

УДК 532.59

## Монотонные возмущения равновесного состояния двухслойной системы бинарных смесей

Марина В. Ефимова\*

Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,  
Россия

Получена 18.06.2010, окончательный вариант 20.07.2010, принята к печати 20.08.2010

*Исследована устойчивость относительно монотонных возмущений равновесного состояния системы бинарных смесей с общей поверхностью раздела и одной свободной границей. Найдены явные формулы зависимости числа Марангони от волнового числа и других физических параметров. Показано, что деформация границ раздела приводит к понижению критического значения числа Марангони.*

*Ключевые слова: термодиффузия, устойчивость, число Марангони.*

### 1. Постановка задачи

В условиях отсутствия массовых сил рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых вязких смесей с общей поверхностью раздела, ограниченных твердой стенкой и свободной поверхностью. Обозначим через  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) области, занятые смесями. Начало координат поместим на поверхность раздела; ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально вверх. Тогда уравнение твердой границы  $y = -l$ , свободной поверхности  $y = l$ . Движение системы описывается уравнениями Навье–Стокса, конвективного теплообмена и концентрации с учетом термодиффузии. Зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации на поверхности раздела и свободной границе описывается формулой

$$\sigma_j(\theta, c) = \sigma_0^j - \alpha_T^j(\theta - \theta_0) - \alpha_c^j(c - c_0), \quad \alpha_c^j = \text{const} < 0, \quad \alpha_T^j = \text{const} > 0,$$

где  $\sigma_0 > 0$  — постоянная, а  $c_0, \theta_0$  — концентрации и температуры в некоторой точке поверхности раздела или свободной границы.

Будем считать, что на поверхности раздела смесей заданы условия равенства скоростей, температур и баланса концентраций. Кроме того, на поверхности раздела должно быть выполнено кинематическое, динамическое условие, а также условие равенства потоков тепла и вещества через поверхность раздела.

На твердой стенке задана температура, выполнено условие прилипания и условие отсутствия потоков вещества.

На свободной границе удовлетворяем кинематическому и динамическому условиям, условию теплообмена и отсутствия потока вещества. В этом случае не учитываются процессы адсорбции-десорбции на свободной поверхности.

Состояние термодиффузионного равновесия системы двух бинарных смесей с общей

\*efmavi@mail.ru

поверхностью раздела  $y = 0$  описывается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j = 0, \quad p_j = \text{const}, \quad \theta_1 &= \frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}(y+l) + \theta_{10}, \\ \theta_2 &= \frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}(ky+l) + \theta_{10}, \\ c_1 &= -\frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}\alpha_1 y + c_0, \quad c_2 = -\frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}\alpha_2 k y + \lambda c_0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1)  $k = k_1/k_2$  — отношение коэффициентов теплопроводности;  $\lambda$  — постоянная равновесия Генри;  $c_0$  — концентрация на границе раздела;  $\beta$  — коэффициент межфазного теплообмена;  $\theta_g$  — температура газа;  $\theta_{10}$  — температура твердой стенки;  $Q$  — заданный внешний поток тепла,  $\alpha_j = k_\theta/\theta_c$  — параметр термодиффузии, где  $k_\theta$  — коэффициент термодиффузии,  $\theta_c$  — средняя температура слоя (все эти величины предполагаются постоянными). Считается, что значения  $\alpha_j < 0$  соответствуют нормальной термодиффузии, при которой тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие — в более нагретые.

