(a) - \theta_0)]. \quad (2.9)$$

Общие решения систем (2.1)–(2.5) легко находятся (учтены условия ограниченности (2.3))

$$w_1^0 = C_1 - \frac{f_1^0 r^2}{4\nu_1}, \quad T_1^0 = -\frac{A}{\chi_1} \left(\frac{C_1 r^2}{4} - \frac{f_1^0 r^4}{64\nu_1} \right) + C_2, \quad w_2^0 = C_3 \ln r + C_4,$$

$$T_2^0 = -\frac{A}{\chi_2} \left[\frac{C_3 r^2}{4} (\ln r - 1) + \frac{C_4 r^2}{4} \right] + C_5 \ln r + C_6$$

с постоянными C_1, \dots, C_6 . Учитывая граничные условия (2.6), (2.7), находим представления для стационарного решения

$$w_1^0(\xi) = \frac{\nu_1}{2a} \text{M} \left[\frac{1}{2} (\xi^2 - 1) - \mu \ln \frac{a}{b} \right], \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$w_2^0(\xi) = -\frac{\nu_1 \mu}{2a} \text{M} \ln \left(\frac{a}{b} \xi \right), \quad 1 \leq \xi \leq b/a,$$

$$T_1^0(\xi) = \frac{Aa \text{Pr}_1 \text{M}}{8} \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{\xi^4}{8} + \mu \xi^2 \ln \frac{a}{b} + \mu \chi \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \mu \ln \frac{a}{b} - \mu \chi \left(1 - \ln \frac{a}{b} \right) - \frac{3}{8} + \right. \\ \left. + \left[\mu \chi \left(1 - 2 \ln \frac{a}{b} \right) + \frac{k}{2} \left(1 + 4\mu \ln \frac{a}{b} \right) \right] \ln \frac{a}{b} \right\}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.10)$$

$$T_2^0(\xi) = \frac{Aa\text{Pr}_1M}{8} \left\{ \mu\chi \left[\xi^2 \ln \left(\frac{a}{b} \xi \right) - \xi^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] + \left[\mu\chi \left(1 - 2 \ln \frac{a}{b} \right) + \frac{k}{2} \left(1 + 4\mu \ln \frac{a}{b} \right) \right] \ln \left(\frac{a}{b} \xi \right) \right\}, \quad 1 \leq \xi \leq b/a,$$

где $M = \varkappa Aa^2/(\mu_1\nu_1)$ – число Марангони, $\text{Pr}_1 = \nu_1/\chi_1$ – число Прандтля первой жидкости, $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$. Отметим некоторую особенность поля скоростей $w_1^0(\xi)$. Если $b < a \exp(1/2\mu)$, тогда для $\xi_* = [1 + 2\mu \ln(a/b)]^{1/2} > 0$ функция обращается в ноль: $w_1^0(\xi_*) = 0$, т. е. скорость меняет знак при $\xi \in (0, 1)$. Для $b \geq a \exp(1/2\mu)$ всегда $w_1^0(\xi) \geq 0$ (рис. 1). Таким образом, эффект Марангони формирует не только обычное термокапиллярное течение, но и возвратное течение в области $\xi \in (0, \xi^*)$. Это связано с ненулевой кривизной поверхности раздела. Поэтому отбрасывание первого граничного условия в (1.6), как это делается во многих работах (см. обзор [5]), является грубой ошибкой и приводит к совершенно иному результату. Именно в рассматриваемой конфигурации в области $0 \leq r \leq a$ будет постоянный профиль скорости $w_1 = -\nu_1\mu M(2a)^{-1} \ln(a/b)$.

Заметим, что расход в первой жидкости равен нулю, если геометрические и физические параметры связаны соотношением $b = a \exp(1/4\mu)$.

