Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(4), 544–555

УДК 515.171.6

Об интегралах по двумерным компактным комплексным торическим многообразиям

Ольга С. Ульверт*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2010, окончательный вариант 25.06.2010, принята к печати 10.07.2010

В статье доказывается, что всякий интеграл от гладкой $(2,2)$-формы по двумерному компактному комплексному торическому многообразию X (содержащему комплексный тор $\mathbb{T}^2$) равен интегралу от голоморфной $(2,0)$-формы по вещественному тору $T^2 \subset \mathbb{T}^2$.

Ключевые слова: дифференциальная форма, торическое многообразие, когомологии Дольбо, когомологии Чеха.

Введение

Рассматриваются интегралы вида

$$\int_X \omega\,, \tag{1}$$

где X — компактное комплексное аналитическое многообразие, а ω — дифференциальная (n,n)-форма.

В книге Р.Ботта и Л.В.Ту [1] приводится универсальный метод понижения кратности интегрирования для интегралов по циклам на многообразиях. Этот метод основан на гомологической технике Майера-Виеториса и учитывает связи между когомологиями де Рама и Чеха, т.е. связь между дифференциальной геометрией форм на многообразии и комбинаторикой покрытий многообразия.

В настоящей работе указанный метод адаптируется к интегралам по комплексным аналитическим многообразиям. А именно: решается задача о сведении $2n$-мерного интеграла к сумме n-мерных интегралов от голоморфных форм. При этом вместо когомологий де Рама рассматриваются когомологии Дольбо и используется техника $\mathfrak{U}$-резольвент Э.Глисона (Gleason) [2] (см. также определение 3 в разделе 1). Доказывается

Теорема 2. *Пусть X — компактное комплексное аналитическое многообразие размерности n и $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — ацикличное относительно оператора $\bar\partial$ покрытие X, причем для $2n$-цикла X существует $\mathfrak{U}$-резольвента с последним членом ξ_n. Тогда для любой (n,n)-формы ω*

$$\int_X \omega = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}^{n+1}} \int_{\xi_n(\alpha)} \left(\delta\bar\partial^{-1}\right)^n \omega(\alpha), \tag{2}$$

где δ-кограничный оператор Чеха, определенный формулой (3).

*ulverto@yandex.ru

Детально рассматривается случай, когда X — компактное двумерное торическое многообразие. Для компактных торических многообразий существует полиэдральное разбиение на единичные полидиски (теорема 3). С использованием такого разбиения, строится $\mathfrak{U}$-резольвента двумерного торического многообразия, и, как следствие теоремы 2, получается следующий результат.

Теорема 4. *Пусть X — компактное комплексное торическое многообразие размерности 2. Тогда для всякой $(2,2)$-формы ω на X можно естественным образом указать дифференциальную $(2,0)$-форму $\psi = \widetilde{\psi}(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2$, голоморфную в окрестности единичного остова $T = \{|z_1| = 1,\ |z_2| = 1\} \subset \mathbb{T}^2 \subset X$ такую, что*

$$\int\limits_X \omega = (2\pi i)^2 c_{-I},$$

где c_{-I} — коэффициент при мономе $z_1^{-1} z_2^{-1}$ разложения Лорана функции $\widetilde{\psi}$ в окрестности вещественного тора T.

Здесь $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^2$ — так называемый комплексный тор.

В разделе 1 приводятся некоторые понятия, связанные с покрытиями многообразия и гомологиями. Теорема 2 доказывается в разделе 2. В разделе 3 приводятся известные сведения о торических многообразиях, в частности, результат А.К.Циха о полиэдральном разбиении таких многообразий на единичные полидиски. Основной результат об интегралах по двумерным комплексным торическим многообразиям (теорема 4) доказывается в разделе 4. Примеры вычисления интегралов по $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ приводятся в разделах 5 и 6 соответственно.

