Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(3), 389–394

УДК 517.55

Об асимптотике функции векторного разбиения

Денис Е. Лейнартас*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.04.2010, окончательный вариант 25.05.2010, принята к печати 10.06.2010

Используя методы теории производящих функций и интегральных представлений, получена асимптотическая оценка для функции векторного разбиения.

Ключевые слова: производящая функция, интегральное представление, амеба алгебраической гиперповерхности.

Обозначим $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, $a^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ — вектор-столбцы с целыми компонентами $a_{ji} \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, m$, и рассмотрим в n-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ конус, порожденный этими векторами:

$$\sigma = \{\beta \in \mathbb{Z}^n : \beta = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a^i, \alpha_i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Обозначим $b(\beta)$ число всех представлений вектора β через систему образующих $\{a^i\}, i = 1, \ldots, m$ с целыми неотрицательными коэффициентами α_i. Функция $b(\beta)$ целочисленных аргументов β изучалась в работе [1] в связи с исследованиями рациональных многогранников и была названа *функцией векторного разбиения*. Для нее в [1] были получены несколько формул, в частности многомерный аналог формулы Эйлера-Маклорена. В другой интерпретации числа $b(\beta)$ появляются в комбинаторном анализе (см. [2]) в задаче об отыскании целых неотрицательных решений $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ системы линейных диофантовых уравнений

$$A\alpha = \beta, \tag{1}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица размерности $n \times m$, α и β — вектор-столбцы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

В данном случае $b(\beta)$ — число решений системы (1) с целыми неотрицательными компонентами. Отметим еще работу [3], где рассматривается уравнение

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m = \beta$$

*lein@mail.ru

с целыми коэффициентами $a_1, \dots, a_m$, а целочисленные решения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ищутся в кубе $0 \leqslant \alpha_i \leqslant k$. Такие уравнения возникают в ряде задач целочисленного программирования, а также при изучении алгебраических и комбинаторных свойств матриц планов экспериментов. В последнем случае изучаются линейные комбинации векторов с элементами из конечного алфавита над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Существование линейной зависимости таких векторов влечет существование решений последнего уравнения.

Рассмотрим n-мерную последовательность $\{b(\beta)\}_{\beta\in\sigma}$. Задачу об оценке $b(\beta)$ будем понимать в следующем смысле (см., например, [4]). Фиксируем элемент $p \in \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим одномерную подпоследовательность $\{b(\mu p)\}_{\mu=0}^{\infty}$ последовательности $\{b(\beta)\}_{\beta\in\sigma}$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение величины $b(\mu p)$ при $\mu \to \infty$.

Поскольку основной результат удобнее формулировать в терминах теории выпуклых многогранных конусов, приведем необходимые определения (см., например, [2]).

Выпуклым многогранным конусом в $\mathbb{R}^n$ называется пересечение конечного числа полупространств.

Мы будем рассматривать выпуклый многогранный конус вида

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i, \lambda_i \geqslant 0\}, \tag{2}$$

где a^i — вектор-столбцы матрицы A.

Опорной гиперплоскостью H конуса σ называется такая гиперплоскость, пересекающая σ, что конус лежит по одну сторону от нее.

Грань τ конуса σ — это подмножество $H \cap \sigma$ в σ, где H — какая-либо опорная гиперплоскость. Всякая грань τ конуса σ сама является выпуклым многогранным конусом.

Размерностью грани τ называется размерность подпространства в $\mathbb{R}^n$, натянутого на τ. Если $\dim \tau = k$, то τ называется k-гранью и обозначается τ_k.

Для конуса (2) всякую его грань τ_k можно записать в виде

$$\tau_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} a^{i_j}, \lambda_{i_j} \geqslant 0\}$$

с некоторым набором векторов a^{i_j} из семейства $\{a^j\}$.

Конус σ называется *заостренным*, если из того, что $a^j \in \sigma$ и $-a^j \in \sigma$, следует, что $a^j = 0$.