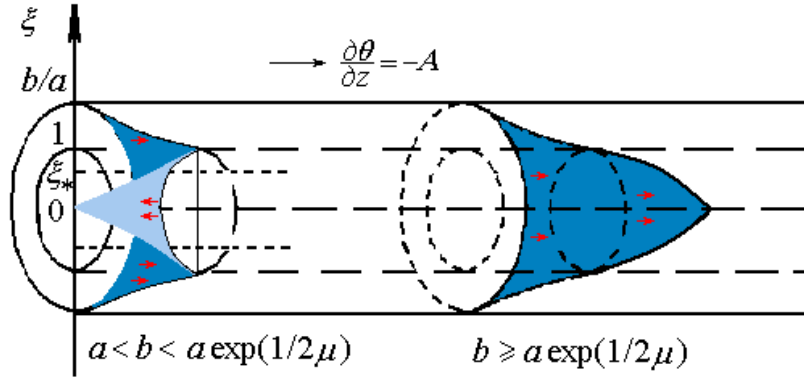


Рис. 1. Структура стационарного течения

3. Нестационарное движение

Можно видеть, что сопряженная задача (1.13), (1.14), (1.7), (1.10)–(1.12), (1.15) решается последовательно: сначала определяются поля скоростей $w_j(r, t)$, а затем и возмущения температур $T_j(r, t)$.

Для скоростей имеем задачу

$$w_{1t} = \nu_1 \left(w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r} \right) - \frac{\varkappa A}{\rho_1 a}, \quad 0 \leq r < a; \quad (3.1)$$

$$w_1(r, 0) = 0, \quad |w_1(0, t)| < \infty; \quad (3.2)$$

$$w_{2t} = \nu_2 \left(w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r} \right), \quad a < r \leq b; \quad (3.3)$$

$$w_2(r, 0) = 0, \quad w_2(b, t) = 0; \quad (3.4)$$

$$w_1(a, t) = w_2(a, t), \quad \mu_1 w_{1r}(a, t) - \mu_2 w_{2r}(a, t) = \varkappa A. \quad (3.5)$$

Естественно поставить вопрос о сходимости решения задачи (3.1)–(3.5) к стационарному решению w_j^0 из (2.10). Для этого введем новые функции

$$v_j(r, t) = w_j^0(r) - w_j(r, t), \quad (3.6)$$

которые являются решением уже однородной задачи (3.1)–(3.5), но с ненулевыми начальными данными

$$v_1(r, 0) = w_1^0(r) \quad (0 \leq r \leq a); \quad v_2(r, 0) = w_2^0(r) \quad (a \leq r \leq b). \quad (3.7)$$

Замечание 2. Второе граничное условие (3.5) будет однородным только для $t > 0$. При $t = 0$ его правая часть равна $\varkappa A$, см. замечание 1.

Легко показать, что для начально-краевой задачи на функции $v_j(r, t)$ справедливо интегральное тождество — закон изменения кинетической энергии —

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_1}{2} \int_0^a r v_1^2 dr + \frac{\rho_2}{2} \int_a^b r v_2^2 dr \right) + \mu_1 \int_0^a r v_{1r}^2 dr + \mu_2 \int_a^b r v_{2r}^2 dr = \\ = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ -\frac{\varkappa \mu \nu_1}{2} M \ln \frac{a}{b}, & t = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

При выводе (3.8) учтены условия (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) и равенство

$$a v_1(a, 0) [\mu_1 v_{1r}(a, 0) - \mu_2 v_{2r}(a, 0)] = \varkappa A a w_1^0(a) = -\frac{\nu_1 \mu}{2} M \ln \left(\frac{a}{b} \right).$$

Последнее следует из замечания 2 и (2.10).

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$\int_0^a r v_1^2 dr + \int_a^b r v_2^2 dr \leq M_0 \left(\mu_1 \int_0^a r v_{1r}^2 dr + \mu_2 \int_a^b r v_{2r}^2 dr \right) \quad (3.9)$$

с постоянной M_0 , являющейся решением вариационной задачи

$$M_0 = \sup_{v_1, v_2 \in V} \left[\frac{\int_0^a r v_1^2 dr + \int_a^b r v_2^2 dr}{\mu_1 \int_0^a r v_{1r}^2 dr + \mu_2 \int_a^b r v_{2r}^2 dr} \right],$$

где $V \subset W_2^1(r; 0, a) \times W_2^1(r; a, b)$, причем для v_1, v_2 выполнены граничные условия (3.2), (3.4), (3.5) (в последнем $\varkappa A = 0$).

Доказательство леммы см. в [6].