1. Понятие $\mathfrak{U}$-резольвенты и лемма Глисона

Здесь мы приведем некоторые сведения о дифференциальных формах и цепях на многообразиях, следуя статье [2]. В этой статье рассматриваются формы, градуированные по степеням и организующие комплекс де Рама. Мы градуируем формы по бистепеням и, соответственно, рассматриваем оператор Дольбо $\overline{\partial}$.

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — открытое покрытие компактного комплексного многообразия X размерности n ($\mathcal{A}$ — конечное упорядоченное множество индексов). Положим

$$U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) := U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}.$$

Через $\Omega^{n,s}(U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p))$ обозначим пространство C^∞-дифференциальных форм бистепени (n, s) на пересечении $U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

Определение 1. *$\mathfrak{U}$-коцепью кратности p и бистепени (n, s) назовем альтернированную функцию ω на $\mathcal{A}^{p+1}$ со значениями*

$$\omega(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \Omega^{n,s}(U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p))$$

для всех наборов $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathcal{A}^{p+1}$.

Через $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s})$ обозначим пространство всех $\mathfrak{U}$-коцепей кратности p и бистепени (n, s). Внешнее дифференцирование, определенное на каждом $\Omega^{n,s}(U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p))$, индуцирует линейное отображение

$$d : C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s}) \to C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s+1}).$$

Напомним, что на комплексном многообразии оператор дифференцирования d расщепляется в сумму двух операторов

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

Так как мы рассматриваем только формы максимальной размерности по голоморфным составляющим, то действие оператора d совпадает с действием оператора

$$\bar{\partial} : C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s}) \to C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s+1}).$$

Определим оператор $\delta : C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s})$ по формуле

$$(\delta\omega)(\alpha_0 \ldots, \alpha_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \omega(\alpha_0, \ldots \widehat{\alpha_i} \ldots, \alpha_{p+1}), \tag{3}$$

где $\omega \in C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{n,s})$. Оператор δ называется *кограничным оператором Чеха.*

Определение 2. $\mathfrak{U}$*-цепью на многообразии X кратности p и размерности q называется альтернированная функция γ из множества индексов $\mathcal{A}^{p+1}$ в пространство сингулярных цепей на X размерности q, которая не обращается в ноль лишь на конечном числе точек из $\mathcal{A}^{p+1}$ и удовлетворяет для всех индексов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ условию*

$$\operatorname{supp} \gamma(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \subseteq U(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p).$$

Определим спаривание $\mathfrak{U}$-цепей и $\mathfrak{U}$-коцепей. Если ξ — дифференцируемая сингулярная цепь размерности p и φ – p-форма, определенная на носителе ξ, тогда через $\varphi \cdot \xi$ обозначим интеграл $\int\limits_{\xi} \varphi$.

Для $\mathfrak{U}$-коцепи θ кратности p и бистепени (n, s) и $\mathfrak{U}$-цепи γ кратности p и размерности $n+s$ определим

$$\theta \cdot \gamma = \sum \theta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \cdot \gamma(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p),$$

где сумма (которая фактически конечна) берется по всем элементам $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathcal{A}^{p+1}$.

Определение 3. *Пусть ξ — сингулярный цикл на X размерности r. Его $\mathfrak{U}$-резольвентой называется последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ такая, что:*

1. *ξ_p — $\mathfrak{U}$-цепь кратности p размерности $r-p$;*
2. *$\xi = \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \xi_0(\alpha)$;*
3. *$\partial \xi_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \sum\limits_{\beta \in \mathcal{A}} \xi_{p+1}(\beta, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.*

Определение 4. *Сингулярная цепь $\xi \in C_p(X)$ называется $\mathfrak{U}$-тонкой, если она представима в виде линейной комбинации сингулярных симплексов на X, в которой носитель каждого симплекса лежит в некотором элементе $U(\alpha)$ покрытия $\mathfrak{U}$.*

Теорема 1([2]). *Сингулярный цикл на X имеет $\mathfrak{U}$-резольвенту тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{U}$-тонкий.*

