Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies 8 (2014 7) 886-893
~ ~ ~

УДК 681.513.5; 517.977

Global Optimization on a Set of Continuous and Discrete Variables with Unordered Possible Values

Anton S. Mikhalev and Anatoly I. Rouban
Siberian Federal University
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Russia

Received 03.06.2014, received in revised form 04.11.2014, accepted 02.12.2014

The new algorithm of finding of a global minimum on the presence of constraints type of inequalities on a set of continuous and discrete variables with disorder possible values is offered. The idea of this approach is to separate at each iteration stage trial motions and working step, and also the effective information processing obtained in the sample points. Existence of discrete variables with unordered possible values leads to the solution of a sequence of tasks of global minimization of multiextremal functions on a set of only continuous variables in the presence of their constraints type of inequalities. As a result, among the obtained optimum solutions chooses the best solution.

Keywords: global optimization, continuous and discrete variables, selective averaging of required variables, constraints type of inequalities.

Глобальная оптимизация на множестве непрерывных и дискретных переменных с неупорядоченными возможными значениями

А.С. Михалев, А.И. Рубан
Сибирский федеральный университет
Россия, 660041, Красноярск, Свободный, 79

Разработан новый алгоритм поиска глобального минимума при наличии ограничений типа неравенств на множестве как непрерывных, так и дискретных переменных с неупорядоченными возможными значениями. Идея подхода заключается в разделении на каждой итерации этапа пробных движений и рабочего шага, а также в эффективной обработке информации, извлекаемой в пробных точках. Наличие дискретных переменных с неупорядоченными возможными значениями приводит к решению последовательности задач глобальной минимизации многоэкстремальных функций на множестве только непрерывных переменных

© Siberian Federal University. All rights reserved
* Corresponding author E-mail address: ai-rouban@mail.ru

при наличии своих ограничений типа неравенств. Среди полученных оптимальных решений в итоге выбирается наилучшее.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, непрерывные и дискретные переменные, селективное усреднение искомых переменных, ограничения типа неравенств.

1. Введение

Задача поиска оптимального значения целевой функции является одной из актуальных в современной науке и технике. Большинство практических задач, возникающих в различных сферах человеческой деятельности, могут быть сведены к задачам оптимизации. Это различные варианты расчета оптимальных параметров конструкций, управления распределением ресурсов и грузоперевозками, оптимальных управлений, обеспечивающих заданные траектории движения объектов, и т.п. Повышение качества управления, планирования и проектирования достигается подстройкой оптимальных параметров и поиском наилучших структур систем управления.

Основные трудности при оптимизации обусловлены многоэкстремальностью целевых функций и их разрывным характером, наличием как непрерывных, так и дискретных переменных, наличием кроме непрерывных и дискретных переменных и др. Разрешением указанных проблем занимается глобальная оптимизация [1–8].

В данной статье представлен новый алгоритм поиска глобального минимума с использованием селективного усреднения искомых переменных при наличии ограничений типа неравенств [4] в пространстве смешанных переменных: непрерывных переменных и дискретных переменных с неупорядоченными возможными значениями.

2. Постановка задачи

Дискретные переменные, основываясь на специфике их возможных значений, условно можно разделить на три класса.

В первый класс входит любая дискретная переменная, возможные значения которой неупорядочены. Все эти значения являются самостоятельными (не связанными друг с другом), и при их рассмотрении нам не остаётся ничего другого, как просто пронумеровать их, а при решении задачи оптимизации – перебирать все эти возможные значения. Этот класс дискретных переменных будет рассмотрен в данной статье. Другие два класса дискретных переменных – с упорядоченными возможными значениями и с числовыми значениями – будут включены позже в синтезируемые алгоритмы глобальной оптимизации.

Необходимо отыскать условный глобальный минимум функции многих переменных $f(x, y)$ с учетом ограничений-неравенств $\varphi_j(x, y) \leqslant 0,\ j = \overline{1, m(y)}$, где $x = (x_1 \ldots, x_k)$ – k непрерывных переменных, y – дискретная переменная с r неупорядоченными возможными значениями $y_1, \ldots, y_r$.