Обозначая через $E(t)$ "кинетическую энергию" слоев

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\rho_1 \int_0^a r v_1^2 dr + \rho_2 \int_a^b r v_2^2 dr \right]$$

и используя (3.9), приходим к неравенству

$$\frac{dE}{dt} + 2\delta E \leq h(t), \quad (3.10)$$

где $\delta = M_0^{-1} \min(\rho_1^{-1}, \rho_2^{-1})$, $h(t)$ — правая часть соотношения (3.8). Заметим, что $h(t)$ является суммируемой неотрицательной функцией и интеграл от нее просто равен нулю. Применяя к (3.10) неравенство Гронуолла [7], получим

$$E(t) \leq E(0) e^{-2\delta t}, \quad (3.11)$$

где в силу начальных условий (3.7)

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2} \left[\rho_1 \int_0^a r(w_1^0)^2 dr + \rho_2 \int_a^b r(w_2^0)^2 dr \right] = \\ &= \frac{\nu_1^2 M^2}{16} \left\{ \rho_1 \left(\mu^2 \ln^2 \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \mu \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{6} \right) + \frac{\rho_2 \mu^2}{2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 + 2 \ln \frac{a}{b} - 2 \ln^2 \frac{a}{b} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (3.1)–(3.5) согласно замене (3.6) и оценке (3.11) стремится к стационарному решению равномерно по $r \in [0, a]$ и $r \in [a, b]$ при $t \rightarrow \infty$ в нормах пространств $L^2(r; 0, a)$ и $L^2(r; a, b)$ соответственно.

Для функций $T_j(r, t)$ имеем начально-краевую задачу с уже известными $w_j(r, t)$:

$$T_{1t} = \chi_1 \left(T_{1rr} + \frac{1}{r} T_{1r} \right) + Aw_1(r, t), \quad 0 \leq r < a; \quad (3.12)$$

$$T_1(r, 0) = 0, \quad |T_1(0, t)| < \infty; \quad (3.13)$$

$$T_{2t} = \chi_2 \left(T_{2rr} + \frac{1}{r} T_{2r} \right) + Aw_2(r, t), \quad a < r \leq b; \quad (3.14)$$

$$T_2(r, 0) = 0, \quad T_2(b, t) = 0; \quad (3.15)$$

$$T_1(a, t) = T_2(a, t), \quad k_1 T_{1r}(a, t) = k_2 T_{2r}(a, t). \quad (3.16)$$

Вновь произведем замену

$$N_j(r, t) = T_j^0(r) - T_j(r, t), \quad (3.17)$$

где $T_j^0(r)$ — стационарное решение задачи (3.12)–(3.16), определяемое формулами из (2.10). Тогда функции N_j будут решением задачи вида (3.12)–(3.16) с начальными данными

$$N_j(r, 0) = T_j^0(r), \quad j = 1, 2, \quad (3.18)$$

а правые части уравнений (3.12) и (3.14) надо заменить на $A[w_1(r, t) - w_1^0(r)]$, соответственно, $A[w_2(r, t) - w_2^0(r)]$. Так как $\chi_j = k_j / (\rho_j c_j)$ (c_j — коэффициенты удельных теплоемкостей жидкостей), то из задачи для $N_j(r, t)$ получим интегральное равенство, аналогичное (3.8),

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} + k_1 \int_0^a r N_{1r}^2 dr + k_2 \int_a^b r N_{2r}^2 dr = \\ = A \left[\rho_1 c_1 \int_0^a r N_1 (w_1 - w_1^0) dr + \rho_2 c_2 \int_a^b r N_2 (w_2 - w_2^0) dr \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \left[\rho_1 c_1 \int_0^a r N_1^2 dr + \rho_2 c_2 \int_a^b r N_2^2 dr \right]. \quad (3.20)$$

Поскольку из (3.11) $\|w_j - w_j^0\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_j} E(0)} e^{-\delta t}$, то правая часть (3.19) допускает оценку сверху

$$\begin{aligned} 2A\sqrt{E(0)} \max(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}) & \left[\left(\frac{\rho_1 c_1}{2} \int_0^a r N_1^2 dr \right)^{1/2} + \left(\frac{\rho_2 c_2}{2} \int_a^b r N_2^2 dr \right)^{1/2} \right] e^{-\delta t} \leq \\ & \leq 2\sqrt{2} A\sqrt{E(0)} \max(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}) \sqrt{E_1(t)} e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

