

ГЕРОНОВЫ И ТИАНОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Чёрная Н. Е.,

научный руководитель канд. физ.мат. наук Т. Ю. Войтенко

Лесосибирский педагогический институт – филиал

Сибирского федерального университета

Треугольник, у которого площадь S и стороны x, y, z выражаются натуральными числами, называют *героновым* треугольником. Геронов треугольник $\langle x, y, z; S \rangle$ называется *основным*, если его стороны x, y, z взаимно просты, то есть $(x, y, z) = 1$.

Вызывает интерес задача о нахождении всех героновых треугольников. Домножая длины сторон такого треугольника на соответствующий общий множитель, можно получить подобный треугольник с целочисленными сторонами и площадью, поэтому по формуле Герона эта задача сводится к решению в целых числах a, b, c, S уравнения:

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c),$$

где $p = (a + b + c)/2$. Брахмагупта (индийский математик и астроном, 598-660 гг.) нашел его решение в параметрическом виде: длины сторон целочисленного геронова треугольника равны

$$k(m^2 + n^2), n(m^2 + k^2), (n + k)(m^2 - nk),$$

где k, m, n – произвольные натуральные числа, причем $m^2 > nk$; при этом площадь треугольника равна $kmn(m + n)(m^2 - nk)$. Несколько примеров таких треугольников:

$$(3, 4, 5), (5, 5, 6), (5, 5, 8), (6, 8, 10), (10, 10, 12),$$

$$(5, 12, 13), (10, 13, 13), (9, 12, 15), (4, 13, 15), \dots$$

Заметим, что все эти примеры, кроме последнего – пифагоровы треугольники, то есть прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами или равнобедренные треугольники, состоящие из двух равных пифагоровых. Треугольник из последнего примера состоит из двух неравных пифагоровых треугольников со сторонами $(12/5, 16/5, 4)$ и $(16/5, 63/5, 13)$ с общим катетом длины $16/5$. Нетрудно показать, что любой геронов треугольник либо прямоугольный (пифагоров), либо составлен из двух пифагоровых.

Вопросу отыскания героновых треугольников посвящены работы Брадиса, Сычикова, Серпинского, Поповича, Осипяна и др. В последние десятилетия этой темой активно занимается Кожегельдинов. В [1] приведен ряд эквивалентных общих формул, каждая из которых описывает все основные героновы треугольники. Приведем одну из них:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(ac^2 - bd^2)}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}, & y &= \frac{ab(c^2 + d^2)}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}, \\ z &= \frac{a^2c^2 + b^2d^2}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}, & S &= \frac{abcd(a+b)(ac^2 - bd^2)}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))^2}, \end{aligned} \right\}$$

где

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad ac^2 > bd^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1.$$

Героновы треугольники $\langle x, y, z; S \rangle$, площадь которого выражается квадратом натурального числа A , назовем *тиановым* треугольником. Тианов треугольник $\langle x, y, z; A^2 \rangle$, стороны которого x, y, z выражаются взаимно простыми числами, назовем *основным*. Хотя известно значительное число основных тиановых треугольников, не

существует общей формулы, описывающей все эти тиановые треугольники, то есть вопрос о параметризации всех основных тиановых треугольников остается открытым (см. [2], Problem 6628).

Вопрос о нахождении общей формулы всех основных тиановых треугольников сводится к решению в натуральных числах диофантова уравнения четвертой степени с четырьмя неизвестными α, β, γ, A :

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = A^4,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Отметим, что если x, y, z стороны и S площадь основного тианова треугольника, то $x = \alpha + \beta, y = \beta + \gamma, z = \gamma + \alpha, S = A^2$, где $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Общее решение этого уравнения в натуральных числах неизвестно. Но в работах [3], [4] показано, что это уравнение имеет бесконечное множество основных решений в натуральных числах α, β, γ, A .

Мы покажем, что если выбрать натуральное число m такое, что $\frac{1}{2}(m^2 - 1)$ есть квадрат, то треугольники со сторонами $(\frac{1}{2}(m^3 + m^2) - 1, \frac{1}{2}(m^3 - m^2) + 1, m^2)$ и $(m^3 - \frac{1}{2}(m - 1), m^3 - \frac{1}{2}(m + 1), m)$ имеют площади, являющиеся квадратом натурального числа.

Пусть $a = \frac{1}{2}(m^3 + m^2) - 1, b = \frac{1}{2}(m^3 - m^2) + 1, c = m^2$ стороны треугольника. Тогда периметр $2s = m^3 + m^2$, и поэтому $s - a = 1, s - b = m^2 - 1, s - c = \frac{1}{2}(m^3 - m^2)$. Воспользовавшись формулой Герона $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ для площади треугольника со сторонами (a, b, c) и периметром $2s$ получаем, что площадь треугольника Δ равна $\frac{1}{2}m^2(m^2 - 1)$.

Аналогично проверяется второй случай.

Предположим, что $\frac{1}{2}(m^2 - 1) = n^2$. Тогда $m^2 - 2n^2 = 1$. Решениями этого уравнения являются, например, пары $(m, n) = (3, 2), (17, 12)$, которые приводят к тиановым треугольникам

$$(a, b, c; s, \Delta) = (17, 10, 9; 18, 36), (26, 25, 3; 27, 36), \\ (2600, 2313, 289; 2601, 41616), (4905, 4904, 17; 4913, 41616).$$

Уравнение $m^2 - 2n^2 = 1$ – это уравнение Пелля. Решения этого диофантового уравнения хорошо известны.

Отметим также, что один из способов нахождения тиановых треугольников связан с решениями другого диофантового уравнения, а именно уравнения $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$), которое в свою очередь является частным случаем уравнением Эйлера $x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^n = x_n^n$. Наименьшее известное значение x_4 , для которого выполняется равенство $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$ равно 422481. Наименьшая сторона соответствующего тианова треугольника тогда равна 2322892439815904960321.

Список литературы

1. Кожегельдинов С.Ш. Отыскание основных героновых треугольников // Изв. АН Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат. – 1992. – №3. – С. 48-51.
2. Melter R. A. Problem 6628 // Amer. Math. Monthly. 1990. V. 97. №4. P/ 350; 1991. V. 98. №8. P. 772-774.

3. Кожегельдинов С.Ш. К вопросу о тиановых треугольниках // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №5. С. 155-157.
4. Кожегельдинов С.Ш. Об основных тиановых треугольниках // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №4. С. 561-569.
5. Barbeau, E.J. Pell's equation. – New York.: Springer, 2003.