Наличие этой дополнительной дискретной переменной приводит к решению r задач глобальной оптимизации различных функций $f(x, y_\mu) \equiv f_\mu(x)$ только по непрерывным переменным x:

$$f_\mu(x) = \min_{x \in X_\mu},\ \mu = \overline{1, r}. \tag{1}$$

Допустимые области X_μ задаются совокупностью неравенств

$$\varphi_{j\mu}(x) \leqslant 0, j = \overline{1, m_\mu}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi_j(x, y_\mu) \equiv \varphi_{j\mu}(x),\ m(y_\mu) = m_\mu$.

Наличие ограничений типа неравенств приводит к сужению области поиска экстремума. Целевые функции $f_\mu(x), \mu = \overline{1, r}$ многоэкстремальны, могут быть недифференцируемыми, а также искажены помехой. Функции ограничений также могут быть невыпуклыми и недифференцируемыми. Поиск экстремумов осуществляется на основе вычислений (или измерений) указанных функций $f_\mu(x), \varphi_{j\mu}(x), j = \overline{1, m_\mu}$ в пробных точках.

3. Поиск минимума функций

Решаем задачу глобальной минимизации (1), (2) при каждом фиксированном μ. В области X_μ, заданной ограничениями неравенствами (2), размещается n пробных точек $x_\mu^{(i)}, i = \overline{1, n}$. В этих точках вычисляем минимизируемые функции $f_\mu^{(i)} \equiv f_\mu(x^{(i)}),\ i = \overline{1, n}$.

При получении пробных точек $x_\mu^{(i)},\ \ i = \overline{1, n}$ последовательно генерируют равномерно распределенные точки в прямоугольной области Π_μ^l с центром в точке x_μ^l:

$$x_{\nu,\mu}^{(i)} = x_{\nu,\mu}^l + \Delta x_{\nu,\mu}^l u_\nu^{(i)},\ u_\nu \in [-1,1], \nu = \overline{1, k},\ \ i = 1,2,... \tag{3}$$

и из них оставляется n точек, попадающих в допустимую область $X_\mu^l = \Pi_\mu^l \bigcap X_\mu$ (удовлетворяющих ограничениям типа неравенств (2)).

Исходная точка x_μ^0 и размеры Δx_μ^0 прямоугольной области Π_μ^0 выбирают так, чтобы Π_μ^0 охватывала допустимую область X_μ или ту её часть, где расположен глобальный экстремум.

Новое значение x_μ^{l+1}, в среднем более близкое к положению глобального минимума оптимизируемой функции f_μ, и размеры прямоугольной области поисковых движений $\Delta x_{\mu,\nu}^{l+1}, \nu = \overline{1, m}$ вычисляют по формулам:

$$\begin{gathered}
x_{\nu,\mu}^{l+1} = x_{\nu,\mu}^l + \Delta x_{\nu,\mu}^l u_{\nu,\min}, u_{\nu,\min} = \sum_{i=1}^n u_\nu^{(i)} \overline{p}_{s,\min}^{(i)}, \nu = \overline{1, k}, \\
\overline{p}_{s,\min}^{(i)} = \frac{p_s(g_{\mu,\min}^{(i)})}{\sum_{j=1}^n p_s(g_{\mu,\min}^{(j)})},\ g_{\mu,\min}^{(i)} = \frac{f_\mu^{(i)} - \hat{f}_{\mu,\min}}{\hat{f}_{\mu,\max} - \hat{f}_{\mu,\min}}, \\
\Delta x_{\nu,\mu}^{l+1} = \gamma_q \Delta x_{\nu,\mu}^l (\sum_{i=1}^n |u_\nu^{(i)}|^q \overline{p}_{s,\min}^{(i)})^{1/q}, \nu = \overline{1, k}, \\
l = 0,1,2,...;[0 < \gamma_q, q \in \{1,2,...\},\ \ 0 < s]
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\hat{f}_{\mu,\max} = \max\{f_\mu^{(i)}, i = \overline{1, n}\}$; $\hat{f}_{\mu,\min} = \min\{f_\mu^{(i)}, i = \overline{1, n}\}$; s – коэффициент селективности ядра $p_s(\cdot)$; в переменных $u_\nu^{(i)}, \overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ для упрощения записи опущен номер итерации l; $0 \le g_{\mu,\min}^{(i)} \le 1$. Весовые коэффициенты (ядра) нормированы на системе n пробных точек $\sum_{i=1}^n \overline{p}_{s,\min}^{(i)} = 1$.