так как $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ для неотрицательных x, y . Используя лемму 1, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} + 2\delta_1 E_1(t) & \leq d\sqrt{E_1(t)} e^{-\delta t}, \quad (3.21) \\ \delta_1 = M_0^{-1} \min \left(\frac{1}{\rho_1 c_1}, \frac{1}{\rho_2 c_2} \right) & = M_0^{-1} \min \left(\frac{k_1}{\chi_1}, \frac{k_2}{\chi_2} \right), \\ d = 2\sqrt{2} A\sqrt{E(0)} \max(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}). & \end{aligned}$$

Из (3.21) получим оценку

$$\sqrt{E_1(t)} \leq \begin{cases} \sqrt{E_1(0)} e^{-\delta t} + \frac{d}{|\delta_1 - \delta|} (e^{-\delta t} - e^{-\delta_1 t}), & \delta_1 \neq \delta, \\ (dt + \sqrt{E_1(0)}) e^{-\delta t}, & \delta_1 = \delta, \end{cases} \quad (3.22)$$

откуда и следует, что возмущения температур равномерно по r при $t \rightarrow \infty$ стремятся к их стационарным значениям в пространствах $L^2(r; 0, a)$, $L^2(r; a, b)$ соответственно. В (3.22)

$$E_1(0) = \frac{1}{2} \left[\rho_1 c_1 \int_0^a r (T_1^0)^2 dr + \rho_2 c_2 \int_a^b r (T_2^0)^2 dr \right].$$

Вычисление $E_1(0)$ не представляет труда, см. формулы (2.10) для $T_j^0(r)$. Однако конечное выражение является громоздким и здесь не приводится.

Замечание 3. На самом деле, используя методы работы [4], можно доказать сходимость решения задач (3.1)–(3.5) и (3.12)–(3.16) к стационарным решениям при $t \rightarrow \infty$ в равномерной метрике пространств $C[0, a]$ и $C[a, b]$. При этом сходимость остается экспоненциальной, с меньшим, вообще говоря, показателем для $w_1(r, t)$, $T_1(r, t)$.

4. Решение в изображениях по Лапласу

Поскольку начально-краевые задачи (3.1)–(3.5) и (3.12)–(3.16) являются линейными, применим к ним преобразование Лапласа [8]. Будем обозначать "волной" такое преобразование:

$$\tilde{z}(r, p) = \int_0^\infty e^{-pt} z(r, t) dt.$$

Из (3.1)–(3.5) получим краевую задачу для изображений $\tilde{w}_j(r, p)$:

$$\tilde{w}_1'' + \frac{1}{r} \tilde{w}_1' - \frac{p}{\nu_1} \tilde{w}_1 = \frac{\alpha A}{\rho_1 a p}, \quad 0 \leq r < a; \quad (4.1)$$

$$|\tilde{w}_1(0, p)| < \infty; \quad (4.2)$$

$$\tilde{w}_2'' + \frac{1}{r} \tilde{w}_2' - \frac{p}{\nu_2} \tilde{w}_2 = 0, \quad a < r \leq b; \quad (4.3)$$

$$\tilde{w}_2(b, p) = 0; \quad (4.4)$$

$$\tilde{w}_1(a, p) = \tilde{w}_2(a, p), \quad \mu_1 w_1'(a, p) - \mu_2 w_2'(a, p) = \frac{\alpha A}{p}, \quad (4.5)$$

где "штрих" означает дифференцирование по r .

Общие решения уравнений (4.1), (4.3) удобно представить в виде (для w_1 учтено условие ограниченности (4.2))

$$\tilde{w}_1(r, p) = -\frac{\alpha A}{\rho_1 a p^2} \left[1 - C_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) \right], \quad (4.6)$$

$$\tilde{w}_2(r, p) = \frac{\alpha A}{\rho_1 a p^2} \left[C_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) + C_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) \right].$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 находятся из оставшихся граничных условий (4.4), (4.5):

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & K_0(z) \\ 1 & -I_0(y) & -K_0(y) \\ \frac{\mu x}{\sqrt{\nu}} & -I_1(y) & K_1(y) \end{vmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & K_0(z) \\ I_0(x) & 1 & -K_0(y) \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & \frac{\mu x}{\sqrt{\nu}} & K_1(y) \end{vmatrix}, \quad (4.7)$$

$$C_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & 0 \\ I_0(x) & -I_0(y) & 1 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & -I_1(y) & \frac{\mu x}{\sqrt{\nu}} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & K_0(z) \\ I_0(x) & -I_0(y) & -K_0(y) \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & -I_1(y) & K_1(y) \end{vmatrix},$$

где $x = a\sqrt{p/\nu_1}$, $y = a\sqrt{p/\nu_2}$, $z = b\sqrt{p/\nu_2}$.

