УДК 517.9

О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы

Юрий Я. Белов*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.06.2010, окончательный вариант 25.07.2010, принята к печати 10.08.2010

Исследованы задачи идентификации функции источника для полуэволюционной системы двух уравнений в частных производных, одно из которых является параболическим, а второе — эллиптическим. Рассмотрены задача Коши и первая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, краевые задачи, аппроксимация, малый параметр, сходимость.

В работе рассмотрены задачи идентификации функции источника для полуэволюционной системы двух уравнений в частных производных, одно из которых является параболическим, а второе — эллиптическим. Исследованы задача Коши и первая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Доказаны разрешимость аппроксимирующих задач, исходной задачи, сходимость решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ аппроксимирующих задач к решениям ω исходных. Получена оценка скорости сходимости решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ к ω при $\varepsilon \to 0$ в некоторых нормах.

Изучению прямых задач для систем составного типа и применению метода ε – аппроксимации посвящены работы различных авторов [1–6].

Обратные задачи для эволюционных систем составного типа см., например, в [7–10].

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) |\, 0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x < +\infty\}$ систему уравнений

$$\begin{aligned} \overset{\varepsilon}{u}_t + a_{11}\overset{\varepsilon}{u} + a_{12}\overset{\varepsilon}{v} &= \mu_1 \overset{\varepsilon}{u}_{xx} + \overset{\varepsilon}{g} f, \\ \varepsilon \overset{\varepsilon}{v}_t + a_{21}\overset{\varepsilon}{u} + a_{22}\overset{\varepsilon}{v} &= \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}_{xx} + F, \quad \varepsilon > 0 - \text{const}, \end{aligned} \tag{1}$$

с данными Коши

$$\overset{\varepsilon}{u}(0,x) = u_0(x), \quad \overset{\varepsilon}{v}(0,x) = v_0(x). \tag{2}$$

В (1) коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(t)$ заданы на отрезке $[0,T]$, $\mu_i = \text{const} > 0$, $i = 1,2$, функции f, F заданы в $\Pi_{[0,T]}$, функция $f(t,x)$ удовлетворяет при $x_0 \in (0,l)$ условию

$$f(t,x_0) \geqslant \delta, \quad \delta > 0 - \text{const}, t \in [0,T]. \tag{3}$$

Требуется найти функции $\overset{\varepsilon}{u} = \overset{\varepsilon}{u}(t,x)$, $\overset{\varepsilon}{v} = \overset{\varepsilon}{v}(t,x)$, $\overset{\varepsilon}{g} = \overset{\varepsilon}{g}(t)$, при дополнительном условии (условие переопределения)

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,x_0) = \varphi(t), \quad \varphi(t) \in C^2[0,T], \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — заданная функция на $[0,T]$.

В предположении достаточной гладкости входных данных мы:

*belov@lan.krasu.ru

- докажем существование достаточно гладкого решения $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ задачи (1), (2), (4) в $\Pi_{[0,T]}$ при любом $\varepsilon > 0$;

- при условии периодичности по x и нечетности входных данных f, F, u_0, v_0 докажем существование достаточно гладкого решения задачи определения $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ в $\overline{Q}_T = [0,T] \times [0,l]$ при первом краевом условии

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,0) = \overset{\varepsilon}{v}(t,0) = \overset{\varepsilon}{u}(t,l) = \overset{\varepsilon}{v}(t,l) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{5}$$

- докажем существование решения u, v, g первой краевой задачи (1^0), (2^0), (4^0), (5^0), где
$$u = \lim_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{u},\ v = \lim_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{v},\ g = \lim_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{g},$$
и через (1^0), (2^0), (4^0), (5^0) обозначены соответственно (1), (2), (4), (5) при $\varepsilon = 0$ ($\overset{\varepsilon}{u} = u$, $\overset{\varepsilon}{v} = v$);

- получим оценку скорости сходимости $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ к u, v, g соответственно при $\varepsilon \to 0$.