## 2. Задача о малых возмущениях

Для исследования устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкостей (1.1) введем малые возмущения скорости, давления, температуры и концентрации:  $\mathbf{U}$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $K$ . Проводя линеаризацию по возмущениям, можно получить задачу для возмущения скорости, давления, температуры и концентрации в каждой смеси [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j\tau} + \frac{\nu_j}{\nu_2} \nabla P_j &= \frac{\nu_j}{\nu_2} \Delta \mathbf{U}_j; \\ \text{div } \mathbf{U}_j &= 0; \\ \frac{\nu_2}{\chi_j} T_{j\tau} + V_j \varepsilon_j &= \Delta T_j; \\ K_{j\tau} - \frac{\nu_j}{\nu_2} V_j \varepsilon_j &= \frac{d_j}{\nu_2} \Delta (K_j + Pr_j T_j). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные условия на поверхности раздела  $\eta = y/l = 0$  сводятся в этом случае к следующим:

$$\begin{aligned} U_2 &= \nu U_1, \quad V_2 = \nu V_1, \quad K_2 - \varepsilon_2 R_1 = \lambda \psi (K_1 - \varepsilon_1 R_1); \\ T_2 + \varepsilon_2 R_1 &= Pr(T_1 + \varepsilon_1 R_1), \quad T_{2\eta} = k Pr T_{1\eta}; \\ U_{2\eta} + V_{2\xi} - \rho \nu^2 (U_{1\eta} + V_{1\xi}) &= -M(T_{2\xi} + \varepsilon_2 R_{1\xi}) - \gamma_3 M(K_{2\xi} - \varepsilon_2 R_{1\xi}); \\ \rho \nu^2 P_1 - P_2 + 2(V_{2\xi} - \rho \nu^2 V_{1\xi}) &= W e_1 R_{1\xi\xi}, \quad R_{1\tau} = W_2; \\ K_{2\eta} + Pr_2 T_{2\eta} &= d \psi (K_{1\eta} + Pr_1 T_{1\eta}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничные условия на твердой стенке:

$$U_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad K_{1\eta} + Pr_1 T_{1\eta} = 0, \quad \eta = -1. \quad (2.3)$$

На свободной границе при  $\eta = 1$  имеем

$$\begin{aligned}
 R_{2\tau} = V_2, \quad U_{2\eta} = -\gamma_1 M(T_{2\xi} + \varepsilon_2 R_{2\xi}) - \gamma_2 M(K_{2\xi} - \varepsilon_2 R_{2\xi}); \\
 -P_2 + 2V_{2\eta} = We_2 R_{2\xi\xi};
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$T_{2\eta} + Bi(T_2 + \varepsilon_2 R_2) = 0, \quad K_{2\eta} + Pr_2 T_{2\eta} = 0.$$

Соотношения (2.1)–(2.4) приведены в безразмерной форме. Используются следующие единицы измерения расстояния, времени, скорости, давления, температуры и концентрации соответственно:

$$l, \quad \frac{l^2}{\nu_2}, \quad \frac{\nu_j}{l}, \quad \frac{\rho_j \nu_j^2}{l^2}, \quad \frac{(Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g))\nu_j}{(k_1 + \beta l(k+1))\chi_j}, \quad \frac{(Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g))\alpha_j}{(k_1 + \beta l(k+1))}, \quad j = 1, 2.$$

Введены также обозначения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{k+1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{k}{k+1}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \psi = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad d = \frac{d_1}{d_2};$$

$$S_j = \frac{\nu_j}{d_j} - \text{числа Шмидта}, \quad Pr_j = \frac{\nu_j}{\chi_j} - \text{числа Прандтля}, \quad Pr = \frac{Pr_1}{Pr_2};$$

$$\gamma_1 = \frac{\varkappa_T^2}{\varkappa_T^1}, \quad \gamma_2 = \frac{\varkappa_c^2 \alpha_2}{\varkappa_T^1 Pr_2}, \quad \gamma_3 = \frac{\varkappa_c^1 \alpha_2}{\varkappa_T^1 Pr_2}; \quad Bi = \frac{\beta l}{k_2} - \text{число Био};$$

$$M = \frac{\varkappa_T^1 l (Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g))}{(k_1 + \beta l(k+1))\rho_2 \nu_2 \chi_2} - \text{число Марангони}, \quad We_j = \frac{\sigma_0^j l}{\rho_2 \nu_2^2} - \text{числа Вебера},$$

$R_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{X}$  — нормальная составляющая вектора возмущений на поверхности раздела ( $j = 1$ ) и на свободной границе ( $j = 2$ ) [1].