Лемма 2([2]). *Пусть θ — это $\mathfrak{U}$-коцепь кратности $q \geqslant 1$ и бистепени $(n, r-q)$. Предположим, что она $\overline{\partial}$-замкнута ($\overline{\partial}\theta(\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}^{q+1}$) и δ-точна (существует $\mathfrak{U}$-коцепь φ кратности $q-1$ такая, что $\delta\varphi = \theta$). Тогда, если $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ — $\mathfrak{U}$-резольвента сингулярного r-цикла ξ, то*

$$\theta \cdot \xi_q = \overline{\partial}\varphi \cdot \xi_{q-1}. \tag{4}$$

2. Общая теорема об интегралах по компактным комплексным многообразиям

Теорема 2. *Пусть X — компактное комплексное аналитическое многообразие размерности n и $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — ацикличное относительно оператора $\bar\partial$ покрытие X, причем для $2n$-цикла X существует $\mathfrak{U}$-резольвента с последним членом ξ_n. Тогда для любой (n,n)-формы ω*

$$\int\limits_X \omega = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}^{n+1}} \int\limits_{\xi_n(\alpha)} \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^n \omega(\alpha). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — компоненты $\mathfrak{U}$-резольвенты для X. Из условия 2 определения $\mathfrak{U}$-резольвенты имеем

$$\int\limits_X \omega = \omega\cdot\xi_0.$$

Обозначим

$$\varphi_q = \overline{\partial}^{-1}\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^{q-1}\omega,\ \theta_q = \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^{q}\omega,\ q = 1,\ldots,n.$$

Очевидно, что $\delta\varphi_q = \theta_q$ и $\delta\theta_q = 0$. Для всех $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{A}$ выполняется

$$\left(\overline{\partial}\theta_1\right)(\alpha_0,\alpha_1) = \left(\overline{\partial}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega\right)(\alpha_0,\alpha_1) = (\delta\omega)(\alpha_0,\alpha_1) = \omega(\alpha_1) - \omega(\alpha_0) = 0,$$

так как $\omega(\alpha_0),\ \omega(\alpha_1)$ — сужения формы ω на элементы покрытия $U(\alpha_0),\ U(\alpha_1)$. По лемме 2 получаем

$$\overline{\partial}\varphi_1\cdot\xi_0 = \omega\cdot\xi_0 = \delta\overline{\partial}^{-1}\omega\cdot\xi_1 = \theta_1\cdot\xi_1.$$

Далее действуем по индукции. Предположим, что выполняется равенство

$$\overline{\partial}\varphi_{n-1}\cdot\xi_{n-2} = \theta_{n-1}\cdot\xi_{n-1}.$$

Тогда для всех $\alpha\in\mathcal{A}^{n+1}$ имеем

$$(\overline{\partial}\theta_n)(\alpha) = \left(\overline{\partial}\delta\overline{\partial}^{-1}\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^{n-1}\omega\right)(\alpha) = \left(\delta\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^{n-1}\omega\right)(\alpha) = (\delta\theta_{n-1})(\alpha) = 0.$$

Таким образом, вновь выполнены условия леммы 2, поэтому

$$\overline{\partial}\varphi_n\cdot\xi_{n-1} = \theta_n\cdot\xi_n = \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^n\omega\cdot\xi_n.$$

□

3. Понятие торического многообразия и его разбиение на полидиски

Торическое многообразие связывается с коническим полиэдром (веером) $K = \{\sigma_\alpha^{(j)}\}$ (см. например [3], [4]). Здесь каждый элемент $\sigma_\alpha^{(j)}$ — это j-мерный конус в пространстве $\mathbb{R}^{n*}$, натянутый на конечную совокупность целочисленных векторов. При этом грань каждого конуса из K также содержится в K, пересечение любых двух конусов из K является гранью каждого из них. Веер K называется симплициальным, если все его конусы являются симплициальными (то есть порождаются частью базиса пространства $\mathbb{R}^{n*}$). Мы будем рассматривать лишь полные полиэдры, для которых объединение входящих в него конусов есть все пространство $\mathbb{R}^{n*}$ (условие полноты полиэдра K обеспечивает компактность торического многообразия, которое будет построено по K).