Предположим выполнение следующих условий:

- условие согласования
$$u_0(x_0) = \varphi(0); \tag{6}$$

- функции $a_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,T]$:
$$a_{ij} \in C^2[0,T],\ i,j = 1,2; \tag{7}$$

- матрица
$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$
порождает симметрическую и коэрцитивную билинейную форму $a(t,\xi,\chi) = (A(t)\xi,\chi)$:
$$a(t,\xi,\chi) = a(t,\chi,\xi)\ \forall \xi,\chi \in E_2,$$
$$a(t,\xi,\xi) \geqslant \kappa|\xi|^2\ \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in E_2,\ t \in [0,T],\ \kappa > 0 - \mathrm{const}. \tag{8}$$

Рассмотрим четное число $p \geqslant 6$. Предположим, что функции u_0, v_0, f, F имеют непрерывные производные, входящие в (9), и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}F(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}f(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_0(x)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v_0(x)\right| \leqslant C,\ j = 0,\dots,p+6,\ m = 0,1,2,\ (t,x) \in Q_T. \end{gathered} \tag{9}$$

В (9) и ниже через C будем обозначать постоянные, не зависящие от ε.

Через ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$ обозначим линейное пространство вектор-функций $(\varphi(t,x),\psi(t,x),\chi(t))$ определенных в $\Pi_{[0,T]} \times \Pi_{[0,T]} \times [0,T]$ соответственно и таких, что в $\Pi_{[0,T]}$ функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы по x до порядка l, функция φ непрерывно дифференцируема по t до порядка k_1, функция ψ непрерывно дифференцируема k_2 раз по t и функция χ непрерывно дифференцируема d раз на $[0,T]$.

Через ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\overline{Q}_T)$ обозначим ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$, где вместо $\Pi_{[0,T]}$ следует рассматривать $\overline{Q}_T$.

Теорема 1. *При выполнении условий (3), (6)-(9) задача (1), (2), (4) имеет единственное решение* $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ *класса* ${K_1}^{p+4,1,1}(\Pi_{[0,T]})$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{j=0}^{p+4}\Big|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{\omega}(t,x)\Big|+\|\overset{\varepsilon}{g}\|_{C^1[0,T]}+\Big|\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}(t,x)\Big|\leqslant C(\varepsilon),\ (t,x)\in\Pi_{[0,T]}. \tag{10}$$

Постоянная $C(\varepsilon)$ *в (10) зависит, вообще говоря, от* ε *и входных данных.*

Замечание 1. *Из (10) и системы (1) следует, что* $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{\omega}(t,x)$ *существуют и*

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{\omega}(t,x)\Big|\leqslant C(\varepsilon),\ j=0,1,p+2,\ (t,x)\in\Pi_{[0,T]}. \tag{11}$$

Предположение 1. *Предположим, что входные данные* $u_0(x)$, $v_0(x)$, $f(t,x)$, $F(t,x)$ — *периодические по* x *функции с периодом* $l>0$, $x_0\in(0,l)$ *и ряды*

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$v_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$F(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{12}$$

сходятся равномерно соответственно в $[0,l]$ *и* $\overline{Q}_T$ *вместе со своими производными по* x *до порядка* $p+4$.

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 и условий теоремы 1 при любом фиксированном* $\varepsilon>0$ *компоненты* $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$ *решения* $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ *задачи (1), (2), (4) являются периодическими функциями по переменной* x *с периодом* l *и удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{u}(t,0)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{u}(t,l)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{v}(t,0)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{v}(t,l)}{\partial x^{2m}}=0,\ m=0,1,\dots,p/2+2. \tag{13}$$

Доказательство теорем 1,2 можно провести на основе метода расщепления [11, 12]. Периодичность $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$ в теореме 2 доказывается в силу (12) расщеплением задачи (1), (2), (4) на ряд задач, компоненты решений которых $\overset{\varepsilon}{u}{}^{\tau}$, $\overset{\varepsilon}{v}{}^{\tau}$ являются периодическими по x, удовлетворяют (13) и равномерно сходятся при $\tau\to 0$ к периодическим по x с периодом l функциям $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, удовлетворяющим (13).

1. Априорные оценки

Докажем равномерные по ε оценки семейства $\{\overset{\varepsilon}{\omega}\}$ решений задачи (1), (2), (4), (5) при выполнении условий (3), (6)–(13).