Число Марангони  $M$  задает интенсивность термокапиллярного воздействия на границе раздела и свободной поверхности, а капиллярный параметр  $We$  характеризует способность границы к деформации. Плоской недеформируемой поверхности соответствует бесконечно большое значение  $We$ . Поскольку знак числа Марангони зависит от знака  $Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)$ , то положительные значения числа Марангони соответствуют подогреву свободной поверхности, а отрицательные значения — нагреву твердой стенки.

Решение краевой задачи (2.1)–(2.4) ищем в виде нормальных волн

$$(U, V, P, T, K, R) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta), R) \exp(i\alpha\xi - iC\tau). \tag{2.5}$$

Здесь  $\alpha$  — волновое число,  $C = C_r + iC_i$  — комплексный декремент. Критерием устойчивости равновесного состояния (1.1) служит знак мнимой части декремента: значения параметров задачи, для которых  $C_i < 0$ , соответствуют области устойчивости, если существуют такие значения параметров, что  $C_i > 0$ , то имеет место неустойчивость, случаю  $C_i = 0$  соответствует граница устойчивости (нейтральные возмущения).

После подстановки (2.5) в линеаризованные уравнения (2.1) и граничные условия (2.2)–(2.4) получаем спектральную краевую задачу для амплитуд нормальных возмущений

$$\begin{aligned}
 U_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\nu_j} iC - \alpha^2\right) U_j - i\alpha P_j &= 0; \\
 V_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\nu_j} iC - \alpha^2\right) V_j - P_j' &= 0; \\
 i\alpha U_j + V_j' &= 0; \\
 T_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\chi_j} iC - \alpha^2\right) T_j - \varepsilon_j V_j &= 0; \\
 K_j'' + \left(\frac{\nu_2}{d_j} iC - \alpha^2\right) K_j + Pr_j(T_j'' - \alpha^2 T_j) + \frac{\nu_2}{d_j} V_j \varepsilon_j &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

с условиями на твердой стенке  $\eta = -1$

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad K_{1\eta} + Pr_1 T_{1\eta} = 0. \quad (2.7)$$

На поверхности раздела  $\eta = 0$  будем иметь

$$\begin{aligned} U_2 &= \nu U_1, \quad V_2 = \nu V_1, \quad K_2 - \varepsilon_2 R_1 = \lambda \psi (K_1 - \varepsilon_1 R_1); \\ T_2 + \varepsilon_2 R_1 &= Pr(T_1 + \varepsilon_1 R_1), \quad T_{2\eta} = k Pr T_{1\eta}; \\ U_{2\eta} + i\alpha V_2 - \rho\nu^2(U_{1\eta} + i\alpha V_1) &= -Mi\alpha(T_2 + \varepsilon_2 R_1) - \gamma_3 Mi\alpha(K_2 - \varepsilon_2 R_1); \\ K_{2\eta} + Pr_2 T_{2\eta} &= d\psi (K_{1\eta} + Pr_1 T_{1\eta}); \\ \rho\nu^2 P_1 - P_2 + 2(V_{2\eta} - \rho\nu^2 V_{1\eta}) &= -\alpha^2 W e_1 R_1, \quad -iCR_1 = V_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условия на свободной границе для нахождения амплитуд нормальных возмущений будут следующими:

$$\begin{aligned} \eta = 1: \quad U_{2\eta} + i\alpha V_2 &= -\gamma_1 Mi\alpha(T_2 + \varepsilon_2 R_2) - \gamma_2 Mi\alpha(K_2 - \varepsilon_2 R_2); \\ T_{2\eta} + Bi(T_2 + \varepsilon_2 R_2) &= 0, \quad K_{2\eta} + Pr_2 T_{2\eta} = 0; \\ -P_2 + 2V_{2\eta} &= -\alpha^2 W e_2 R_2, \quad -iCR_2 = V_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 3. Монотонные возмущения