Пусть $\{a^j\}_1^N$ — совокупность всех векторов из $\mathbb{Z}^{n*}$, участвующих в определении конусов из K. В силу симплициальности каждый n-мерный конус из K имеет вид

$$\sigma_J = \sigma_{j_1 \dots j_n} = \sigma(a^{j_1}, \dots, a^{j_n}),$$

где $J = (j_1, \dots, j_n)$ — поднабор из $\{1, \dots, N\}$, причем матрица

$$C_J = (a^{j_1}, \dots, a^{j_n})$$

из вектор-столбцов $a^{j_1}, \dots, a^{j_n} \in \mathbb{Z}^{n*}$ унимодулярная (только в этом случае вектор-столбцы образуют базис в $\mathbb{Z}^{n*}$). Каждому симплициальному конусу σ_J ставится в соответствие гомеоморфизм

$$\varphi : T_J^n \to \mathbb{T}^n \quad \text{по формуле} \quad x = \varphi_j(y) = y^{C_J}, \tag{6}$$

где T_J^n — тор (совокупность векторов с n ненулевыми координатами), вложенный в n-мерное евклидово пространство переменных $y_J = y = (y_1, \dots, y_n)$, а $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^n$ — стандартный комплексный тор переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. В терминах координат a^j гомеоморфизм (6) задается следующим мономиальным преобразованием

$$x_k = y_1^{a_k^{j_1}} \dots y_n^{a_k^{j_n}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Торическое многообразие $X = X_K$ получается добавлением (приклеиванием) к тору T^n пространств $\mathbb{C}_J^n$ с помощью гомеоморфизмов φ_J. А именно: X — это факторпространство $\coprod_J \mathbb{C}_J^n / \sim$ дизъюнктного объединения экземпляров $\mathbb{C}_J^n$ евклидова пространства по отношению эквивалентности

$$y^J \sim y^I, \quad \text{если} \quad y^I = \varphi_I^{-1} \circ \varphi_J(y^J).$$

При этом предполагается, что $\varphi_I^{-1} \circ \varphi_J$ продолжено по непрерывности T_J^n в некоторые точки пространства $\mathbb{C}_J^n$.

Основное утверждение о факторпространстве X состоит в том, что оно имеет структуру компактного аналитического многообразия. Переменные $y_J = y = (y_1, \dots, y_n)$ служат локальными координатами в координатной окрестности U_J, являющейся множеством классов эквивалентности точек из $\mathbb{C}_J^n$. Таким образом, функции перехода от координат y^J в U_J к координатам y^I в U_I имеют вид мономиального преобразования (см. [5])

$$y^I = (y^J)^{C_J \cdot C_I^{-1}}. \tag{7}$$

Для торических многообразий верна следующая теорема А.К.Циха, доказанная им в рамках спецкурса.

Теорема 3. *Всякое гладкое компактное торическое многообразие допускает конечное полиэдральное разбиение на замкнутые полидиски (единичных радиусов в подходящих координатах).*

4. Вычисление интегралов по компактным комплексным торическим многообразиям размерности два

Пусть теперь X — компактное комплексное торическое многообразие размерности 2. Покажем, что теорема 3 позволяет построить $\mathfrak{U}$-резольвенту ξ_0, ξ_1, ξ_2 многообразия X.