Ниже через $\overset{\varepsilon}{\omega}_j = (\overset{\varepsilon}{u}_j, \overset{\varepsilon}{v}_j)$ обозначим производную по x от $\overset{\varepsilon}{\omega}$ порядка j:

$$\overset{\varepsilon}{\omega}_j = (\overset{\varepsilon}{u}_j, \overset{\varepsilon}{v}_j) = \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{u}, \frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{v}\right) = \frac{\partial^j}{\partial x^j}(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}).$$

Продифференцируем j раз ($j \leqslant p$) по переменной x задачу (1), (2), умножим результат дифференцирования на $e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+2} = e^{-\theta t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}, \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}\right)$ и проинтегрируем результат умножения по области $Q_t = (0,t)\times(0,l)$, $t \in (0,T)$, что можно сделать в силу замечания 1. После интегрирования по частям знаконеопределенных интегралов получим равенство

$$-\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_j\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}dxd\nu - \varepsilon\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_j)\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_{j+2})dxd\nu -$$
$$-\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_j, \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+2})dxd\nu + \mu_1\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}dxd\nu +$$
$$+\mu_2\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}dxd\nu = -\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{g}f_j\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}dxd\nu -$$
$$-\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}F_j\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}dxd\nu. \tag{14}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$I_1 = -\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_j\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}dxd\nu = \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}\right)^2 dxd\nu, \tag{15}$$

$$I_2 = -\varepsilon\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_j)\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_{j+2})dxd\nu = \varepsilon\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+1}\right)^2 dxd\nu, \tag{16}$$

$$I_3 = -\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_j, \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+2})dxd\nu = \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})dxd\nu =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t}\frac{\partial}{\partial t}[e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})]dxd\nu + \frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})dxd\nu -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a'(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})dxd\nu = \frac{1}{2}e^{-\theta t}\int\limits_0^l a(t; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}(t,x), \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}(t,x))dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^l a(0; \overset{o}{\omega}_{j+1}(x), \overset{o}{\omega}_{j+1}(x))dx + \frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})dxd\nu -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}a'(\nu; \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})dxd\nu, \tag{17}$$

$$I_4 = \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dxd\nu = \frac{\mu_1}{2}e^{-\theta t}\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}(t,x)dxd\nu +$$

$$+\frac{\theta\mu_1}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dxd\nu - \frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^l \overset{o}{u}{}^2_{j+2}(x)dx, \qquad (18)$$

$$I_5 = \frac{\mu_2}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dxd\nu = \frac{\mu_2}{2}e^{-\theta t}\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}(t,x)dxd\nu +$$

$$+\frac{\theta\mu_2}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dxd\nu - \frac{\mu_2}{2}\int\limits_0^l \overset{o}{v}{}^2_{j+2}(x)dx. \qquad (18')$$

Ниже мы оценим величины

$$I_6 = \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{g}f_j\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}dxd\nu,$$

$$I_7 = \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}F_j\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}dxd\nu.$$

Положив $x = x_0 \in (0,l)$ в первом уравнении системы (1), получим

$$\overset{\varepsilon}{g}(t) = \frac{\varphi'(t) + a_{11}(t)\varphi(t) + a_{12}(t)\overset{\varepsilon}{v}(t,x_0) - \mu_1\overset{\varepsilon}{u}_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)}. \qquad (19)$$

В силу условия (3) и условий на φ, φ', a_{11}, a_{12}, μ_1 функция $\overset{\varepsilon}{g}$ удовлетворяет неравенству

$$|\overset{\varepsilon}{g}(t)| \leqslant C(1 + |\overset{\varepsilon}{v}(t,x_0)| + |\overset{\varepsilon}{u}_{xx}(t,x_0)|). \qquad (19')$$

Так как в силу (13)

$$\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x_0) \leqslant \max_{x\in[0,l]}|\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x)| \leqslant C\Big(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x_0) \leqslant \max_{x\in[0,l]}|\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| \leqslant C\Big(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$|\overset{\varepsilon}{g}(t)| \leqslant C(1 + \Big(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_x(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xxx}(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}). \qquad (20)$$

Лемма 1. *При $j \geqslant 2$ в силу (13) имеют место неравенства*

$$\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_x dxd\nu \leqslant C_1\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}dxd\nu,$$

$$\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xxx}dxd\nu \leqslant C_2\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}dxd\nu, \qquad (21)$$

где постоянные C_i, $i = 1,2$, зависят лишь от j, l и не зависят от функций $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{u}$.