Критерием останова процесса поиска обычно служит условие уменьшения размера области варьирования до заданной величины: $\max\{|\Delta x^l_{\nu,\mu}|, \nu = \overline{1,k}\} \le \varepsilon$.

После нахождения глобального минимума для каждой из r функций $\{x^*_\mu,\ f_\mu(x^*_\mu),\ \mu = \overline{1,r}\}$ выбирют наилучшее решение $x^*_{\mu^*},\ f_{\mu^*}(x^*_{\mu^*})$:

$$\min\{f_\mu(x^*_\mu), \mu = \overline{1,r}\} = f_{\mu^*}(x^*_{\mu^*}) \tag{5}$$

Оптимальное значение дискретной переменной имеет номер μ^*.

4. Численные примеры

Пример 4.1. Каждая трехэкстремальная одномерная функция (относительно непрерывной переменной x), соответствующая значению дискретной переменной, построена в виде наложения (с помощью операции min) трех потенциалов без искажения их местоположения и значений функции в точках минимума и в их окрестностях:

$$f_\mu(x) = \min\left(-\frac{1}{x^2 + a_\mu},\ -\frac{1}{2(x-2)^2 + b_\mu},\ -\frac{1}{3(x-4)^2 + c_\mu}\right),\ \mu = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Коэффициенты α_μ, b_μ, c_μ определяют глубину потенциалов, где μ – номер значения дискретной переменной y. Задаём следующие значения указанных коэффициентов для каждого μ:

$$\mu = 1: a_1 = 0.4;\ b_1 = 0.2;\ c_1 = 0.3;$$
$$\mu = 2: a_2 = 0.3;\ b_2 = 0.15;\ c_2 = 0.4;$$
$$\mu = 3: a_3 = 0.5;\ b_3 = 0.1;\ c_3 = 0.2.$$

Итоговый глобальный минимум находится в точке $x^* = 2$, $\mu^* = 3$.

Введем ограничения неравенства, отсекающие основную часть области притяжения глобального минимума для каждой трёхэкстремальной функции:

$$\mu = 1: x \le 0.5 \text{ и } 3.5 \le x;\ \ \mu = 2: x \le 1 \text{ и } 3 \le x;\ \ \mu = 3: x \le 1.2 \text{ и } 2.8 \le x.$$

После учета ограничений глобальный экстремум условный приходится на точку $x^* = 4$, $\mu^* = 3$. График функции $f_3(x)$ и ограничения представлены на рис. 1а.

Алгоритм поиска имеет сравнительно высокую скорость сходимости (решение отыскивается за 12–20 итераций) с оценкой вероятности отыскания глобального минимума, равной 1. Настройки для алгоритма: $x^0 = 2$, $\Delta x^0 = 4$, $n = 25$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро параболическое, степень селективности ядра $s = 200$.

Добавим к минимизируемым функциям центрированную равномерно распределённую помеху $R[-\theta;\ \theta] = \theta \cdot R[-1;\ 1]$, изменяющуюся внутри интервала $[-\theta;\ \theta]$:

$$\widetilde{f}_\mu(x) = \text{функция } (6) + \theta_\mu R[-1;1],\ \ \mu = 1,2,3. \tag{7}$$

Коэффициенты θ_μ вычисляем по заданной величине ρ отношения «шум-сигнал»: $\rho = \dfrac{2\theta_\mu}{\Delta f_\mu}$.

Здесь Δf_μ – интервал изменения функции без помехи (при изменении x внутри допустимой об-

ласти). При $\rho = 1$ шум 100 % по отношению к сигналу (функции без помехи), при $\rho = 0.1$ шум 10 %. Ориентируемся на максимальную амплитуду изменения сигнала для каждого μ в следующих областях: $\mu = 1 : -1 \le x \le 0.5$ и $3.5 \le x \le 5$; $\mu = 2 : -1 \le x \le 1$ и $3 \le x \le 5$; $\mu = 3 : -1 \le x \le 1.2$ и $2.8 \le x \le 5$. Помеха будет 100 % при следующих значениях параметров: $\theta_1 = \theta_2 = 1.5, \theta_3 = 2.5$.