Если $K = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$ веер, связанный с многообразием X, то, пронумеровав все двумерные конуса $\sigma_j,\ j = 1, \ldots, N$ по часовой стрелке начиная с произвольного, тем самым соответствующим образом упорядочим единичные бидиски $h_0, h_1, \ldots, h_N$, дающие разбиение X. В локальных координатах каждый бидиск записывается следующим образом:

$$h_k = \left\{ y^k \in \mathbb{C}^n : |y_1^k| \leqslant 1,\ |y_2^k| \leqslant 1 \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

и в силу (7) все бидиски пересекаются по вещественному тору, который является остовом каждого из бидисков:

$$T = \left\{ y^k \in \mathbb{C}^n : |y_1^k| = 1,\ |y_2^k| = 1 \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Таким образом, в переменных $\log|x_1|, \log|x_2|$ разбиение многообразия схематично можно представить, как показано на рис.1, где через $l_0, l_1, \ldots, l_N$ обозначены грани бидисков.

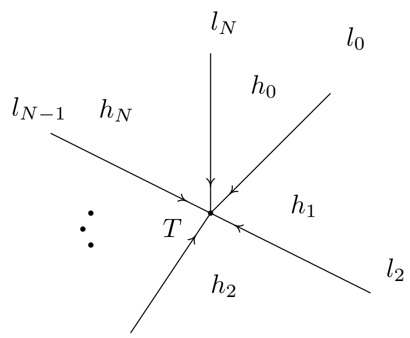

Рис. 1

Выберем покрытие $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1, \ldots, U_N\}$ многообразия X так, чтобы каждый бидиск целиком лежал в единственном элементе покрытия, т.е.

$$U_k = \left\{ |y_1^k| < 1 + \varepsilon,\ |y_2^k| < 1 + \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0,\ k = 0, 1, \ldots, N$. Многообразие X ориентируемо, его ориентацию можно задать порядком следования координат в одной из карт.

Например, в карте $\mathbb{C}^2_{y^0}$ переменных $y_1^0 = r_1 e^{i\theta_1},\ y_2^0 = r_2 e^{i\theta_2}$ зададим ориентацию $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$. Пусть грани $l_N = \left\{ |y_1^0| = 1,\ |y_2^0| \leqslant 1 \right\}$ и $l_0 = \left\{ |y_1^0| \leqslant 1,\ |y_2^0| = 1 \right\}$ бидиска h_0 (рис. 2) имеют ориентацию соответственно $(r_2, \theta_1, \theta_2)$ и $(r_1, \theta_1, \theta_2)$ так, что граница

$$\partial h_0 = l_N - l_0.$$

Аналогично можно показать, что для других бидисков

$$\partial h_k = l_{k-1} - l_k,\ k = 1, \ldots, N.$$

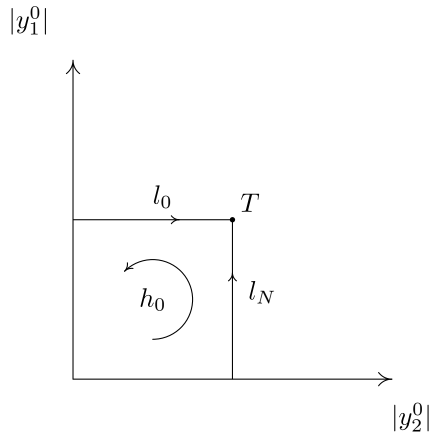

Рис. 2

Положим $\xi_0(k) = h_k,\ k = 0, 1, \dots, N$, где бидиски берутся с ориентацией, индуцированной ориентацией многообразия X. Условие 2 из определения $\mathfrak{U}$-резольвенты при этом очевидно выполняется.

Далее положим

$$\begin{cases} \xi_1(k,j) = 0, & |k-j| > 1, \\ \xi_1(k,k+1) = l_k, & 0 \leqslant k \leqslant N-1, \\ \xi_1(N,0) = l_N. \end{cases} \tag{8}$$

Определим компоненту ξ_2. Пусть ориентация тора T совпадает с ориентацией этого тора как границы цепи $\xi_1(0,1) = l_0$. Положим

$$\begin{cases} \xi_2(2k, 2k+1, 2k+2) = T,\ 0 \leqslant 2k \leqslant N-2; \\ \xi_2(k_0, N, 0) = T,\ 1 < k_0 < N-1; \\ \xi_2(i,j,k) = 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{9}$$

где k_0 — фиксированный номер. Нетрудно показать, что граничные условия 3 из определения $\mathfrak{U}$-резольвенты будут выполнены.