Что касается функций $\tilde{T}_j(r, p)$ ($j = 1, 2$), то они определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(r, p) &= -\frac{\alpha A^2}{\rho_1 a p^3} \left[1 + \frac{C_1}{\text{Pr}_1 - 1} I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) + D_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} r \right) \right], \quad 0 \leq r \leq a; \\ \tilde{T}_2(r, p) &= \frac{\alpha A^2}{\rho_1 a p^3} \left\{ \frac{1}{\text{Pr}_2 - 1} \left[C_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) + C_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + D_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} r \right) + D_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} r \right) \right\}, \quad a \leq r \leq b, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где C_1, C_2, C_3 из (4.7), а D_1, D_2, D_3 находятся из граничных условий $\tilde{T}_2(b, p) = 0$, $\tilde{T}_1(a, p) =$

$\tilde{T}_2(a, p)$, $k_1\tilde{T}_{1r}(a, p) = k_2\tilde{T}_{2r}(a, p)$. После некоторых вычислений получим

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} H_1 & I_0(y_1) & K_0(y_1) \\ 0 & I_0(z_1) & K_0(z_1) \\ H_2 & \sqrt{\chi} I_1(y_1) & -\sqrt{\chi} K_1(y_1) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} I_0(x) & H_1 & K_0(y_1) \\ 0 & 0 & K_0(z_1) \\ kI_1(x_1) & H_2 & -\sqrt{\chi} K_1(y_1) \end{vmatrix}, \quad (4.9)$$

$$D_3 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} I_0(x) & I_0(y_1) & H_1 \\ 0 & I_0(z_1) & 0 \\ kI_1(x_1) & \sqrt{\chi} I_1(y_1) & H_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} I_0(x_1) & I_0(y_1) & K_0(y_1) \\ 0 & I_0(z_1) & K_0(z_1) \\ kI_1(x_1) & \sqrt{\chi} I_1(y_1) & -\sqrt{\chi} K_1(y_1) \end{vmatrix}.$$

В (4.8), (4.9) введены следующие обозначения: $\text{Pr}_j = \chi_j/\nu_j$, $x_1 = a\sqrt{p/\chi_1}$, $y_1 = a\sqrt{p/\chi_2}$, $z_1 = b\sqrt{p/\chi_2}$, $k = k_1/k_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$,

$$H_1 = \frac{1}{\text{Pr}_2 - 1} - 1 - \left(\frac{1}{\text{Pr}_1 - 1} + \frac{1}{\text{Pr}_2 - 1} \right) C_1 I_0(x), \quad (4.10)$$

$$H_2 = \left[\frac{k\sqrt{\text{Pr}_1}}{1 - \text{Pr}_1} + \frac{\mu\text{Pr}_2}{\sqrt{\text{Pr}_1}(1 - \text{Pr}_2)} \right] C_1 I_1(x) + \frac{\mu\text{Pr}_2}{\sqrt{\text{Pr}_1}(\text{Pr}_2 - 1)} x.$$

Для упрощения вида H_1 , H_2 были использованы граничные условия (4.4), (4.5).

Формулы (4.8)–(4.10) справедливы для чисел Прандтля $\text{Pr}_j \neq 1$, что обычно выполнено для жидкостей. При $\text{Pr}_j = 1$ вместо (4.8) имеем представления

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(r, p) &= -\frac{\varkappa A^2}{\rho_1 a p^3} \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} C_1 r I_1 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) + D_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) \right], \\ \tilde{T}_2(r, p) &= \frac{\varkappa A^2}{\rho_1 a p^3} \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \left[C_2 I_1 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) - C_3 K_1 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + D_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) + D_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{w}_j(r, p) = w_j^0(r)$, где $w_j^0(r)$ определяется формулами (2.10) (для $\tilde{T}_j(r, p)$ выкладки являются аналогичными). В силу свойства преобразования Лапласа это влечет за собой предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} w_j(r, t) = w_j^0(r)$, уже установленное нами в п. 3 с помощью априорных оценок. Действительно, поскольку при малых t $I_0(t) \sim 1 + t^2/4$, $K_0(t) \sim -\ln(t/2)$, $I_1(t) \sim t/2 + t^3/16$, $K_1(t) \sim 1/t + 2^{-1}t \ln(t/2)$, то при $p \rightarrow 0$ из (4.7)