Для случая с 50%-ной помехой (рис. 1б) алгоритм отыскивает решение за 15–20 итераций с оценкой вероятности, равной 1. Настройки для алгоритма: $x^0 = 2$, $\Delta x^0 = 4$, $n = 500$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро по функции параболическое, степень селективности $s = 100$.

Пример 4.2. Четыре пятиэкстремальные двумерные функции заданы так:

$\mu = 1 : f_1(x_1,x_2) = \min\{3|x_1 - 2| + 2|x_2 - 2|^{0.9} - 4;\ 3|x_1 - 4|^{1.5} + 3|x_2 - 4|^{1.7} - 6;\ 2|x_1 - 6|^{1.8} + 3|x_2 - 6| - 2;\ 3|x_1 - 2|^{1.4} + 3|x_2 - 6| - 3;\ 2|x_1 - 6|^{1.3} + 2|x_2 - 2|^{1.6} - 1\}$

$\mu = 2 : f_2(x_1,x_2) = \min\{3|x_1 + 2| + 2|x_2 - 2|^{0.9} + 9;\ 3|x_1 + 4|^{1.5} + 3|x_2 - 4|^{1.7} + 1;\ 2|x_1 + 6|^{1.8} + 3|x_2 - 6| + 7;\ 3|x_1 + 2|^{1.4} + 3|x_2 - 6| + 3;\ 2|x_1 + 6|^{1.3} + 2|x_2 - 2|^{1.6} + 5\}$

$\mu = 3 : f_3(x_1,x_2) = \min\{3|x_1 + 2| + 2|x_2 + 2|^{0.9} + 4.5;\ 3|x_1 + 4|^{1.5} + 3|x_2 + 4|^{1.7} + 2.5;\ 2|x_1 + 6|^{1.8} + 3|x_2 + 6| + 10.5;\ 3|x_1 + 2|^{1.4} + 3|x_2 + 6| + 6.5;\ 2|x_1 + 6|^{1.3} + 2|x_2 + 2|^{1.6} + 8.5\}$

$\mu = 4 : f_4(x_1,x_2) = \min\{3|x_1 - 2| + 2|x_2 + 2|^{0.9} + 2;\ 3|x_1 - 4|^{1.5} + 3|x_2 + 4|^{1.7};\ 2|x_1 - 6|^{1.8} + 3|x_2 + 6| + 6;\ 3|x_1 - 2|^{1.4} + 3|x_2 + 6| + 4;\ 2|x_1 - 6|^{1.3} + 2|x_2 + 2|^{1.6} + 8\}$.

Функции имеют минимумы в следующих точках:

$\mu = 1$: (2; 2), (2; 6), (4; 4), (6; 2), (6, 6) – глобальный в точке (4; 4);

$\mu = 2$: (-2; 2), (-2; 6), (-4; 4), (-6; 2), (-6, 6) – глобальный в точке (-4; 4);

$\mu = 3$: (-2; -2), (-2; -6), (-4; -4), (-6; -2), (-6, -6) – глобальный в точке (-4; -4);

$\mu = 4$: (2; -2), (2; -6), (4; -4), (6; -2), (6, -6) – глобальный в точке (4; -4).

Искомый глобальный минимум находится в точке $x^* = (4; 4)$, $\mu^* = 1$, и $f_1(x^*) \equiv f(x^*, y_1^*) = -6$.

Для каждой из функций введем своё ограничение неравенства:

$\mu = 1 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - 16 \le 0$; $\mu = 2 : (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - 16 \le 0$;

$\mu = 3 : (x_1 + 4)^2 + (x_2 + 4)^2 - 16 \le 0$; $\mu = 4 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 + 4)^2 - 16 \le 0$.

Пространственный вид для минимизируемой функции, линии равных уровней для неё и ограничения при $\mu = 1$ представлены на рис. 2. Условный глобальный экстремум приходится на точку $x^* = (4; 4)$, $\mu^* = 1$.