Теорема 1. *Пусть σ — заостренный конус, порожденный векторами a^i с целочисленными компонентами. Если целочисленный вектор $p = (p_1, \dots, p_n)$ принадлежит k-грани τ_k конуса σ, тогда для функции векторного разбиения справедлива оценка*

$$b(\mu p) \leqslant c\mu^{m_k - k}, \ \text{для } \mu = 0, 1, 2, \dots,$$

где m_k — число векторов из семейства $a^1, \dots, a^m$, лежащих на грани τ_k, а $c = c(p)$ — константа, зависящая лишь от p.

Замечание 1. *Если $p \notin \sigma \cap \mathbb{Z}^n$, то очевидно $b(\mu p) = 0$.*

Отметим, что случай, когда компоненты векторов a^i неотрицательны, т.е. $a^i \in \mathbb{Z}^n_+$, рассматривался в статье [5].

Для *доказательства* данной теоремы мы будем использовать понятия многогранника Ньютона и амебы алгебраической гиперповерхности. Введем соответствующие обозначения и определения.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\} \subset \mathbb{Z}^n$ — некоторое фиксированое конечное множество векторов с целыми компонентами. Рассмотрим многочлен Лорана вида $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma x^\gamma \equiv P(x)$, где $x^\gamma = x_1^{\gamma_1}\dots x_n^{\gamma_n}, x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство.

Многогранником Ньютона N_P многочлена Лорана P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества Γ.

Амебой называется образ множества нулей $V = \{x \in \mathbb{C}^n : P(x) = 0\}$ многочлена $P(x)$ при отображении

$$\operatorname{Log} : x = (x_1,\dots,x_n) \to (\log|x_1|,\dots,\log|x_n|) = \operatorname{Log} x.$$

Приведем два нужных нам свойства амебы. Другие свойства, а также их доказательства приведены в [6].

(i) Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ состоит из конечного числа связных компонент, которое не превосходит числа целых точек многогранника N_P.

(ii) Если ν — вершина многогранника N_P, то ей соответствует (непустая) связная компонента дополнения амебы E_ν такая, что *двойственный конус* $C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s,\nu\rangle = \max\limits_{\alpha\in N_P}\langle s,\alpha\rangle\}$ является асимптотическим для этой компоненты, т.е. для любого $u \in E_\nu$ справедливо включение $u + C_\nu \subset E_\nu$, и никакой конус, содержащий C_ν, этому свойству не удовлетворяет.

Пусть теперь $F(x) = \sum\limits_{\beta\in\mathbb{Z}^n} b(\beta)x^\beta$ — производящая функция n-мерной последовательности $\{b(\beta)\}_{\beta\in\sigma\cap\mathbb{Z}^n}$ (функции векторного разбиения). Непосредственно проверяется, что

$$F(x) = \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ji}})^{-1} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{Q_i}, \tag{3}$$

где $Q_i = 1 - x^{a^i}, x^{a^i} = x_1^{a_{1i}}\cdots x_n^{a_{ni}}$. Обозначим $P(x) = \prod\limits_{i=1}^m Q_i$ и N_P — многогранник Ньютона многочлена $P(x)$, а $V = \{x \in \mathbb{C}^n : P(x) = 0\}$ — множество нулей этого многочлена. Отметим, что из определения многочлена P следует, что $0 \in N_P$, а так как конус σ заостренный, то точка 0 — вершина многогранника N_P.

Пусть E_0 — связная компонента дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$, соответствующая этой вершине. Нетрудно видеть, что

$$E_0 = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, u\rangle < 0, i = 1,2,\dots,m\}$$

и, если $u \in E_0$, то на остове $T^n = \operatorname{Log}^{-1} u = \{x \in \mathbb{C}^n : |x_j| = e^{u_j}, j = 1,\dots,n\}$ справедливо неравенство $|x^{a^i}| < 1$.

Для фиксированных $p = (p_1,\dots,p_n) \in \sigma\cap\mathbb{Z}^n$ и $s = (s_1,\dots,s_n) \in \sigma\cap\mathbb{Z}^n$ определим (однократный) степенной ряд

$$h_{p,s}(z) = \sum_{\mu=0}^\infty b(\mu p - s)z^\mu, \tag{4}$$

который назовем (p,s) — диагональю ряда $F(x)$.