Теперь, зная правило построения $\mathfrak{U}$-резольвенты произвольного двумерного торического многообразия, мы с помощью теоремы 2 можем доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть X — компактное коплексное торическое многообразие размерности 2. Тогда для всякой $(2,2)$-формы ω на X можно естественным образом указать дифференциальную $(2,0)$-форму $\psi = \widetilde{\psi}(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$, голоморфную в окрестности единичного остова $T = \{|z_1| = 1,\ |z_2| = 1\} \subset \mathbb{T}^2 \subset X$ такую, что*

$$\int\limits_X \omega = (2\pi i)^2 c_{-I},$$

где c_{-I} — коэффициент при мономе $z_1^{-1} z_2^{-1}$ разложения Лорана функции $\widetilde{\psi}$ в окрестности вещественного тора T.

Доказательство. Применяя последовательно композицию операторов δ и $\overline{\partial}^{-1}$ и учитывая (8) и (9), получим

$$\int\limits_X \omega = \int\limits_T \sum_{0\leqslant 2k\leqslant N-2} \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2 \omega(2k,2k+1,2k+2) + \int\limits_T \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2 \omega(k_0,N,0) =$$

$$= \int\limits_T \left(\sum_{0\leqslant 2k\leqslant N-2} \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2 \omega(2k,2k+1,2k+2) + \left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2 \omega(k_0,N,0) \right) =$$

$$= \int\limits_T \widetilde{\psi}(z_1,z_2) dz_1\wedge dz_2,$$

где функция $\widetilde{\psi}$ голоморфна в окрестности тора T. Раскладывая функцию $\widetilde{\psi}$ в ряд Лорана и интегрируя почленно, получим

$$\int\limits_X \omega = \int\limits_T \frac{c_{-I}}{z_1 z_2} dz_1\wedge dz_2 = (2\pi i)^2 c_{-I}.$$

$\square$

5. Пример вычисления объема $\mathbb{P}_2$ в метрике Фубини-Штуди

Вычислим объем проективного пространства $\mathbb{P}_2$ в метрике Фубини-Штуди (см. [6, с. 138]), для вычисления будем использовать схему доказательства теоремы 2 и теорему 4.

Разбиение многообразия $\mathbb{P}_2$ состоит из бидисков h_0, h_1, h_2, лежащих в соответствующих элементах покрытия $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$. В карте $U_0 \simeq \mathbb{C}^2_z$ переменных (z_1,z_2) бидиски записываются следующим образом:

$$h_0 = \{z : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\},$$
$$h_1 = \{z : |z_1| \leq |z_2|, |z_2| \geq 1\},$$
$$h_2 = \{z : |z_1| \geq 1, |z_2| \leq |z_1|\},$$

и на схеме Рейнхарта могут быть изображены, как показано на рис. 3. Форма Фубини-Штуди в аффинных координатах $(z_1,z_2) \subset \mathbb{C}^2_z \simeq U_0$ имеет вид

$$\omega = -\frac{1}{2}\frac{dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_2}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3}.$$

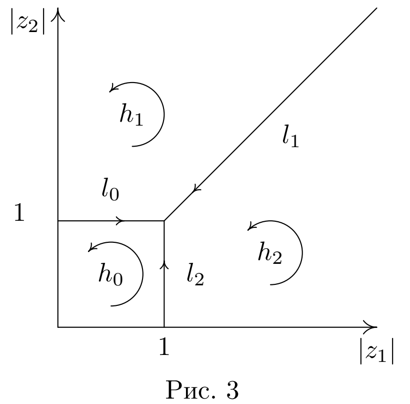

Рис. 3

Обозначим через $\omega(0)$, $\omega(1)$, $\omega(2)$ сужение формы ω на $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$ соответственно и будем рассматривать ее как $\mathfrak{U}$-коцепь. Эта форма имеет первообразную в аффинной координатной окрестности $U_0 \simeq \mathbb{C}^2_z$:

$$\overline{\partial}^{-1}\omega(0) = -\frac{1}{4}\frac{(\bar{z}_2 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 d\bar{z}_2)\wedge dz_1 \wedge dz_2}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^2}.$$