В силу (20), (21) неравенства Коши ($|ab| \leqslant 1/2(\alpha a^2+1/\alpha b^2)\;\forall a, b$ и $\alpha > 0$), интегрирования по частям по переменной x и леммы 1 при $j \geqslant 2$

$$I_8 = \left| \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{g}(\nu) f_j \frac{\partial}{\partial t} \overset{\varepsilon}{u}_{j+2} dx d\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \left\{ 1 + \left(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_x(\nu,x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xxx}(\nu,x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \left| \frac{\partial}{\partial t} \overset{\varepsilon}{u}_{j+1} \right| dx d\nu \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ 1 + \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_x dx d\nu + \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xxx} dx d\nu + \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1} dx d\nu \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t} \overset{\varepsilon}{u}_{j+1} \right)^2 dx d\nu \leqslant C \left\{ 1 + \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1} dx d\nu + \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1} dx d\nu \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t} \overset{\varepsilon}{u}_{j+1} \right)^2 dx d\nu. \tag{22}$$

Оценим

$$I_9 = \left| \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} F_j \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}) dx d\nu \right|.$$

После интегрирования по частям по переменным t и x получим неравенство

$$I_9 = \left| \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} F_{j+1} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\varepsilon}{v}_{j+1}) dx d\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^l e^{-\theta t} F_{j+1}(t,x) \overset{\varepsilon}{v}_{j+1}(t,x) dx - \int\limits_0^l F_{j+1}(0,x) \overset{o}{v}_{j+1}(x) dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \frac{\partial}{\partial t} F_{j+1} \overset{\varepsilon}{v}_{j+1} dx d\nu + \theta \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} F_{j+1} \overset{\varepsilon}{v}_{j+1} dx d\nu \right|. \tag{23}$$

Из (23) в силу (9), соотношения

$$|\psi \overset{\varepsilon}{v}_{j+1}| \leqslant \alpha \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1} + \frac{1}{\alpha} \psi^2,$$

верного при любом фиксированном $\alpha > 0$, следует неравенство

$$I_9 \leqslant \alpha \int\limits_0^l e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(t,x) dx + \alpha \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1} dx d\nu +$$

$$+ \alpha\theta \int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1} dx d\nu + C_1(\alpha, \theta), \tag{24}$$

где постоянная $C_1(\alpha, \theta)$ зависит от α, θ и не зависит от $\varepsilon > 0$.

В силу условий (8), (9) и соотношений (15)–(18), (18′), (22), (24) из (14) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}\right)^2 dxd\nu + \frac{\kappa}{2}\int\limits_0^l e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x)dx + \left(\frac{\kappa}{2}-\alpha\right)\int\limits_0^l e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(t,x)dx +$$

$$+\left(\frac{\theta}{2}\kappa - C\right)\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x)dxd\nu + \left(\theta(\frac{\kappa}{2}-\alpha) - C - \alpha\right)\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}dxd\nu +$$

$$+\frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^l e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dx + \frac{\mu_1\theta}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dxd\nu + \frac{\mu_2}{2}\int\limits_0^l e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dx +$$

$$+\frac{\mu_2\theta}{2}\int\limits_{Q_t} e^{-\theta\nu}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dxd\nu \leqslant C_2(\alpha,\theta), \quad t\in[0,T], \tag{25}$$

где $C_2(\alpha,\theta)$ – постоянная, зависящая от α, θ, C_1, C, T, l, μ_i, $i=1,2$, и не зависит от $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$).

Положим $\alpha = \dfrac{\kappa}{4}$ в (25), затем выберем $\theta = \tilde\theta$ таким, чтобы все коэффициенты, стоящие перед интегралами в левой части неравенства (25), были больше

$$\gamma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{4}, \frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{2}\right\}.$$

Получим неравенство

$$\gamma e^{-\tilde\theta T}\left\{\int\limits_{Q_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}\right)^2 dxd\nu + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(t,x)dx +\right.$$

$$+\int\limits_{Q_t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}dxd\nu + \int\limits_{Q_t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}dxd\nu + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}(t,x)dx +$$

$$\left.+\int\limits_{Q_t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dxd\nu + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}(t,x)dx + \int\limits_{Q_t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dxd\nu\right\} \leqslant C_2(\kappa,\tilde\theta), \quad t\in[0,T],$$

откуда следуют оценки

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_T}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}dxdt + \int\limits_{Q_T}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}dxdt + \\ + \int\limits_{Q_T}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dxdt + \int\limits_{Q_T}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dxdt \leqslant R,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}(t,x)dx + \\ + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}(t,x)dx \leqslant R, \quad \forall t\in[0,T],\end{gathered} \tag{27}$$

где $R = C_2(\kappa,\tilde\theta)e^{\tilde\theta T}/\gamma$.