Предложение 1. *Для производящей функции* $h_{p,s}(z)$ *одномерной последовательности* $\{b(\mu p - s)\}_{\mu=0}^{\infty}$ *при* $|z| < 1$ *справедливо интегральное представление*

$$h_{p,s}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{x^{p+s-I} dx}{Q_0(x,z) Q_1(x) \cdots Q_m(x)}, \tag{5}$$

где $Q_0(x,z) = x^p - z$, $T^n = \mathrm{Log}^{-1} u, u \in E_0 \cap \{u \in \mathbb{R}^n : \langle p, u \rangle > \log |z|\}$.

Доказательство. Так как $p \in \sigma$ и $|z| < 1$, то пересечение полупространства $\Pi_z = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle p, u \rangle > \log |z|\}$ с компонентой дополнения амебы E_0 не пусто. Для $u \in E_0 \cap \Pi_z$ на остове $T^n = \mathrm{Log}^{-1} u$ справедливы неравенства

$$|x^{a^i}| < 1 \text{ и } |\frac{z}{x^p}| < 1.$$

Разлагая подынтегральную функцию $\dfrac{1}{Q_0(x,z) Q_1(x) \cdots Q_m(x)}$ в ряд, равномерно сходящийся на T^n, и почленно его интегрируя, убедимся в справедливости формулы (5). □

Интегралы вида (5) изучались в работе [7], где *доказано, что* $h_{p,s}(z)$ *является рациональной функцией, все полюса которой лежат на единичной окружности* $\{|z| = 1\}$. Однако метод доказательства (повторное интегрирование в (5)) не дает возможности оценить порядки этих полюсов, которые и определяют асимптотику коэффициентов $b(\mu p - s)$. Нас же интересует полюс наивысшего порядка, который вносит основной вклад в асимптотику.

Предложение 2. *Если рациональная, с полюсами на единичной окружности функция, определенная формулой* (5)*, имеет полюс в точке* $z = 1$*, то это полюс наивысшего порядка.*

Доказательство. Пусть порядок полюса в точке $z = 1$ равен q, а порядок полюса в точке $z = e^{i\varphi}, \varphi \neq 0$, равен t. Предположим, что $t > q$, тогда для $r < 1$

$$|(re^{i\varphi} - e^{i\varphi})^t h_{p,s}(re^{i\varphi})| = |r-1|^t \sum_{\mu=0}^{\infty} b(\mu p - s) e^{i\mu\varphi} r^{\mu}| \leqslant$$

$$\leqslant |r-1|^t \sum_{\mu=0}^{\infty} b(\mu p - s) r^{\mu} = |r-1|^t h_{p,s}(r).$$

Переходя к пределу при $r \to 1 - 0$, получим, что

$$\lim_{r \to 1-0} (re^{i\varphi} - e^{i\varphi})^s h(re^{i\varphi}) = 0,$$

а это противоречит тому, что $z = e^{i\varphi}$ — полюс порядка t. □

Предложение 3. *Если* $p \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$*, то подынтегральную функцию в* (5) *можно представить в виде*

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m} Q_i} = \frac{1}{1 - z^{\lambda_0}} \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(x,z)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} Q_i}, \tag{6}$$

где $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_+$*, а* $P_k(x,z)$ *— некоторые многочлены переменных* x, z.

Доказательство. Если $p \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$, то найдутся такие неотрицательные $\delta_1, \dots, \delta_m$, что $p = \delta_1 a^1 + \dots + \delta_m a^m$. Так как p — целочисленный вектор и $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, то числа δ_i можно выбрать рациональными и записать

$$\lambda_0 p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Далее имеем $x^{\lambda_0 p} = x^{\lambda_1 a^1} \cdots x^{\lambda_m a^m}$ и, следовательно,

$$(Q_0 + z)^{\lambda_0} = (1 - Q_1)^{\lambda_1} \cdots (1 - Q_m)^{\lambda_m}.$$

Раскроем скобки и сгруппируем следующим образом:

$$1 - z^{\lambda_0} = \sum_{k=0}^{m} P_k(x, z) Q_k,$$

где $P_k(x, z)$ — некоторые многочлены переменных x, z. Разделив последнее равенство на $1 - z^{\lambda_0} \cdot Q_0 \cdot Q_1 \cdots Q_m$, получим (6). □

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие свойства конусов, которые ввиду очевидности мы не доказываем.