С помощью замены $z_1 = \dfrac{u_1}{u_2}$, $z_2 = \dfrac{1}{u_2}$ найдем первообразную в другой аффинной координатной окрестности $U_1 \simeq \mathbb{C}^2_u$, запишем ее в переменных z_1, z_2 :

$$\overline{\partial}^{-1}\omega(1) = \frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1}{z_2(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^2}.$$

Затем, производя замену $z_1 = \dfrac{1}{v_1}$, $z_2 = \dfrac{v_2}{v_1}$, найдем первообразную для ω в третьей аффинной координатной окрестности $U_2 \simeq \mathbb{C}^2_v$ и снова запишем ее в переменных z_1, z_2 :

$$\overline{\partial}^{-1}\omega(2) = -\frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{z_1(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^2}.$$

По определению кограничного оператора Чеха имеем

$$\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(i,j) = \overline{\partial}^{-1}\omega(j) - \overline{\partial}^{-1}\omega(i),$$

где $i,j = 0,1,2,\ i \neq j$. Формы $\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(i,j)$ имеют первообразные в $U_i \cap U_j$,:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(0,1) &= -\frac{1}{4}\frac{\bar{z}_1 dz_1 \wedge dz_2}{z_2(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)},\\
\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(1,2) &= -\frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)},\\
\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(2,0) &= -\frac{1}{4}\frac{\bar{z}_2 dz_1 \wedge dz_2}{z_1(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)}.
\end{aligned}$$

Применяя повторно оператор Чеха, получим

$$\begin{aligned}
\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\omega(0,1,2) &= \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(1,2) - \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(0,2) + \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(0,1) = \\
&= \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(1,2) + \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(2,0) + \overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\omega(0,1) = -\frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2}.
\end{aligned}$$

По теореме 4 окончательно имеем

$$\int\limits_{\mathbb{P}_2} \omega = -\frac{1}{4}\int\limits_{\substack{|z_1|=1\\|z_2|=1}} \frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2} = \pi^2.$$

6. Пример вычисления объема $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1} \omega(z_1)\wedge\omega(z_2), \tag{10}$$

где $\omega(t) = \dfrac{i}{2}\dfrac{dt\wedge d\bar t}{(1+|t|^2)^2}$ — форма Фубини-Штуди на $\mathbb{P}_1$. Разбиение на единичные бидиски в карте U_0 можно представить как показано на рис. 4.

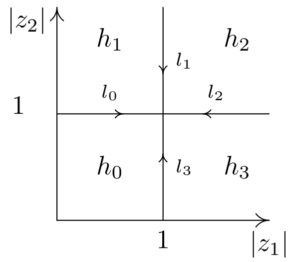

Рис. 4

Найдем первообразные в каждой из карт. Для этого сначала рассмотрим форму Фубини-Штуди в $\mathbb{P}_1$

$$\omega(t) = \frac{i}{2}\frac{dt\wedge d\bar t}{(1+|t|^2)^2},$$

её первообразная имеет вид

$$\varphi_1(t) = -\frac{i}{2}\frac{\bar t dt}{(1+|t|^2)},$$

эта первообразная имеет особенность на бесконечности (тогда как форма ω глобально определена), поэтому с помощью замены $t = \dfrac{1}{s}$ найдем первообразную в другой карте и запишем ее через t :

$$\varphi_2(t) = \frac{i}{2}\frac{dt}{t(1+|t|^2)}.$$

Теперь заметим, что в качестве первообразной формы $\omega(z_1)\wedge\omega(z_2)$, например, в карте U_0 можно взять форму $\varphi_1(z_1)\wedge\omega(z_2)$ или $\omega(z_1)\wedge\varphi_1(z_2)$, так как обе эти формы голоморфны в ней. Аналогично для остальных карт.