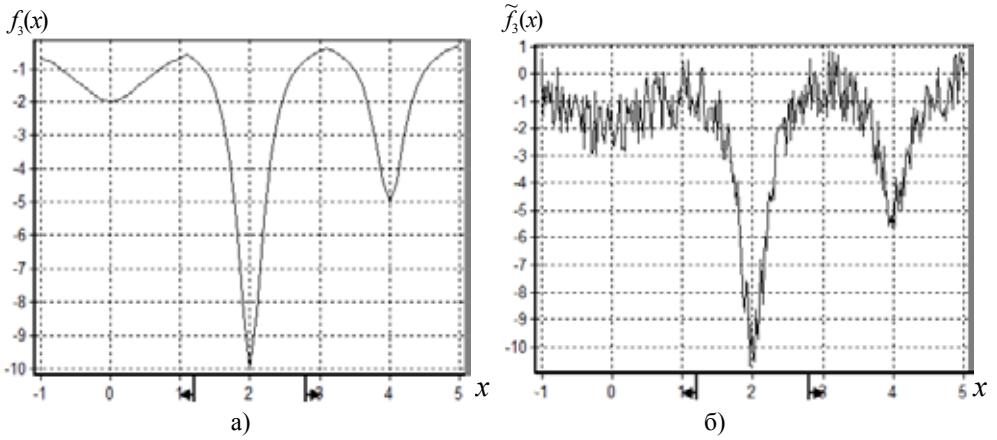
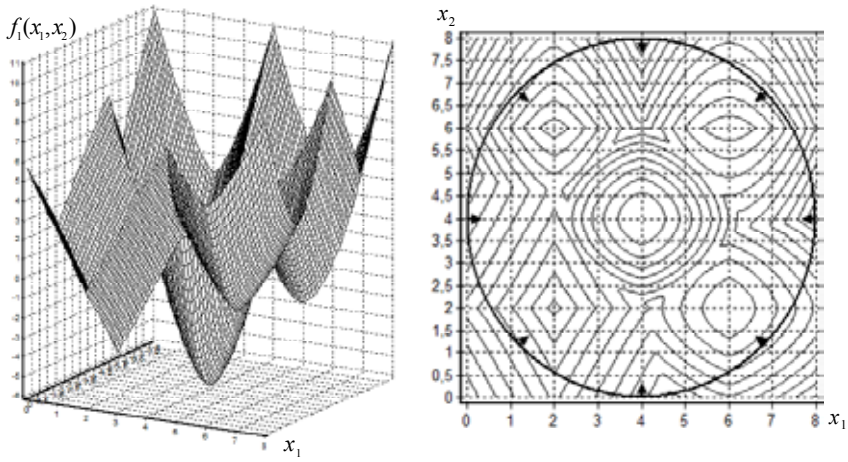
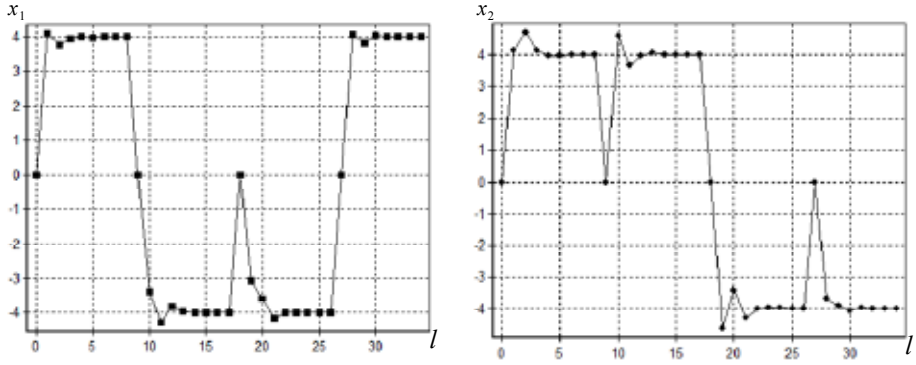


Рис. 1. Графики ограничения и функции при $\mu = 3$: а – без помехи; б – при 50%-ной помехе



а) б)

Рис. 2. Пространственный вид первой функции (при μ = 1) (а) и линии равных уровней для неё же, допустимая область которой находится внутри круга (б)



а) б)

Рис. 3. Изменение непрерывных переменных x_1 (а) и x_2 (б) при поиске минимума последовательно для всех функций

Алгоритм поиска показывает примерно одинаковое поведение и отыскивает решение за 30–40 итераций с оценкой вероятности равной 1 (рис. 3). Настройка алгоритма: $n = 50$, $x^0 = (2;2)$, $\Delta x^0 = (10;10)$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро по функции параболическое, степень селективности $s = 100$.