Для таких возмущений комплексный декремент  $C = 0$ . В этом случае уравнения (2.6) могут быть проинтегрированы. Действительно, полагая  $L = d^2/d\eta^2 - \alpha^2$ , легко получить, что  $L^2 V_j = 0$ . Откуда, с учетом  $V_j(0) = 0$ , найдем  $(C_j^1, C_j^2$  и т.д. — постоянные)

$$\begin{aligned} V_j(\eta) &= \frac{1}{2\alpha} C_j^1 \eta \operatorname{ch} \alpha \eta + \frac{1}{2\alpha} C_j^2 \eta \operatorname{sh} \alpha \eta + C_j^3 \operatorname{sh} \alpha \eta, \\ U_j(\eta) &= \frac{i}{\alpha} V_j' = i \left[ \frac{1}{2\alpha^2} C_j^1 (\operatorname{ch} \alpha \eta + \alpha \eta \operatorname{sh} \alpha \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\alpha^2} C_j^2 (\operatorname{sh} \alpha \eta + \alpha \eta \operatorname{ch} \alpha \eta) + C_j^3 \operatorname{ch} \alpha \eta \right], \\ P_j(\eta) &= -\frac{i}{\alpha} L U_j = \frac{1}{\alpha} C_j^1 \operatorname{ch} \alpha \eta + \frac{1}{\alpha} C_j^2 \operatorname{sh} \alpha \eta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции  $T_j(\eta), K_j(\eta)$  определяются из неоднородных уравнений

$$L T_j = \varepsilon_j V_j, \quad L K_j = -(Pr_j + \omega_j) \varepsilon_j V_j,$$

где

$$\omega_j = \frac{\nu_2}{d_j} = \begin{cases} \frac{S_1}{\nu}, & j = 1, \\ S_2, & j = 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

С использованием первого равенства из (3.1), получим

$$\begin{aligned}
 T_j(\eta) &= \frac{\varepsilon_j}{8\alpha^2} \left[ C_j^1(\eta^2 \operatorname{sh} \alpha\eta - \frac{\eta}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha\eta) + C_j^2(\eta^2 \operatorname{ch} \alpha\eta - \frac{\eta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha\eta) \right] + \\
 &\quad + \frac{\varepsilon_j}{2\alpha} C_j^3 \eta \operatorname{sh} \alpha\eta + C_j^4 \operatorname{sh} \alpha\eta + C_j^5 \operatorname{ch} \alpha\eta, \\
 K_j(\eta) &= -\frac{(Pr_j + \omega_j)\varepsilon_j}{2\alpha} \left[ \frac{C_j^1}{4\alpha} (\eta^2 \operatorname{sh} \alpha\eta - \frac{\eta}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha\eta) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_j^2}{4\alpha} (\eta^2 \operatorname{ch} \alpha\eta - \frac{\eta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha\eta) + C_j^3 \eta \operatorname{ch} \alpha\eta \right] + C_j^6 \operatorname{sh} \alpha\eta + C_j^7 \operatorname{ch} \alpha\eta.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, определению подлежат четырнадцать постоянных  $C_j^1, \dots, C_j^7$  и две постоянные  $R_1, R_2$ . Для этого имеются шестнадцать граничных условий (2.7)–(2.9). Подстановка явных формул (3.1), (3.3) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Приравнивание к нулю ее определителя и дает уравнение для числа Марангони  $M$ , которое зависит от всех параметров задачи  $Pr_j, \varepsilon_j, S_j, We_j, \nu, \lambda, \psi, d$  и волнового числа  $\alpha$ . Конечно, мы не вычисляли определитель шестнадцатого порядка, а понижали порядок системы до третьего — все постоянные выражались через  $C_1^1, R_1, R_2$ . Например, из условий  $U_2(0) = \nu U_1(0), U_1(-1) = V_1(-1) = 0$  легко выводятся равенства

$$C_1^2 = \left( \operatorname{cth} \alpha - \frac{\alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right) C_1^1, \quad C_1^3 = -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha} C_1^1.$$