$$\Delta \sim -\frac{1}{y} \left[1 + \frac{x^2 + z^2}{4} - \frac{y^2}{2} (\rho - 1) \ln \frac{a}{b} \right],$$

$$C_1 \sim 1 - \frac{a^2 p}{2\nu_1} \left(\frac{1}{2} + \mu \ln \frac{a}{b} \right), \quad C_2 \sim \frac{\mu}{2\sqrt{\nu}} xy \ln \left(\frac{z}{2} \right), \quad C_3 \sim \frac{\mu}{2\sqrt{\nu}} xy.$$

Теперь из (4.6) при $p \rightarrow 0$

$$p\tilde{w}_1(r, p) \sim \frac{\varkappa A a}{2\mu_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) - \mu \ln \frac{a}{b} \right] = w_1^0(r),$$

$$p\tilde{w}_2(r, p) \sim -\frac{\alpha Aa}{2\mu_1} \mu \ln \frac{a}{b} = w_2^0(r).$$

В силу п. 3 это ожидаемый результат, который хорошо подтверждается путем численного обращения преобразования Лапласа. На рис. 2–5 показана эволюция безразмерных профилей скоростей ($\xi = r/a$, $\tau = \nu_1 t/a^2$ — безразмерное время)

$$\bar{w}_j(\xi, \tau) = \frac{2a}{\nu_1 M} w_j(\xi, \tau) \quad (j = 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad j = 2, \quad 1 \leq \xi \leq b/a)$$

и их быстрый выход на стационарный режим

$$\bar{w}_j^0(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) - \mu \ln \frac{a}{b}, & j = 1; \\ -\mu \ln \left(\frac{a}{b} \xi \right), & j = 2. \end{cases}$$

Рис. 2, 3 относятся к случаю толстого слоя с $b/a = 2$, а рис. 4, 5 — к тонкому слою с $b/a = 1.1$. Видно, что интенсивность движения во втором случае в цилиндрическом слое очень мала.

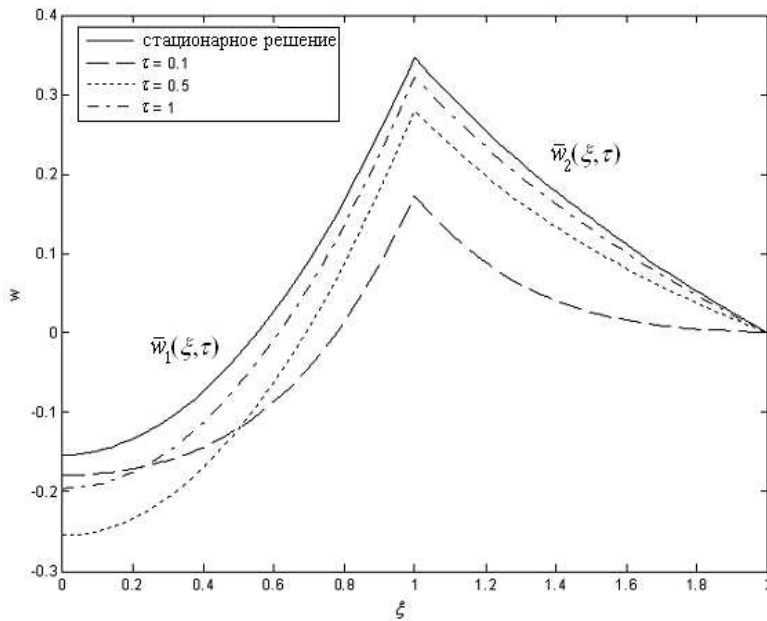


Рис. 2. Профили скоростей при $b/a = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 1$

5. Затопленная струя

Предположим, что под действием термокапиллярных сил происходит движение цилиндрической струи в неограниченной жидкости. Для решения этой задачи достаточно перейти к пределу при $b \rightarrow \infty$ в формулах (4.6), (4.7). Поскольку при $z \rightarrow \infty$ ($b \rightarrow \infty$)

$$I_n(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad K_n(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