Предложение 4. *Если вектор $p \in \sigma$, то для любого $s \in \mathbb{R}^n$ прямая $x = \mu p - s$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ пересекает конус по лучу $x = \mu p - s, \mu \geqslant \mu_0$. Если вектор $p \notin \sigma$, то эта прямая либо пересекает конус по отрезку $x = \mu p - s, \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2$, либо не пересекает вовсе.*

Замечание 2. *В случае $p \notin \sigma$, (p, s) — диагональ ряда* (4) *— многочлен по переменной z (может быть степени 0).*

Доказательство теоремы. Поскольку k — грань конуса σ сама является конусом, не теряя общности, доказательство проведем для конуса σ размерности n. Итак, пусть p принадлежит внутренности конуса σ.

Для производящей функции n-мерной последовательности $\{b(\beta)\}_{\beta \in \mathbb{Z}^n}$ запишем интегральное представление ее $(p, 0)$-диагонали (5). Согласно предложению 3 функцию $h_{p,0}$ можно представить в виде

$$h_{p,0}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{1 - z^{\lambda_0}} \sum_{j=1}^{n} \int_{T^n} \frac{P_j(x, z) x^{p-I} dx}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} Q_i}. \tag{7}$$

Слагаемое с индексом $j = 0$ в данной сумме равно нулю. В самом деле, функция $(Q_1, \cdots, Q_m)^{-1}$ разлагается в $\mathrm{Log}^{-1} E_0$ в ряд Лорана $\sum\limits_{k \in \sigma} b(k) x^k$, а среди мономов, полученных при умножении этого ряда на многочлен $P_0(x, z) x^p$, нет монома x^I.

Обозначим σ_i конусы, порожденные векторами $a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^m$. Если $m = \dim \sigma = n$, то $p \notin \sigma_i$ для $i = 1, \dots, m$ и, согласно замечанию 2, все слагаемые в (7) являются многочленами по z. Если $m > \dim \sigma = n$, то найдется хотя бы один конус σ_i такой, что $\dim \sigma_i = n$ и $p \in \sigma_i$. К слагаемым в (7), которые соответствуют этим конусам, применим опять предложение 3. В результате после $(m - n)$ шагов получим, что $h_p(z)$ представляется суммой рациональных функций вида

$$\frac{P(z)}{(1 - z^{\lambda_0})(1 - z^{\lambda_1}) \cdots (1 - z^{\lambda_t})},$$

где $t \leqslant m - n + 1$. С учетом предложения 2 отсюда следует, что функция $h_p(z)$ имеет в точке $z = 1$ наивысший порядок полюса $m - n + 1$. Согласно [8, с. 54] отсюда получаем утверждение теоремы. □

Список литературы

[1] M. Brion, M. Vergne, Residue formulae, vector partition functions and lattice pionts in rational polytopes, *Jour. of AMS*, **10**(1997), №4, 797–833.

[2] Р. Стенли, Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990.

[3] В.В. Илларионов, Об оценках числа решений одного целочисленного уравнения, *Матем. заметки*, **54**(1993), №5, 57–64.

[4] А.К. Цих, Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных, *Мат. сб.*, 1991, №11.

[5] Д.Е. Лейнартас, Оценка для числа представлений элемента конечно-порожденной подполугруппы в $\mathbb{Z}^n$, Сб. науч. трудов "Компл. анализ и дифф. операторы" , КрасГУ, 2000, 74–79.

[6] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Adv. in Math.*, **151**(2000), 45–70.

[7] D.Ẑ. Djokoviĉ, A properties of the Taylor expansion of rational function in several variables, *J. of Math. Anal. and Appl.*, **66**(1978), 679–685.

[8] М.А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, М., Наука, 1979.

On the Asymptotics of the Vector Partition Function

Denis E. Leinartas

We obtain the asymptotic estimate for the vector partition function by using generating functions and the integral representations method.

Keywords: generating function, integral representation, amoeba of the algebraic hypersurface.