Далее используются граничные условия при  $\eta = 0$  и специфика выражений (3.1) и (3.3). В результате на число Марангони получим квадратное уравнение

$$M^2 f_1 + M f_2 + f_3 = 0, \tag{3.4}$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — функции, зависящие от волнового числа  $\alpha$  и других параметров системы. Эти функции явно находятся при подстановке решений в граничные условия, но из-за громоздкости они здесь не приводятся. В плоском случае имеются две нейтральные кривые (ниже на рисунках они изображены сплошной и пунктирной линиями соответственно), обозначающие границу устойчивости равновесного состояния относительно монотонных возмущений.

Анализ механизмов неустойчивости осложняется наличием в задаче довольно большого числа независимых параметров, каждый из которых вносит свой вклад в развитие неустойчивости системы. В таких ситуациях целесообразно выделить частные случаи, в которых на появление и развитие неустойчивости влияет изменение какого-либо параметра.

На рис. 1а приведен характерный вид нейтральных кривых для монотонных возмущений, построенный при  $\lambda = 1, Bi = 10, Pr = 12, 92, \nu = 7, 8, \rho = 1, \chi = 0, 6, \psi = 1, d = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ , для недеформируемых поверхности раздела и свободной границы ( $We_j = \infty$ ). Каждая точка этой кривой дает критическое значение числа Марангони  $M_{кр}$  для возмущения с данным волновым числом. Область неустойчивости лежит над соответствующей кривой.

При нормальной термодиффузии система будет неустойчивой при подогреве свободной поверхности ( $M > 0$ ) относительно длинноволновых возмущений. Относительно же коротковолновых возмущений (рис. 1б) равновесное состояние двухслойной системы будет устойчивым при подогреве как твердой стенки, так и свободной поверхности.

Влияние концентрационных эффектов на поверхности раздела и свободной границе показано на рис. 2а и 2б соответственно.

Обнаружено, что в диапазоне длинных волн снижение концентрационных эффектов на поверхности раздела ( $\gamma_3 = 0$ ) достаточно сильно дестабилизирует состояния равновесия.

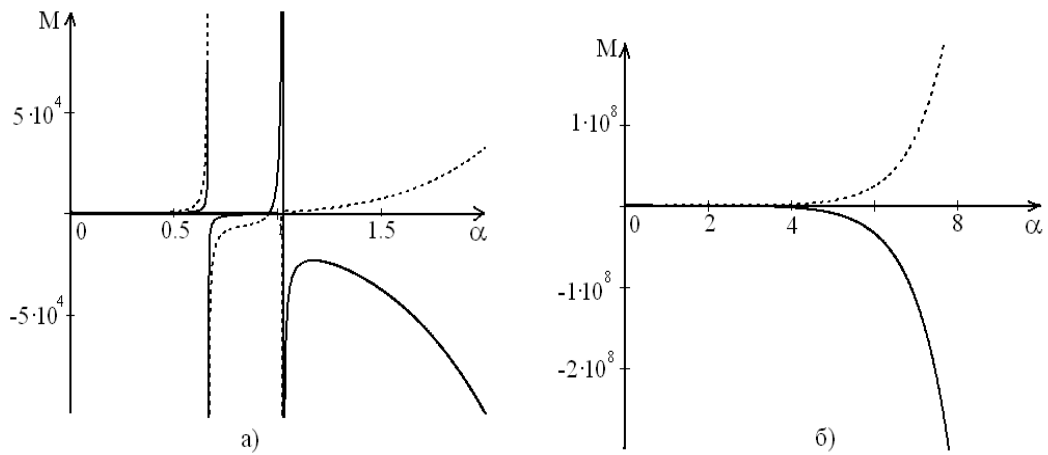


Рис. 1. Зависимость  $M$  от волнового числа  $\alpha$ : для недеформируемых поверхности раздела и свободной границы а) в диапазоне длинных волн; б) в широком диапазоне волн