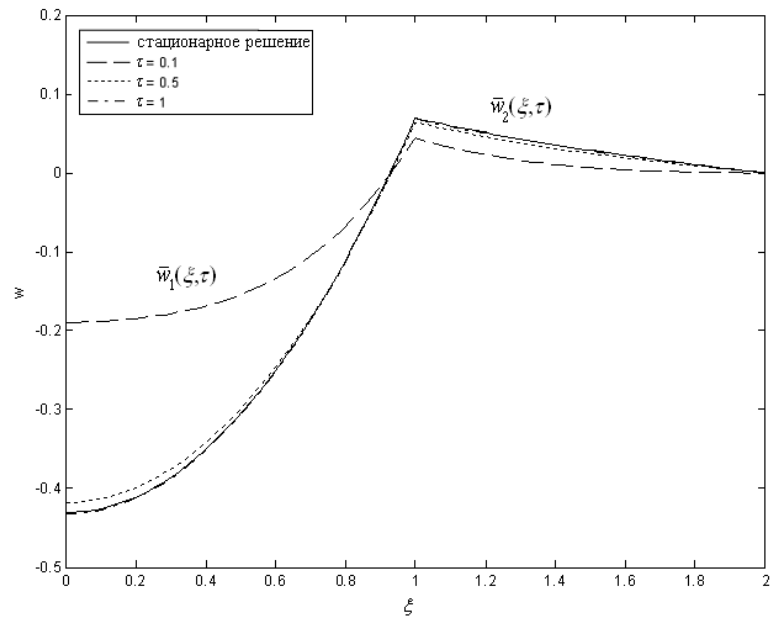


Рис. 3. Профили скоростей при $b/a = 2$, $\mu = 0, 1$, $\nu = 1$

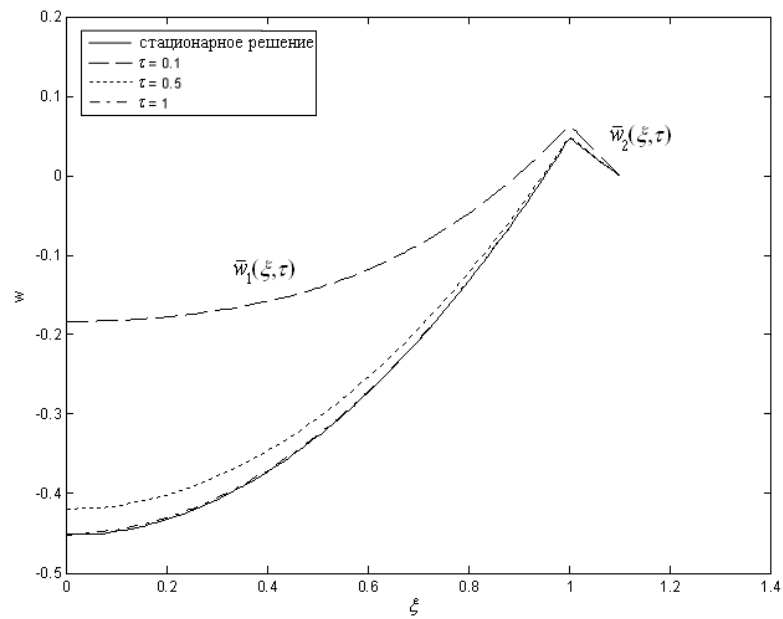


Рис. 4. Профили скоростей при $b/a = 1, 1$, $\mu = 0, 5$, $\nu = 1$

то после некоторых вычислений приходим к формулам

$$\tilde{w}_1(r, p) = -\frac{\alpha A}{\rho_1 a p^2} \left\{ 1 - \left[K_1(y) + \frac{\mu x}{\sqrt{\nu}} K_0(y) \right] W^{-1} I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) \right\}, \quad (5.1)$$