Добавим к минимизируемым функциям центрированную равномерно распределённую помеху

$$\widetilde{f}_\mu(x_1, x_2) = f_\mu(x_1, x_2) + \theta_\mu R[-1;\ 1].$$

Коэффициентами θ_μ регулируем отношение «шум-сигнал». При этом ориентируемся на максимальную амплитуду изменения сигнальной части (функции без помехи) внутри допустимой области, задаваемой ограничением:

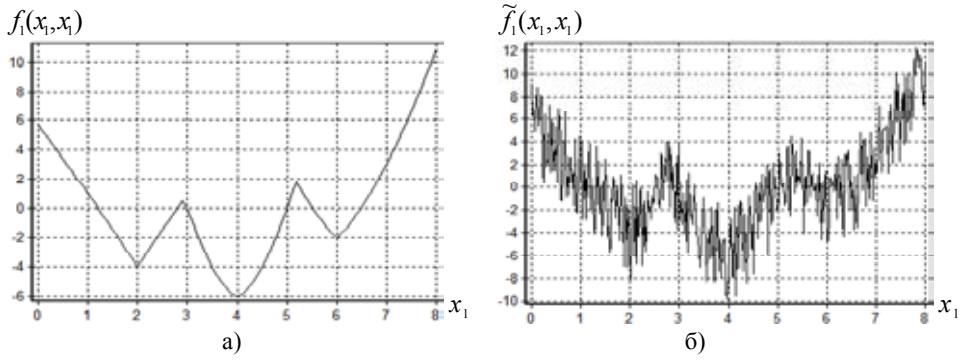


Рис. 4. Сечение функции $f_1(x_1,x_2)$ при $x_2 = x_1$ без помех (а) и при 50%-ной помехе (б)

μ=1: сигнальная часть меняется в интервале [–6; 11];

μ=2: сигнальная часть меняется в интервале [1; 17];

μ=3: сигнальная часть меняется в интервале [2.5; 21,5];

μ=4: сигнальная часть меняется в интервале [0; 19].

Таким образом, коэффициенты θ при 100%-ном шуме для каждого значения μ будут следующими: $\theta_1 = 8.5$, $\theta_2 = 8$, $\theta_3 = \theta_4 = 9.5$.

Для наглядности степени влияния помехи на рис. 4а и 4б приведены сечения функции (при μ = 1 – случай, содержащий глобальный экстремум) при $\theta_1 = 0$ (без помех) и при 50%-ной помехе.

Для случая с помехой (50 %) алгоритм отыскивает итоговое решение за 35–40 итераций с достаточно высокой оценкой вероятности нахождения истинного решения, равной 0.98. Настройки для алгоритма: $n = 500$, $x^0 = (2;2)$, $\Delta x^0 = (10;10)$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро параболическое, степень селективности $s = 50$.

Заключение

Минимизация всех функций $f_\mu(x), \mu = \overline{1,r}$ может выполняться в одной и той же допустимой области X, задаваемой системой неравенств

$$\varphi_j(x) \le 0, j = \overline{1,m}.$$

В этом случае можно построить более компактную вычислительную схему за счёт свёртки (с помощью операции «минимум») всех минимизируемых функций в одну и однократного решения задачи глобальной оптимизации.

Список литературы

[1] *Стронгин Р.Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978. 239 с.

[2] *Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А.* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 1. С. 119–127.

[3] *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального оптимума. М.: Наука, 1991. 247 с.

[4] *Рубан А.И.* Глобальная оптимизация методом усреднения координат. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 302 с.

[5] *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

[6] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации М.: Факториал Пресс, 2009. 824 с.

[7] *Пантелеев А.В.* Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. М.: МАИ-Принт, 2009. 159 с.

[8] *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1376–1389.