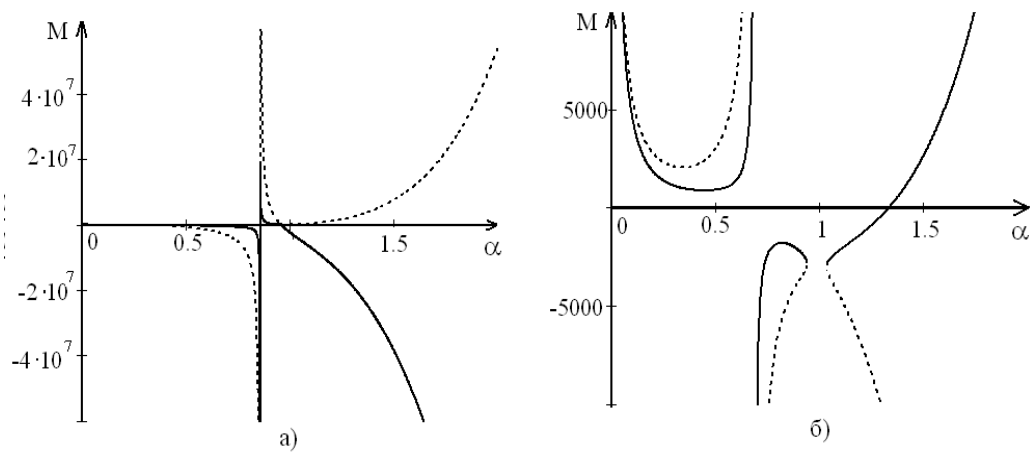


Рис. 2. Зависимость  $M$  от волнового числа  $\alpha$ : а) при  $\gamma_3 = 0$ ; б) при  $\gamma_2 = 0$

Устойчивость будет наблюдаться только при подогреве твердой стенки. Состояние равновесия будет устойчиво при подогреве свободной поверхности при коротковолновых возмущениях.

Если же концентрация на свободной границе мало влияет на поверхностное натяжение ( $\gamma_2 = 0$ ), то длинноволновые возмущения будут устойчивы как при нагреве твердой стенки, так и при незначительном подогреве свободной поверхности, при этом критическое значение числа Марангони увеличивается. При возмущениях для  $\alpha > 0,67$  (что соответствует умеренным волнам) наблюдается дестабилизация равновесного состояния. Более того, в диапазоне  $0,95 < \alpha < 1,043$  решений (3.4) не существует, поэтому на графике наблюдается разрыв.

Деформация границ раздела приводит к появлению разрывов на графике в диапазоне

длинных и умеренных волн, где уравнение (3.4) не имеет решений (рис. 3а). Область устойчивости лежит на каждом отрезке существования решений уравнения (3.4) ниже соответствующих кривых.

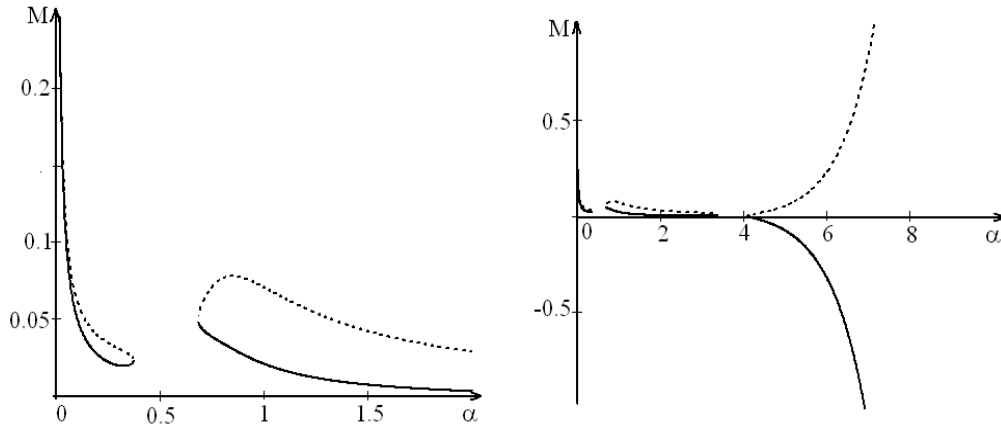


Рис. 3. Зависимость  $M$  от волнового числа  $\alpha$  для деформируемых поверхности раздела и свободной границы: а) в диапазоне длинных волн; б) при больших волновых числах