Замечание 2. *Мы доказали (27) для $j \geqslant 2$. В силу условий (13) и неравенства типа Пуанкаре–Фридрихса*

$$\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}_j^2(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}_j^2(t,x)dx \leqslant C\Bigg(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}_{j+1}^2(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}_{j+1}^2(t,x)dx\Bigg), t \in [0,T], \tag{28}$$

неравенство (27) имеет место при $j = 0, 1, \dots, p$.

Из (27), (28) равномерно по ε и по $t \in [0,T]$

$$\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}_j^2(t,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}_j^2(t,x)dx \leqslant C,\ j = 0, 1, \dots, p+2. \tag{29}$$

Лемма 2. *Множества $\{\overset{\varepsilon}{u}_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}_j\}$ равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничены в $\overline{Q}_T$:*

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 1, \dots, p+1. \tag{30}$$

Доказательство. В силу (13), (29)

$$|\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x)| \leqslant l^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}{}_{j+1}^2(t,x))^2dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant C,\ t \in [0,T],\ j = 0, 1, \dots, p+1. \tag{30$'$}$$

Отсюда следует, что

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0, 1, \dots, p+1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\overset{\varepsilon}{v}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0, 1, \dots, p+1.$$

□

Лемма 3. *Множество $\overset{\varepsilon}{g}(t)$ равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничено на $[0,T]$:*

$$\|\overset{\varepsilon}{g}\|_{C[0,T]} \leqslant C. \tag{31}$$

Доказательство леммы 3 следует из соотношений (19$'$), (30).

Введем следующие обозначения:

$$\overset{\varepsilon}{u}{}'_j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \overset{\varepsilon}{u}}{\partial t}\right), \quad \overset{\varepsilon}{v}{}'_j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}}{\partial t}\right).$$

Докажем равномерные по ε оценки множества $\{\overset{\varepsilon}{v}{}'_j\}$.

Продифференцируем систему (1) по переменной t, что возможно в силу (10). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{11}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{12}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a'_{11}\overset{\varepsilon}{u} + a'_{12}\overset{\varepsilon}{v} = \mu_1 \overset{\varepsilon}{u}{}'_{xx} + \overset{\varepsilon}{g}{}' f + \overset{\varepsilon}{g} f', \\ &\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a_{21}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{22}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a'_{21}\overset{\varepsilon}{u} + a'_{22}\overset{\varepsilon}{v} = \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}{}'_{xx} + F'. \end{aligned} \tag{32}$$

Предположим выполнение условия согласования входных данных

$$\mu_2 \overset{o}{v}_{xx}(x) + F(0,x) - a_{21}(0)\overset{o}{u}(x) - a_{22}(0)\overset{o}{v}(x) = 0. \tag{33}$$

В силу условия (33) и второго уравнения системы (1)

$$\overset{\varepsilon}{v}'(0,x) = 0. \tag{34}$$

Из первого уравнения системы (1) следует, что

$$\overset{\varepsilon}{u}'(0,x) = \mu_1 \overset{o}{u}_{xx}(x) + \overset{\varepsilon}{g}(0)f(0,x) - a_{11}(0)\overset{o}{u}(x) - a_{12}(0)\overset{o}{v}(x) \equiv \phi(x). \tag{35}$$

Продифференцируем j раз по переменной x задачу (32), (34), (35), умножим результат дифференцирования на $e^{-\theta t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{u}'_{j+2}), \dfrac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}'_{j+2})\right)$ и проинтегрируем результат умножения по области $Q_t = (0,t) \times (0,l)$, $t \in (0,T]$. На основании (9), (34), (35), в основном повторяя рассуждения, приведенные при получении неравенства (29), получим неравенство

$$\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}'_j(t,x))^2 dx + \int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{v}'_j(t,x))^2 dx \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p+2. \tag{36}$$