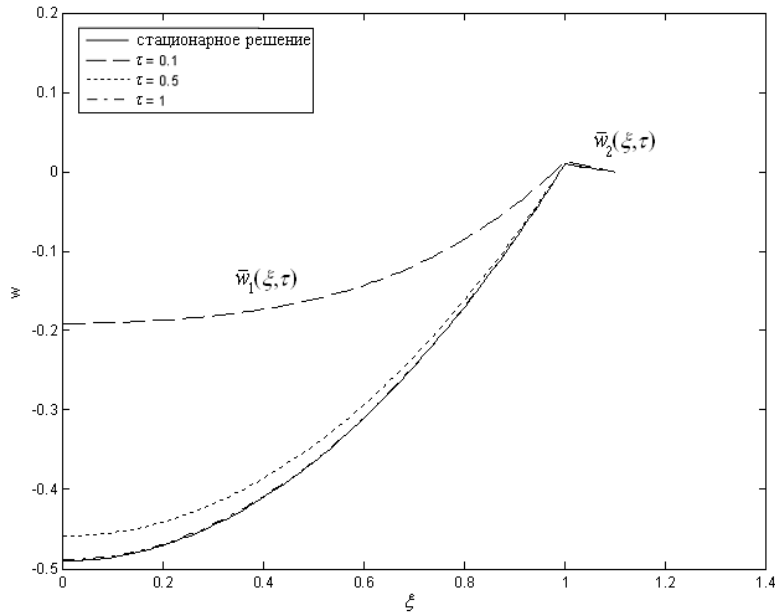


Рис. 5. Профили скоростей при $b/a = 1, 1, \mu = 0, 1, \nu = 1$

$$\tilde{w}_2(r, p) = \frac{\alpha A}{\rho_1 a p^2} \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} [x I_0(x) - I_1(x)] W^{-1} K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right),$$

$$W = I_0(x) K_1(y) + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} K_0(y) I_1(x).$$

Здесь учтено условие ограниченности: $|\tilde{w}_2(r, p)| < \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Заметим, что есть простое стационарное решение задачи (2.1), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) при $b = \infty$

$$w_1^0(r) = \frac{\alpha A a}{4 \mu_1} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right), \quad w_2^0(r) = 0. \quad (5.2)$$

Оно описывает термокапиллярное течение Пуазейля в струе, окруженной неподвижной теплопроводной жидкостью. Однако течение (5.2) не является предельным при $t \rightarrow \infty$, соответствующим формулам (5.1) нестационарного движения, поскольку не существует пределов $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{w}_j(r, p)$. Это и неудивительно, так как здесь нет тормозящего влияния твердой стенки. Таким образом, происходит эволюция затопленной струи с постоянным диаметром сечения $2a$ под действием перепада давления, определяемого эффектом Марангони. Он же порождает нестационарное движение и окружающей жидкости.

Изображения по Лапласу для $\tilde{T}_j(r, t)$ при $b = \infty$ могут быть найдены из (4.8), (4.9).

Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00762 и интеграционным проектом СО РАН № 116.

Список литературы

- [1] В.К.Андреев, Ю.А.Гапоненко, Математическое моделирование конвективных течений, Учебное пособие, Красноярск, КрасГУ, 2006.

- [2] В.К.Андреев, В.Е.Захватаев, Е.А.Рябицкий, Термокапиллярная неустойчивость, Новосибирск, Наука, 2000.
- [3] В.К.Андреев, Свойства решений сопряженной задачи о совместном движении цилиндрических слоев вязких жидкостей, Труды 39-й Всероссийской конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, ИМиМ УрО РАН, 2008, 87–91.
- [4] В.К.Андреев, О совместном однонаправленном движении двух вязких теплопроводных жидкостей в трубе, *ПМТФ*, **51**(2010), № 4, 57–71.
- [5] В.К.Андреев, Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения, Препринт № 1-10, Красноярск, ИВМ СО РАН, 2010, 1–66.
- [6] В.К.Андреев, О неравенстве типа Фридрихса для составных областей, *Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика*, **1**(2008), № 4, 349–370.
- [7] О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., Наука, 1970.
- [8] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1973.

Thermocapillary Motion of Two Viscous Liquids in a Cylindrical Pipe

Victor K. Andreev
Vladimir V. Kuznetsov

A study is made of an invariant solution of the equations motion of a viscous heat-conducting fluids, which is treated as unidirectional motion in a circular pipe with a common interface under the action of the thermocapillary force. A priori estimates of the velocity and temperature are obtained. The steady state is determined and it is shown that, at larger times, this state is the limiting one. It was established that the thermocapillary effect with surface curvature can induce the return flow. Using Laplace transformation properties the exact analytical solution was constructed. Some examples of numerical reconstruction of the velocities fields depending on geometric and physical parameters were considered.

Keywords: thermocapillary, invariant solution, interface, a priori estimates, Laplace transformation.