Коротковолновые возмущения, как и для случая недеформируемых поверхности раздела и свободной границы, будут устойчивы как при подогреве твердой стенки, так и при нагреве свободной поверхности (рис. 3б).

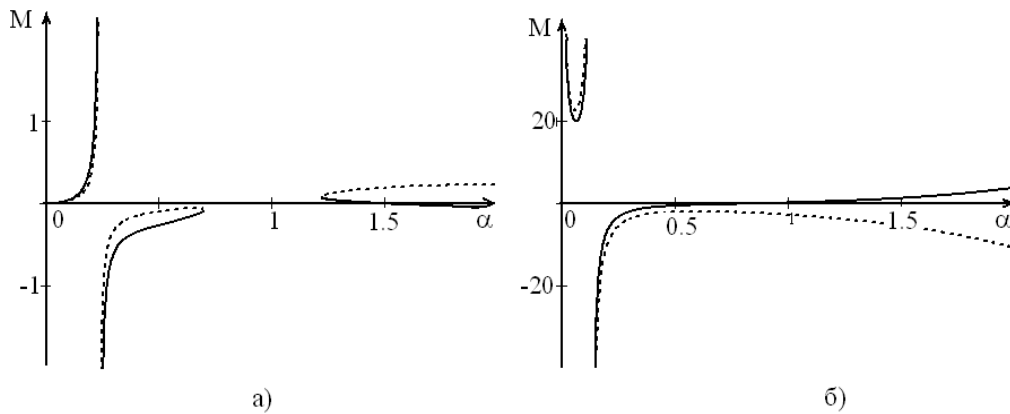


Рис. 4. Зависимость  $M$  от волнового числа  $\alpha$ : а) при  $\gamma_3 = 0$ ; б) при  $\gamma_2 = 0$

Если на поверхности раздела концентрация слабо влияет на поверхностное натяжение границы раздела ( $\gamma_3 = 0$ ), то в этом случае "разрыв" смещается в сторону умеренных волн. При возмущениях с длиной волны  $\alpha < 0,25$  устойчивость возможна при нагреве свободной поверхности, при  $0,25 < \alpha < 0,71$  состояние равновесия будет устойчивым, только при нагреве твердой стенки. Характерная кривая представлена на рис. 4а.

Слабое влияние концентрационных эффектов на свободной границе ( $\gamma_2 = 0$ ) стабилизирует равновесие системы (рис. 4б), причем для длинноволновых возмущений ( $\alpha < 0,132$ ) критическое значение числа Марангони увеличивалось и устойчивость возможна при подогреве свободной поверхности. При  $\alpha > 0,132$  устойчивость будет наблюдаться во всем диапазоне длин волн.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00762) и интеграционного проекта № 116 СО РАН.*

## Список литературы

- [1] В.К.Андреев, В.Е.Захватаев, Е.А.Рябицкий, Термокапиллярная неустойчивость, Новосибирск, Наука, 2000.

## Monotonous Perturbations of an Equilibrium Condition of Two-Layer System of Binary Mixes

Marina V. Efimova

---

*Stability concerning monotonous indignations of an equilibrium condition of system of binary mixes with the general interface and one free boundary is investigated. Formulas of dependence of number of Marangoni from wave number and other parametres are found. It is shown that interface deformation leads to critical value of number of Marangoni decrising.*

*Keywords: thermal diffusion, the number of Marangoni, stability.*