Из (36) (см. доказательство леммы 2) следует

Лемма 4. *Множества* $\{\overset{\varepsilon}{u}'_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}'_j\}$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *ограничены в* $\overline{Q}_T$*:*

$$\|\overset{\varepsilon}{u}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p+1. \tag{37}$$

В силу неравенств (30), (37) множества $\{\overset{\varepsilon}{u}_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}_j\}$, $j = 0,1,\ldots,p$, удовлетворяют условиям теоремы Арцела (о компактности в $C(\overline{Q}_T)$). На основании теоремы Арцела существует подпоследовательность $(\overset{\mu}{u}, \overset{\mu}{v})$ последовательности векторов $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v})$ и вектор-функция (u,v) такие, что при $\mu \to 0$

$$\overset{\mu}{u}_j \to u_j, \quad \overset{\mu}{v}_j \to v_j \quad \text{сильно в} \quad C(\overline{Q}_T), \quad j = 0,1,\ldots,p. \tag{38}$$

Переходя к пределу при $\mu \to 0$ в системе (1) (при $\varepsilon = \mu$) и учитывая при этом оценку (37) (при $j = 0$), в силу (38) получим, что вектор (u,v) удовлетворяет в $\overline{Q}_T$ системе уравнений

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + a_{11}(t)u(t,x) + a_{12}(t)v(t,x) &= \mu_1 u_{xx}(t,x) + g(t)f(t,x), \\ a_{21}(t)u(t,x) + a_{22}(t)v(t,x) &= \mu_2 v_{xx}(t,x) + F(t,x), \end{aligned} \tag{39}$$

начальным условиям

$$u(0,x) = \overset{o}{u}(x), \quad v(0,x) = \overset{o}{v}(x), \quad x \in [0,l], \tag{40}$$

краевым условиям

$$u(t,0) = v(t,0) = u(t,l) = v(t,l) = 0 \tag{41}$$

и условию переопределения

$$u(t,x_0) = \varphi(t). \tag{42}$$

В (39) в силу (19), (38)

$$g(t) = \frac{\varphi'(t) + a_{11}(t)\varphi(t) + a_{12}(t)v(t,x_0) - \mu_1 u_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)},$$

и

$$\overset{\varepsilon}{g}(t) \to g(t) \quad \text{сильно в} \quad C[0,T]. \tag{43}$$

Из (38), (39), (43) следует, что $(u,v,g) \in {K_0}^{p,1,0}(\overline{Q}_T)$.

2. Единственность решения задачи (39)–(42)

Пусть векторы $(\overset{1}{u}, \overset{1}{v}, \overset{1}{g})$, $(\overset{2}{u}, \overset{2}{v}, \overset{2}{g})$ – два решения задачи (39)-(42) класса ${K_0}^{p,1,0}(\overline{Q}_T)$ и $\tilde{u} = \overset{1}{u} - \overset{2}{u}$, $\tilde{v} = \overset{1}{v} - \overset{2}{v}$, $\tilde{g} = \overset{1}{g} - \overset{2}{g}$.

Вектор $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{g}) = (\overset{1}{u} - \overset{2}{u}, \overset{1}{v} - \overset{2}{v}, \overset{1}{g} - \overset{2}{g})$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{u}_t(t,x) + a_{11}(t)\tilde{u}(t,x) + a_{12}(t)\tilde{v}(t,x) = \mu_1 \tilde{u}_{xx}(t,x) + \tilde{g}(t) f(t,x), \tag{44}$$

$$a_{21}(t)\tilde{u}(t,x) + a_{22}(t)\tilde{v}(t,x) = \mu_2 \tilde{v}_{xx}(t,x), \tag{45}$$

начальным условиям

$$\tilde{u}(0,x) = \tilde{v}(0,x) = 0, \tag{46}$$

краевым условиям

$$\tilde{u}(t,0) = \tilde{v}(t,0) = \tilde{u}(t,l) = \tilde{v}(t,l) = 0 \tag{47}$$

и условию переопределения

$$\tilde{u}(t,x_0) = 0. \tag{48}$$

В силу однородности уравнения (45), условий (46)–(48) и равенства

$$\tilde{g}(t) = \frac{a_{12}(t)\tilde{v}(t,x_0) - \mu_1 \tilde{u}_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)}$$

имеет место (см. вывод оценки (29)) неравенство

$$\int\limits_0^l (\tilde{u}(t,x))^2 dx + \int\limits_0^l (\tilde{v}(t,x))^2 dx \leqslant 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

откуда следует, что $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ в $\overline{Q}_T$.

Доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (3), (6), (9), (33) и предположение 1. Тогда решение (u, v, g) задачи (39)–(42) существует и единственно в классе ${K_0}^{p,1,0}(\overline{Q}_T)$.*

В силу единственности решения задачи (39)-(42) в классе ${K_0}^{p,1,0}(\overline{Q}_T)$ и принадлежности (u, v, g) этому классу следует, что последовательность $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ сходится к (u, v, g) так же, как и выбранная нами выше подпоследовательность $(\overset{\mu}{u}, \overset{\mu}{v}, \overset{\mu}{g})$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\overset{\varepsilon}{u}_j \to u_j, \quad \overset{\varepsilon}{v}_j \to v_j \quad \textit{сильно в} \quad C(\overline{Q}_T), \quad j = 0, 1, \ldots, p,$$

$$\overset{\varepsilon}{g} \to g(t) \quad \textit{сильно в} \quad C[0,T]. \tag{49}$$

3. Скорость сходимости $\overset{\varepsilon}{\omega}$ к ω при $\varepsilon \to 0$

Вычтем из системы (1) систему (39). Обозначив $\overset{\varepsilon}{\omega} - \omega = (\overset{\varepsilon}{u} - u, \overset{\varepsilon}{v} - v) = = (\overset{\varepsilon}{r}^{(1)}, \overset{\varepsilon}{r}^{(2)}) = \overset{\varepsilon}{r}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{r}^{(1)}) + a_{11}\overset{\varepsilon}{r}^{(1)} + a_{12}\overset{\varepsilon}{r}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial^2 \overset{\varepsilon}{r}^{(1)}}{\partial x^2} + \overset{\varepsilon}{G} f, \\ &\varepsilon \frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}}{\partial t} + a_{21}\overset{\varepsilon}{r}^{(1)} + a_{22}\overset{\varepsilon}{r}^{(2)} = \mu_2 \frac{\partial^2 \overset{\varepsilon}{r}^{(2)}}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{50}$$

для вектора $\overset{\varepsilon}{r} = (\overset{\varepsilon}{r}^{(1)}, \overset{\varepsilon}{r}^{(2)})$, удовлетворяющего условиям

$$\overset{\varepsilon}{r}(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{51}$$

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\overset{\varepsilon}{r}(t,0) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\overset{\varepsilon}{r}(t,l) = 0, \quad m = 0,1,\ldots,p/2. \tag{52}$$

В (50) функция $\overset{\varepsilon}{G}$ имеет вид

$$\overset{\varepsilon}{G}(t) = \overset{\varepsilon}{g}(t) - g(t) = \frac{a_{12}(t)\overset{\varepsilon}{r}^{(2)}(t,x_0) - \mu_1 \overset{\varepsilon}{r}^{(1)}_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)}. \tag{53}$$

Продифференцируем трижды задачу (50), (51) по переменной x. Умножим первое продифференцированное уравнение на $e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{r}_3^{(1)}$ и проинтегрируем результат по Q_t, $t \in (0,T]$, умножим второе продифференцированное уравнение на $e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{r}_3^{(2)}$ и проинтегрируем результат по Q_t. Сложив результаты интегрирования, получим, в основных моментах повторяя вывод оценки (29), неравенство

$$\begin{gathered}\int_0^l (\overset{\varepsilon}{r}_3^{(1)}(t,x))^2 dx + \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(1)}(t,x))^2 dxdt + \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(2)}(t,x))^2 dxdt \leqslant \\ \leqslant \varepsilon C \int_{Q_T} \left|\frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}_3}{\partial t}\right| |\overset{\varepsilon}{r}_3^{(2)}(t,x)| dxdt.\end{gathered} \tag{54}$$

В силу (37), (30), (38)

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}_3}{\partial t}\right| |\overset{\varepsilon}{r}_3^{(2)}(t,x)| dxdt \leqslant C,$$