Для удобства обозначим через ψ форму $\omega(z_1)\wedge\omega(z_2)$ и, аналогично предыдущему примеру, под $\psi(\alpha)$ будем понимать сужение формы ψ на U_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, 3$. Применяя к $\psi(\alpha)$ оператор $\overline{\partial}^{-1}$, получим

$$\overline{\partial}^{-1}\psi(0) = \varphi_1(z_1)\wedge\omega(z_2),$$
$$\overline{\partial}^{-1}\psi(1) = \varphi_1(z_1)\wedge\omega(z_2),$$
$$\overline{\partial}^{-1}\psi(2) = \varphi_2(z_1)\wedge\omega(z_2),$$
$$\overline{\partial}^{-1}\psi(3) = \varphi_2(z_1)\wedge\omega(z_2).$$

Затем, применяя к полученным формам оператор Чеха и повторно оператор $\overline{\partial}^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(0,1) = 0,\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(1,2) = (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_2(z_2),\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(2,3) = 0,\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(3,0) = (\varphi_1(z_1) - \varphi_2(z_1)) \wedge \varphi_1(z_2),\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(1,3) = (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_1(z_2) \quad \text{или} \quad (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_2(z_2),\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(0,2) = (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_1(z_2) \quad \text{или} \quad (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_2(z_2).
\end{aligned}$$

Заметим, что выбор первообразных на пересечениях $U_1 \cap U_3$ и $U_0 \cap U_2$ также неоднозначен, однако на окончательный результат он не влияет. Поэтому выберем, например,

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(1,3) = (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_1(z_2),\\
&\overline{\partial}^{-1}\delta\overline{\partial}^{-1}\psi(0,2) = (\varphi_2(z_1) - \varphi_1(z_1)) \wedge \varphi_1(z_2).
\end{aligned}$$

Повторно применяя оператор δ, получим

$$\begin{aligned}
&\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(0,1,2) = -\frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2},\\
&\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(1,2,3) = -\frac{1}{4}\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2},\\
&\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(2,3,0) = 0,\\
&\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(0,1,3) = 0.
\end{aligned}$$

По теореме 2 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1}\psi = \int\limits_{\xi_2(0,1,2)}\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(0,1,2) + \int\limits_{\xi_2(1,2,3)}\left(\delta\overline{\partial}^{-1}\right)^2\psi(1,2,3) =$$
$$= -\frac{1}{4}\int\limits_{T}\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2} = \pi^2,$$

где по правилу (9) компонента $\xi_2(0,1,2) = T$, а компонента $\xi_2(1,2,3) = 0$.

Работа поддержана грантом Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/4620.

Список литературы

[1] Р.Ботт, Л.В.Ту, Дифференциальные формы в алгебраической топологии, М., Наука, 1989.

[2] A.M.Gleason, The Cauchy-Weil theorem, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **12**(1963), №3, 429–444.

[3] W.Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.

[4] T.Oda, Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties, New York, Springer-Verlag, 1988.

[5] Т.О.Ермолаева, А.К.Цих, Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, *Мат. сб.*, **187**(1988), №9, 45–64.

[6] Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных, т. 2, СПб., Лань, 2004.

On the Integrals over Two-dimensional Compact Complex Toric Varieties

Olga S. Ulvert

In this paper, we proof that an integral of smooth $(2,2)$-form over two-dimensional compact complex toric variety X (which contains complex torus $\mathbb{T}^2$) is equal to the integral of holomorphic $(2,0)$-form over real torus $T^2 \subset \mathbb{T}^2$.

Keywords: differential form, toric variety, Dolbeault cohomology, Čech cohomology.