откуда и из (54)

$$\int_0^l (\overset{\varepsilon}{r}_3^{(1)}(t,x))^2 dx + \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(1)}(t,x))^2 dxdt + \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(2)}(t,x))^2 dxdt \leqslant \varepsilon C. \tag{55}$$

В силу (52) нетрудно показать (см. (28)), что

$$\begin{gathered}\int_0^l (\overset{\varepsilon}{r}_j^{(1)}(t,x))^2 dx \leqslant C \int_0^l (\overset{\varepsilon}{r}_3^{(1)}(t,x))^2 dx, \quad j = 0,1,2,3, \\ \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_k^{(1)}(t,x))^2 dxdt \leqslant C \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(1)}(t,x))^2 dxdt, \quad k = 0,1,2,3,4, \\ \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_k^{(2)}(t,x))^2 dxdt \leqslant C \int_{Q_T} (\overset{\varepsilon}{r}_4^{(2)}(t,x))^2 dxdt, \quad k = 0,1,2,3,4,\end{gathered} \tag{56}$$

Из (55), (56) следуют неравенства

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j - u_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant \varepsilon^{1/2} C, \quad j = 0,1,2, \tag{57}$$

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_k - u_k\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_k - v_k\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \varepsilon^{1/2} C, \quad k = 0,1,\ldots,4. \tag{58}$$

Доказана

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда имеют место соотношения (57), (58).*

Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Предположим выполнение условий теоремы 2. В силу периодичности входных данных (см. предположение 1 и доказательство теорем 3–5) имеет место

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда решение* (u, v, g) *в* $\Pi_{[0,T]}$ *задачи*

$$u_t + a_{11}u + a_{12}v = \mu_1 u_{xx} + gf$$

$$a_{21}u + a_{22}v = \mu_2 v_{xx} + F,$$

$$u|_{t=0} = \overset{o}{u}, \quad v|_{t=0} = \overset{o}{v},$$

$$u(t, x_0) = \varphi(t)$$

существует и единственно в классе ${K_0}^{p,1,0}(\Pi_{[0,T]})$. *При* $\varepsilon \to 0$

$$\overset{\varepsilon}{u}_j \to u_j, \quad \overset{\varepsilon}{v}_j \to v_j \quad \text{равномерно в} \quad \Pi_{[0,T]},$$

$$\overset{\varepsilon}{g} \to g \quad \text{равномерно в} \quad C[0, T],$$

$$|\overset{\varepsilon}{u}(t, x) - u(t, x)| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}$$

и выполняется соотношение (58).

В теореме 6 вектор $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ — решение задачи (1), (2), (4), функция $g(t)$ определяется равенством в (43).

Автор благодарит С.В. Полынцеву за помощь в оформлении данной рукописи.

Список литературы

[1] А.П.Осколков, Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему уравнений Навье-Стокса, *Записки научных семинаров ЛОМИ АНСССР*, **21**(1971), 78–103.

[2] П.Е.Соболевский, В.В.Васильев, Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса, *Численные методы механики сплошной среды*, Новосибирск, **9**(1978), №5, 115–139.

[3] Ю.Я.Белов, Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимации некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течение океана, *Сиб. матем. журн.*, **20**(1979), №6, 1206–1225.

[4] А.В.Кажихов, Избранные труды. Математическая гидродинамика, Новосибирск, Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2008.

[5] С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов, В.Н.Монахов, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, 1983.

[6] Ж.Л.Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Москва, 1972.

[7] Yu.Ya.Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, *VSP*, Utrecht. Boston. Köln. Tokyo, 2002.

[8] П.Ю.Вячеславова, Р.В.Сорокин, Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **2**(2009), №3, 288–297.

[9] Р.В.Сорокин, Т.Н.Шипина, О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа, *Вычислительные технологии*, **8**(2003), №3, 139–146.

[10] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekkar, Inc., 1999.

[11] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967.

[12] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

An Identification Problem of Source Function for One Semievolutionary System

Yuri Ya. Belov

An identification problem of source function for the semievolutionary system of two partial differential equations, one of which is parabolic, and the second - elliptic are investigated. The Cauchy problem and the first boundary-value problem are considered. Initial problems are approximated by problems in which the elliptic equation is replaced with the parabolic equation containing the small parameter $\varepsilon > 0$ *at a derivative with respect to time.*

Keywords: partial differential equations, boundary-value problems, approximation, small parameter, convergence.